高等数学引论

第一卷 第二分册

华罗庚

科学出版社

高等数学引论

第一卷　第二分册

华　罗　庚

科　学　出　版　社

1 9 7 9

内 容 简 介

本书是不久前出版的“高等数学引论”第一卷第一分册的继续．本书除介绍多个变元的函数，带变数的贯，级数及积分，曲线及曲面的微分性质，重积分，线积分，面积分，场论，Fourier 级数，常微分方程组外，还介绍了这些理论的应用．

本书可作为高等学校教学参考用书．

高 等 数 学 引 论

第一卷　第二分册

华 罗 庚 著

*

科 学 出 版 社 出

北京朝阳门内大街 137 号

沈阳新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1963 年 11 月第 一 版　　开本：787×1092　1/16

1979 年 4 月第五次印刷　　印张：21 3/4

印数：精 20,931—72,580　　插页：精 3，平 2

平 11,581—91,730　　字数：448,000

统一书号：13031・244

本社书号：398・13—1

定价：精装本 2.80 元

平装本 2.10 元

序　　言

这部书的第一卷终于交印了，它既是急就章，又是拖沓篇. 1958 年匆匆上马，现想现写现印现讲，有时写稿不过三遍，仅仅经过起草、修改、誊正三道手续便拿去付印. 有时候校对来不及，就不校对了，因而原讲义上错误百出，疵谬迭见，所以说这是急就章. 如果能专心一志地连续地干下去，那还可能比较好些，但又经常为其它工作所打断，因而写一段停一停，改一章放一放的情况又经常出现，所以说是拖沓篇. 紧紧松松，赶赶拖拖. 因而详略不一，前后不贯，轻重失调，呼应不周等毛病在所难免的了.

情况是如此，虽然经过同志们的帮助和修改重写，但还可能留下不少后遗症. 这样的草率工作本来不该交印的，但不少同志热情鼓励，几经踌躇终于把它出版了，希望经过读者的帮助，人多、眼多、想法多，多提意见将来可以改写得更好些.

这个课自始至终是和王元同志合开的，他对原稿的形成与改写都提了不少意见，并且有不少章节都是出诸他的手笔. 在共同教学中一些心得已经吸收入我们合著的“积分的近似计算”一书中（科学出版社 1961 年初版），1961 年龚升、吴方等同志又用这讲义教了一遍，修改了不少. 最后定稿又经过曾肯成、许以超、史济怀、邓诗涛、李炯生、刘碧梧等同志的细心校阅，提了不少意见. 个别章节还获得了戴元本、陆汝钤、韩京清、周永佩、罗祥钰、曹传书、吴松林、江嘉禾、李培信、邵秀民、陈志华、石赫、殷慰萍等同志的帮助，有关这些我在这儿表示谢意. 特别应该一提的是：在最后定稿的时候，获得了中山大学吴兹潜、林伟二同志的帮助，他们一字不苟地校阅推敲，使本书避免不少错误. 这样的主动地来自其他院校的帮助只能归功于集体主义的优越性.

在写作的过程中参考过熊庆来的“高等算学分析”（1934）；苏步青的“微分几何学”（1947）；赵访熊的“高等微积分”（1949）；孙光远、孙叔平的“微积分学”（1952）；陈建功的“实函数论”（1958）；杨宗磐的“数学分析入门”（1958）；樊映川等的“高等数学讲义”（1958）；陈䓈民的“高等数学教程”（1958）；关肇直的“高等数学教程（第一卷）”（1959）；江泽坚的“数学分析”（1960）；北京大学、复旦大学、南京大学及高等数学教科书编审委员会的“高等数学教程”，我在此致谢. 其他作为参考的外文书籍不在此一一列举了.

在写作的过程中，曾经有过一些努力，企图能更好地体现党对教学改革的方针，但是由于自己的理论和业务水平，没有能够较好地做到，读者可能发现一些其它书上所没有的材料，也可能发现一些稍有不同的处理方法，但毕竟是太少了． 在谈到这一点的时候，感到空虚，并且诚恐会错误百出．大家所公认的、辗转传抄的已经成熟的材料，错误还有时难免，何况第一次写下来的东西，那更使人耽心了，但是还是斗胆地放进书里去，作为引玉之砖，作为试矢之的．特别是一些高的内容放低了，难的内容改易了，繁的内容化简了的部分更希望大家指正．但是我个人深信，只要每本书都有些章节改进，集腋成裘，我们教学改革会汇成巨流的，辛勤的点滴劳动，可能是大丰收的预兆．

大学教书不是照本讲，因此本书也准备了一些可教可不教的材料，教师们可以灵活掌握，余下的材料可以作为学有余力的同学的课外读物．习题应当做，并且适当地要多做些．本书没有组织好习题，希望老师们自已设法组织．习题的目的首先是熟练和巩固学习了的东西；其二是初步启发大家会灵活运用，独立思考；其三是融会贯通，出些综合性的习题把不同部门的数学沟通起来．

在教学过程中深得教学相长的益处，其中不少是由于同学所提意见的影响，我把所得到的一些不成熟的看法写在下面供同志们参考．我讲书喜欢埋些伏笔，把有些重要概念、重要方法尽可能早地在具体问题中提出，并且不止一次地提出．目的在于将来进一步学习的时候会较易接受高深的方法，很可能某些高深方法就是早已有之的朴素简单的方法的抽象加工而已．（有些深化了些，有些并没有深化而仅仅是另一形式而已．）我也喜欢生书熟讲，熟书生温的方法，似乎是在温熟书，但把新东西讲进去了，这是因为一般讲来，生书比旧课，真正原则性的添加并不太多的原故．找另一条线索把旧东西重新贯穿起来，这样的温习方法容易发现我们究竟有哪些主要环节没有懂透．有时分讲合温，或合讲分温，先把一个机器的零件一一搞清，再看全局，或先看全部机器的作用和目的，再分析要造成这个机器需要哪些零件而把条件一一讲明．“数”与“形”的“分”和“合”，“抽象”与“具体”的“分”与“合”都是在反复又反复的过程中不断提高的．同学也要求讲讲“人家怎样想出来的”，因而在讲书时也曾作过尝试，主观地推测一下，这很可能并不是原来的想法，但给出一条“这一步看下步并不难，连看几步就达到目的”的途径，作为同学们的参考．

以上一些肤浅的看法在讲课时都尝试过，但绝大部分写不下来，或者写下来就走了样，因此，同是一部书，可以多样讲，讲义作参考，结合同学的实际情况能灵活掌握才好．拉杂地写了这些意见，与其说是对教师讲的，还不如说是对同学（或自学的人）讲的．

总之，由于水平的限制，虽然黾勉从事，但缺点一定不少，我诚挚地希望读者们多提意见，更希望教师们多多指教.

最后，特别需要提起的是：由于中国科学院数学研究所党组织的支持，才使我有机会讲授基础课和编写讲义；在编写过程中，自始至终得到了中国共产党中国科学技术大学委员会的鼓励、关怀与支持，还给予了具体的帮助，这是我衷心感激的. 有了党的鼓励、关怀与支持，使我这几年来敢于按照自己的一些肤浅的设想来进行教学的尝试，使我这几年来有勇气把第一次写下来的东西放到课堂上去教，使我这几年来能把这项工作坚持下来. 至于中国科技大学教务处、数学系与数学教研室的同事们，在我从事这项工作的时候，一直给我方便与帮助，也在此表示感谢. 对科学出版社的感谢，那就更应当在此一提了，他们花了大量的劳动，在制图、编辑加工、排版印刷、校对等方面都做了细致而深入的工作.

华 罗 庚

1962 年 6 月 11 日

目　　录

第十一章　积分学的应用……1
§1. 曲綫的长度……1
§2. 面积……5
§3. 利用横断面算体积法……7
§4. 旋轉面的側面积……10
§5. 柱面的側面积……12
§6. 求重心……13
§7. 轉动慣量(或平方矩)……16
§8. 流体压力……18
§9. 功……19
第十二章　多个变元的函数……21
§1. 变数……21
§2. n維空間……22
§3. 邻域……23
§4. 域……25
§5. 极限与連續……26
§6. 域內的連續函数……29
§7. 偏微商与全微分……29
§8. 齐次函数……32
§9. 切平面……33
§10. 沿一定方向的微商……35
§11. 高阶偏微商……36
§12. 隐函数……39
§13. Taylor 展开……41
§14. 极大与极小……42
§15. 隐函数求极值法……47
§16. 坐标变换……49
§17. 三維空間的几个坐标系……51
第十三章　带变数的責,級数及积分……55
§1. 一致收斂責……55
§2. 責的微分积分……57
§3. 囿收斂……59
§4. 級数的一致收斂性……62
§5. 一致收斂的一些判别条件……66

§6. 一致收斂的 Abel 及 Dirichlet 判别法 …… 67
§7. Abel 定理及 Tauber 定理 …… 69
§8. 求隐函数的逐漸逼近法 …… 70
§9. 无穷乘积 …… 73
§10. 无穷乘积的收斂条件 …… 74
§11. 无穷乘积的对数 …… 75
§12. 无穷乘积的一致收斂 …… 78
§13. 带参数的积分 …… 81
§14. 积分号下求微分 …… 85
§15. 积分号下求积分 …… 87
§16. 上下限依于参变数的积分 …… 93
§17. 重貫 …… 94
§18. 二重級数 …… 94
§19. 級数的乘积 …… 101
§20. 多变数的冪級数 …… 103
§21. 利用級数解隐函数 …… 104
§22. 常微分方程的解的存在性与唯一性 …… 108
§23. 积分方程解的存在性与唯一性 …… 110
§24. 微分方程組的解的存在性与唯一性 …… 112
§25. 压縮映象原理 …… 114
§26. 利用冪級数解微分方程 …… 115
§27. 微分方程組 …… 116
§28. 偏微分方程 …… 117

第十四章 曲綫的微分性質 …… 121

§1. 矢量的微商 …… 121
§2. 平面上的运动 …… 123
§3. 平面曲綫的曲率 …… 124
§4. 曲綫的本性方程 …… 126
§5. 曲率圓与漸屈綫 …… 129
§6. 一般的一阶微分方程 …… 131
§7. 包絡綫 …… 134
§8. 追踪問題 …… 136
§9. 空間曲綫的基本元素 …… 139
§10. 原坐标表示法 …… 141
§11. 螺旋綫 …… 143
§12. 空間曲綫的唯一性定理 …… 144
§13. 曲率圓与曲率球 …… 147
§14. 曲面族与空間曲綫族的包絡 …… 148

第十五章 重积分 …… 151

§1. 重积分的定义 ……151
§2. 可求面积的域 ……154
§3. 重积分换坐标 ……156
§4. 重积分的基本性質 ……159
§5. 三重积分 ……161
§6. 矩 ……164
§7. 曲面的面积 ……167
§8. 物質对一点的引力 ……170
补充 ……174
§9. 求面积 ……174
§10. 求容积 ……176
§11. 求表面积 ……183
第十六章 綫积分，面积分 ……190
§1. 曲綫积分的定义(第一型) ……190
§2. 曲綫积分(第二型) ……192
§3. 曲綫积分求面积 ……196
§4. Green 公式与 Остроградский 公式 ……198
§5. Stokes 公式 ……200
§6. 与途径无关的曲綫积分 ……204
§7. 多連通域 ……206
§8. 空間与路径无关的曲綫积分 ……208
§9. 流体的稳定流动 ……209
第十七章 純量場与矢量場 ……212
§1. 定义 ……212
§2. 三种算子的性質 ……213
§3. 三种算子的迭用 ……214
§4. 梯度的几何意义 ……215
§5. Остроградский-Gauss 公式、Stokes 公式的矢量表达形式 ……217
§6. Nabla 算子 ……220
§7. 曲綫坐标及换变数 ……222
§8. 平面場 ……226
补充 ……231
§9. 在流体力学上的应用 ……231
§10. 声的传播 ……236
§11. 热的传导 ……237
第十八章 曲面的微分性質 ……240
§1. 代数工具 ……240
§2. Gauss 第一微分型 ……242
§3. Gauss 第二微分型 ……245

§ 4. 曲面上曲綫的曲率 ……246
§ 5. 点的分类 ……247
§ 6. 曲率綫 ……248
§ 7. Euler 公式……250
§ 8. Olinde Rodrigues 公式……251
§ 9. Dupin 定理 ……252
§ 10. Gauss 曲率的几何意义……254
§ 11. 曲率中値的几何意义……255
§ 12. 活动标架……256
§ 13. 曲面的可展性……258
§ 14. 曲面族与偏微分方程……258
补充 用张量分析来处理曲面論 ……262
§ 15. 第一基本型……262
§ 16. 张量……263
§ 17. 基本方程之一——Gauss 方程 ……266
§ 18. 基本方程之一——Weingarten 方程……268
§ 19. Gauss 与 Codazzi 方程……268
§ 20. 曲率张量……269
第十九章 Fourier 級数 ……271
§ 1. 三角函数的正交性 ……271
§ 2. 几个三角級数的和 ……272
§ 3. Dirichlet 积分 ……274
§ 4. 平方中値誤差及 Bessel 不等式 ……275
§ 5. 收斂判别条件 ……277
§ 6. 在区間 $(0, \pi)$ 上的展开式……281
§ 7. Gibbs 現象 ……284
§ 8. 均值求和 ……286
§ 9. Parseval 等式 ……288
§ 10. Fourier 級数可以逐項求积分 ……289
§ 11. Fourier 系数的性质 ……291
§ 12. Fourier 級数的其他形式 ……293
§ 13. 实用調和分析——有限調和分析……293
§ 14. Fourier 积分 ……299
§ 15. Fourier 变換 ……300
§ 16. Poisson 公式 ……301
§ 17. Fourier 变換的复数形式 ……303
§ 18. 其他变換……304
第二十章 常微分方程組 ……306
§ 1. 化任意的微分方程組为一阶微分方程組 ……306

§ 2. 常微分方程組 ……307
§ 3. 質点的运动方程 ……310
§ 4. 人造卫星的軌道方程 ……313
§ 5. 軌道討論——第一、第二宇宙速度……316
§ 6. 第三宇宙速度 ……318
§ 7. 質点組——多体問題 ……319
§ 8. Lagrange 綫性方程 ……321
§ 9. 綫性方程的一般解 ……326
§ 10. 一般一級偏微分方程的解法——Charpit 法 ……327
§ 11. 上节方法的特例……329
索引一 ……332
索引二 ……336

第十一章　积分学的应用

§1. 曲綫的长度

弧长的定义. 假定 A, B 是給定的曲綫上的两点，以这两点为端点作这曲綫的內接折綫，当这折綫的边数无限增加，而且每边的长度都趋向于 0 时，这折綫的周界长趋向的极限（如果这极限存在的話）叫做这曲綫在 A, B 两点之間的弧长.

假定所給的曲綫的参变数表示是

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{C}$$

当 $t = \alpha$ 及 β 时所給出的点就是 A 点与 B 点. 假定 $\alpha < \beta$，当 t 由 α 变到 β 时，(x, y) 就沿着曲綫 (C) 由点 A 变到点 B. 又假定 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都有連續的微商，在弧上取 $(n+1)$ 个点

$$A = M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{\nu-1}, M_\nu, \cdots, M_{n-1}, M_n = B$$

各对应于

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{\nu-1}, t_\nu, \cdots, t_{n-1}, t_n = \beta.$$

把 M_ν 的坐标記作

$$x_\nu = \varphi(t_\nu), \quad y_\nu = \psi(t_\nu),$$

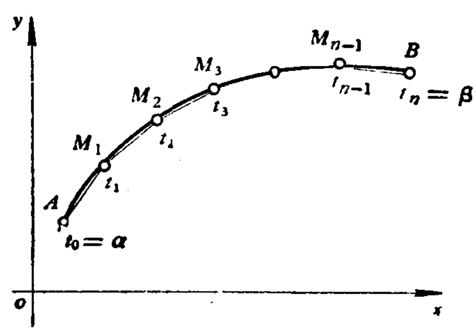

图　1

则 $M_{\nu-1}$ 与 M_ν 之間的距离等于

$$\sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}.$$

因此折綫的总长度等于

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu-1})^2 + (y_\nu - y_{\nu-1})^2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})]^2 + [\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})]^2}.$$

依定义，A，B 間的弧长 s 等于

$$s = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}.$$

由 Lagrange 公式，我們有

$$\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1})\varphi'(\tau'_\nu),$$
$$\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1})\psi'(\tau''_\nu),$$

这儿 τ'_ν，τ''_ν 都是 $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ 之間的值．所以

$$\sqrt{(\varphi(t_\nu)-\varphi(t_{\nu-1}))^2+(\psi(t_\nu)-\psi(t_{\nu-1}))^2}$$
$$= (t_\nu - t_{\nu-1})\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau''_\nu)}.$$

命

$$\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau''_\nu)} = \sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}+\eta_\nu,$$

則得

$$s = \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\{\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}+\eta_\nu\}(t_\nu - t_{\nu-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sqrt{\varphi'^2(\tau'_\nu)+\psi'^2(\tau'_\nu)}(t_\nu - t_{\nu-1}) + \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu - t_{\nu-1}).$$

前者等于

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

再証后者的极限等于 0．由不等式

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2}\right| \leqslant |b-b_1|$$

(这不等式的証明是：

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b_1^2} = \frac{b+b_1}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b_1^2}}(b-b_1))$$

可知

$$|\eta_\nu| < |\psi'(\tau''_\nu)-\psi'(\tau'_\nu)|.$$

根据 $\psi'(t)$ 的一致連續性，給了任意 $\varepsilon > 0$，可找到一个 δ，使当 $|t''-t'| < \delta$ 时

$$|\psi'(t'')-\psi'(t')| < \varepsilon.$$

卽当 $\max|t_\nu - t_{\nu-1}| < \delta$ 时，

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(t_\nu - t_{\nu-1})\right| < \varepsilon(\beta-\alpha).$$

因得所証．

A，B 两点間的弧长可由公式

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

表出来．

如果 t 是一变点，則

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

对积分的上限求微商得

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)},$$

再由

$$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt},\quad \psi'(t)=\frac{dy}{dt}$$

得出

$$ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt,\quad ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

所以求弧长的公式可以写成为

$$s=\int_{(A)}^{(B)}ds=\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2},$$

这里 (A), (B) 各表依照积分变量对应于曲綫上点 A,点 B,这积分所应当取的上下限.

特别是,如果曲綫由

$$y=f(x)$$

表示,并且 A, B 各对应于 $x=a$, $x=b$, 則弧长公式变为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

又如果是极坐标形式

$$r=f(\theta),$$

由直角坐标 x, y 与极坐标的关系

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

可得(这就可以看成为以 θ 为参变数的方程)

$$dx=\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy=\sin\theta\,dr+r\cos\theta\,d\theta,$$

及

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2\,d\theta^2,$$

所以

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(dr)^2+r^2(d\theta)^2}.$$

如果 A 与 B 各对应于角 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 的点,則极坐标所表出的弧长是

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

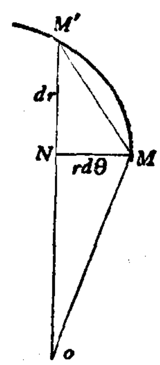

图 2

ds 的极坐标表达式也可以由图 2 得到. 当弧 MM' 非常小时,可以用 M, M' 間的弦代替这段弧. 这弦恰好是直角三角形 MNM' 的弦,而其他边各与 $rd\theta$, dr 近似相等.

注意,曲綫的长度是有方向的,如果我們假定了正向是由 A 到 B, 則由 B 到 A 的度量就是以上的长度加一負号,在用参变数表示法时,也請注意这点,要看准由 α 变到 β 是否就是 A 到 B 的方向.

例 1. 求 $(0, 0)$ 与 (a, a^2) 之間抛物綫 $y=x^2$ 的弧长 s.

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{1 + t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[2a\sqrt{1 + 4a^2} + \log\left(2a + \sqrt{1 + 4a^2}\right)\right].$$

例 2. 求对数螺綫

$$r = Ce^{a\theta}\ (C>0)$$

在 $\theta = \alpha$ 与 $\theta = \beta$ 之間的弧长,这儿 C 为常数.

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = C\sqrt{1 + a^2}\int_\alpha^\beta e^{a\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{C\sqrt{1 + a^2}}{a}\left(e^{a\beta} - e^{a\alpha}\right).$$

例 3. 設有一个半径是 a 的圓在一条直綫上滚动，这圓上一个固定点 M 的軌迹称为旋輪綫,求 M 与直綫相交的两点之間的弧长.

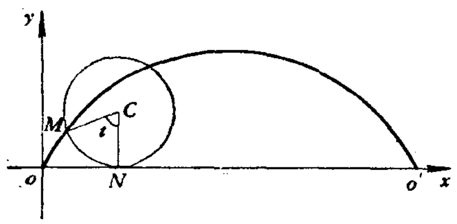

图 3

命固定直綫为 x 軸，M 与直綫两邻接的交点是 o 与 o'，圓心是 C，$\angle MCN = t$，則可知旋輪綫有如下的参数表示:

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$

故弧 $\overset{\frown}{oo'}$ 的长度为

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

習題 1. 求星形綫 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 的周长.

習題 2. 求圓的漸伸綫

$$x = a(t\sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t\cos t)$$

当 $t = 0$ 至 $t = \theta$ 时的弧长.

習題 3. 求心脏綫 $r = a\cos\theta + a$ 的周长.

習題 4. 一条有重量的鏈子,两端悬起,鏈的方程可以写为

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

求当 $x = 0$ 至 $x = b$ 之間的弧长.

§2. 面　　积

我們已經証明过在曲綫

$$y = f(x)$$

与 x 軸，$x = a$，$x = b$ 之間的面积等于

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

我們現在研究参变数表示下的情况，仍假定

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

此处的 φ 与 ψ 有連續微商．如果当 t 由 t_0 变到 t_1 时，x 是增函数，則在此曲綫与 x 軸之間，及对应于 t_0, t_1 的纵坐标之間的面积等于

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

如果我們有一条閉的曲綫 C，它是一个单圈形式的曲綫，即任一平行于 x 軸或 y 軸的直綫至多和它交于两点．假定 C 上的点可以由参变数表示，并且当 t 由 t_0 变到 t_1，P 依一定方向走完一圈．我們假定 P 取这样的走向，使当 P 按这方向沿 C 运动时，由 C 所围成的面积的点总在 P 的左边．我們現在来研究这个曲綫 C 所包的面积．

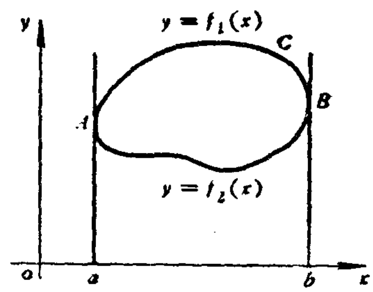

图　4

假定这曲綫在 $x = a$，$x = b$ 之間，且这两直綫与 C 有公共点，曲綫的上一部分的方程为 $y = f_1(x)$，下一部分为 $y = f_2(x)$．

不妨假定当 t 由 t_0 变为 t' 时，曲綫由 A 沿 $y = f_2(x)$ 到 B．由 t' 变为 t_1 时，曲綫由 B 沿 $y = f_1(x)$ 到 A．如此則得所求的面积是

$$\int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = -\int_{t'}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t'} \psi(t) \varphi'(t) dt = -\int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt.$$

同样可以証明，这面积也等于

$$\int_{t_0}^{t_1} x \frac{dy}{dt} dt$$

及

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt.$$

例 1.　求椭圓

$$x = a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b \frac{2t}{1 + t^2}$$

所包的面积．

当 t 由 $-\infty$ 变至 ∞ 时，图綫走了一圈，故面积为

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=ab\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=ab\operatorname{tg}^{-1}t\Big|_{-\infty}^{\infty}=ab\pi.$$

卽椭圓面积等于长半軸和短半軸的乘积的 π 倍，特别当 $a=b$ 时，便得到圓的面积。

例 2. 求 $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ 所包的面积。

$$\text{所求的面积}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t+3a\cos^2 t\sin t\cdot b\sin^3 t]dt$$

$$=\frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{3}{16}ab\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3}{8}\pi ab.$$

例 3. 求曲綫

$$x^3+y^3=3axy$$

的围綫部分的面积。

我們已知参变数表示法：

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

当 t 由 0 到 ∞ 时，沿这围綫走了一圈，所以

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{9a^2t^2dt}{(1+t^3)^2}=-\frac{3a^2}{2(1+t^3)}\Big|_0^{\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

于是面积等于 $\frac{3}{2}a^2$。

現在考虑极坐标的情况。由

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

及

$$dx=dr\cos\theta-r\sin\theta\,d\theta,\quad dy=dr\sin\theta+r\cos\theta\,d\theta$$

可知

$$\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

因此面积公式的极坐标表示法是

$$\frac{1}{2}\int r^2d\theta.$$

如果要求角 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之間曲綫 $r=r(\theta)$ 所围成的扇形面积，就是