



高等学校教学用书



复变函数论

李锐夫 程其襄编

高等教育出版社

本书是根据 1956 年 10 月中华人民共和国教育部制订的师范学院数学系复变函数论试行政学大纲编写的,原稿是编者在华东师范大学讲授复变函数论时所用的讲义。全书分十三章。前三章是准备知识。从第四章到第十章是复变函数论的基础及其应用。第十一章将有理函数的表示法推广到整函数及半纯函数,并用以处理初等超越函数。第十二章和第十三章论解析开石与多值函数,并给出代数函数的初步理论。附录 I 叙述物理应用,附录 II 介绍复变函数论发展史略。

## 复 变 函 数 论

李銳夫 程其襄編

高等教育出版社出版 北京宣武門內取燈寺 7 号  
(北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号)

上海市印刷四厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·747 开本 850×1168 1/32 印张 7 1/16  
字数 165,000 印数 1—18,000 定价 (4) 0.70

1960 年 3 月第 1 版 1960 年 3 月上海第 1 次印刷

# 目 录

第一章	复数	1
1.1.	复数	1
1.2.	复数的算术运算	1
1.3.	共轭复数, 绝对值, 不等式	5
1.4.	复数在平面上的表示	7
1.5.	复数的幅角	8
1.6.	复数的乘幂和方根	10
1.7.	复数平面上的直线和圆	11
1.8.	无穷远点	12
1.9.	复数的球面表示法	13
第二章	平面点集	17
2.1.	点集概念	17
2.2.	度量空间, 邻域	18
2.3.	极限点	19
2.4.	闭集, 开集	20
2.5.	内点, 界点, 外点	21
2.6.	区域	21
2.7.	序列	22
2.8.	致密集	23
2.9.	约当曲线	26
第三章	无穷级数	30
3.1.	上极限, 下极限	30
3.2.	序列的收敛准则	31
3.3.	无穷级数	32
3.4.	绝对收敛级数	33
3.5.	级数的运算	35

<b>第四章</b>	<b>解析函数</b> .....	<b>39</b>
4.1.	复变函数.....	39
4.2.	連續函数.....	40
4.3.	可导性.....	42
4.4.	解析函数.....	43
4.5.	由歌西-黎曼条件所得的推論.....	47
4.6.	調和函数.....	48
4.7.	单叶函数,反函数.....	49
4.8.	幂級数.....	51
4.9.	幂級数所定的函数的解析性.....	53
<b>第五章</b>	<b>初等函数</b> .....	<b>53</b>
5.1.	实变函数的推广.....	58
5.2.	有理函数.....	59
5.3.	指数函数.....	62
5.4.	三角函数.....	64
5.5.	双曲綫函数.....	65
5.6.	对数函数.....	66
5.7.	$\text{Log}(1+z)$ 的展开式.....	67
5.8.	幂函数 $z^\mu$ .....	68
5.9.	反三角函数.....	68
<b>第六章</b>	<b>保形映射,綫性变换</b> .....	<b>71</b>
6.1.	保形映射.....	71
6.2.	解析映射的保形性.....	71
6.3.	在保形映射中弧的微分关系.....	73
6.4.	例题.....	74
6.5.	保形映射的基本問題.....	78
6.6.	綫性变换.....	80
6.7.	綫性变换的不变量——四点的交比.....	81
6.8.	反演变换.....	82
6.9.	圓的綫性变换性质.....	83
6.10.	綫性变换与反演变换的关系.....	85
6.11.	綫性变换的不变点.....	87
6.12.	綫性变换的另一种形式.....	88

6.13.	黎曼定理的例子	90
<b>第七章</b>	<b>复变函数积分</b>	<b>95</b>
7.1.	圍繞	95
7.2.	积分的黎曼定义	95
7.3.	沿正则弧的积分	97
7.4.	$\left  \int_C f(z) dz \right $ 的上界	100
7.5.	歌西积分定理	100
7.6.	歌西积分定理的一般形式	102
7.7.	歌西积分定理推广到复连通区域	106
7.8.	不定积分	108
7.9.	歌西积分公式	109
7.10.	正则函数的各级导数	110
7.11.	歌西不等式	112
7.12.	里烏維尔定理	112
7.13.	代数基本定理	113
7.14.	摩勒拉 (Morera) 定理	113
<b>第八章</b>	<b>函数項級数及函数的展开</b>	<b>116</b>
8.1.	函数序列	116
8.2.	一致收敛級数	120
8.3.	泰勒展开式	123
8.4.	解析函数的零	126
8.5.	最大模定理	128
8.6.	罗朗展开式	129
<b>第九章</b>	<b>函数的奇点</b>	<b>134</b>
9.1.	孤立奇点的分类	134
9.2.	可去奇点	135
9.3.	极	135
9.4.	本性奇点	137
9.5.	零的极限点	139
9.6.	函数在无穷远点邻域内的性质	139
9.7.	有理函数的奇点	140
<b>第十章</b>	<b>殘数及其应用</b>	<b>143</b>

10.1.	残数	143
10.2.	残数定理	145
10.3.	解析函数的零的个数, 幅角原理	146
10.4.	儒歇(Rouché)定理	148
10.5.	代数基本定理	149
10.6.	圆环求积分法	149
10.7.	求 $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	150
10.8.	求 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	151
10.9.	广义积分的歌西主值	154
10.10.	求 $\int_0^{\infty} x^{a-1} f(x) dx$	156
<b>第十一章</b>	<b>整函数与半纯函数</b>	<b>160</b>
11.1.	无穷乘积	160
11.2.	整函数	165
11.3.	半纯函数	173
11.4.	半纯函数的歌西分解法	177
11.5.	$\cot \pi z$ 与 $\sin \pi z$ 的展开	179
<b>第十二章</b>	<b>解析开拓</b>	<b>182</b>
12.1.	解析开拓定义	182
12.2.	解析开拓的唯一性, 函数方程的持续原则	183
12.3.	完全解析函数	185
12.4.	解析开拓的幂级数方法	186
12.5.	单值性定理	188
<b>第十三章</b>	<b>多值函数</b>	<b>191</b>
13.1.	多值函数概念	191
13.2.	黎曼曲面概念	193
13.3.	定义于黎曼曲面上的函数	197
13.4.	代数函数	200
附录 I.	复变函数的应用	207
附录 II.	复变函数论发展史略	213
附录 III.	参考书	218

# 第一章 复数

**1.1. 复数** 在数学分析中讀者已經知道实数系統的建立方法;最初引出自然数,然后以分数 $p/q$ 作为具有順序的一对自然数,定义出其算术运算法则。十九世紀40年代,数学家汉弥尔敦(Hamilton)利用实数,依同样的方法建立复数理論的基础。

具有一定順序的一对实数 $a$ 和 $b$ 的組合叫做一个复数。設 $A$ 表这个复数,則用符号 $A=(a, b)$ 表示。当 $b=0$ 时, $(a, 0)$ 定义为实数 $a$ ,即 $(a, 0)=a$ 。因此全部实数是全部复数的一部分。

对于这样建立起来的复数,我們必須規定其运算方法。由于实数是复数的特例,規定复数算术运算的一个基本問題是要求复数运算的結果如推到实数特例时,能够和实数运算的結果相符合,同时也要求复数算术运算能够滿足实数算术运算的一般公理。

## 1.2. 复数的算术运算 1. 設

$$A=(a, b), \quad B=(c, d)$$

是任意两个复数,則当而只当

$$a=c, \quad b=d$$

时, $A$ 和 $B$ 叫做相等,写为

$$A=B。$$

如 $A=B$ ,則 $B=A$ ;若 $C$ 是另一个复数,而 $A=B$ , $B=C$ ,則 $A=C$ 。

任意两个复数間是沒有大小关系的,但如两个复数 $A$ 和 $B$ 不相等,則写为



$$A \neq B。$$

2. 所謂两个复数的結合是一种算术运算,由它可以产生第三个复数。

設  $A = (a, b), B = (c, d), C = (e, f), \dots$

为任何复数。第一种結合是  $A+B$ , 叫做  $A$  加  $B$ , 其結果命为  $(a+c, b+d)$ , 叫做  $A, B$  的和。所以

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d) \quad (1)$$

求和的方法叫做加法。

显然加法是可能且唯一的。它是适合于下列两个运算律:

I. 交換律:  $A+B=B+A$ ;

II. 締結律:  $A+(B+C)=(A+B)+C$ 。

加法的反运算叫做减法。設由  $A, B$  两个复数求另一个复数  $X = (x, y)$ , 使满足方程

$$A+X=B。$$

这个方程是相当于下列两个方程:

$$a+x=c, \quad b+y=d。$$

因此  $X$  是存在且唯一的, 其結果写为

$$X=B-A,$$

就是

$$(c, d) - (a, b) = (c-a, d-b)。 \quad (2)$$

如  $A=B$ , 則等式(2)的右端是  $(0, 0)$ , 这个数叫做零, 用符号  $0$  表示, 即  $0 = (0, 0)$ 。零在加法运算中有以下的性质:

$$A+0=0+A=A。$$

零的存在是唯一的; 因为有一个  $0$ , 且

$$A+0=A,$$

已如上面所說, 假定另有一个零  $0'$  存在, 則应有

$$A+0'=A,$$

在这两个方程中分别令  $A=0'$  和  $A=0$ , 得

$$0'+0=0' \quad \text{和} \quad 0+0'=0,$$

由加法交换律

$$0+0'=0'+0,$$

得 
$$0'=0,$$

所以只能有一个零。

对每一个复数  $A=(a, b)$  有一个而且只有一个复数  $(-a, -b)$  和它对应, 这叫做负  $A$ , 写为  $-A$ ; 就是

$$-A=(-a, -b).$$

$A$  和  $-A$  满足下列关系式:

$$A+(-A)=0=(-A)+A.$$

不难证明一个复数的负数是该数本身的必要和充分条件是该数为 0。

3. 两个复数  $A$  和  $B$  的第二种结合是  $A \cdot B$ , 或写为  $AB$ , 这叫做  $A$  乘  $B$ , 其结果命为  $(ac-bd, ad+bc)$ , 叫做  $A$  和  $B$  的积。

所以

$$(a, b)(c, d) = (ac-bd, ad+bc). \quad (3)$$

求积的方法叫做乘法。

显然乘法是适合于下列三个运算律:

- I. 交换律:  $AB=BA$ ;
- II. 结合律:  $A(BC)=(AB)C$ ;
- III. 分配律:  $(A+B)C=AC+BC$ 。

乘法的反运算叫做除法, 就是已知两个复数  $A$  和  $B$ , 求一个复数  $X=(x, y)$ , 使满足方程:

$$AX=B.$$

如  $A \neq 0$ , 除法是可能且唯一的; 因为以上方程相当于下列两个方程:

$$ax - by = c, \quad bx + ay = d.$$

这个方程组的系数行列式是  $a^2 + b^2 \neq 0$ , 所以他们对  $x, y$  有唯一的解, 就是

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

因此, 当  $A \neq 0$ , 我们用符号  $\frac{B}{A}$  代表  $X$ , 就是

$$\frac{(c, d)}{(a, b)} = \left( \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \right). \quad (4)$$

在等式(4)中当  $A = B$ , 命其结果为  $I$ , 即

$$I = (1, 0)$$

这叫做单位数或一。它在乘法运算中有以下的性质:

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

4. 由 1.1. 节, 我们定义  $(a, 0) = a$ , 它包括  $0 = (0, 0)$  和  $I = (1, 0)$ 。就复数的观点说, 我们将  $(a, 0)$  叫做复数域中的实数。设  $a = (a, 0)$ ,  $b = (b, 0)$ , 则

$$\begin{aligned} a \pm b &= (a \pm b, 0), \\ ab &= (ab, 0), \\ \frac{b}{a} &= \left( \frac{b}{a}, 0 \right) \quad a \neq 0. \end{aligned}$$

因此复数域中的实数四则运算的结果亦是复数域中的实数。所以复数域中的实数不但与实数是一一对应, 而且在四则运算上亦成同构的。

#### 5. 由乘法

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

因此复数  $(0, 1)$  和  $\sqrt{-1}$  的性质相同, 它是方程  $x^2 + 1 = 0$  的一个根。命

$$(0, 1) = i,$$

$i$  叫做虚数单位。

由于  $(0, 1)(b, 0) = (0, b)$ ,

所以  $(0, b) = ib$ 。

因  $A = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$ ,

我們將复数  $A$  写为

$$A = a + ib。$$

由以上的規定, 复数的算术运算法則和实数的算术运算法則完全一致, 只是将符号  $i$  看做一个数, 而将其平方代以  $-1$ 。

当  $A = a + ib$ ,  $a$  叫做  $A$  的实数部,  $b$  叫做  $A$  的虚数部, 写为

$$a = RA, \quad b = IA。$$

**1.3. 共軛复数, 絕對值, 不等式** 1. 設  $A = a + ib$ , 則  $a - ib$  叫做  $A$  的共軛复数。用符号  $\bar{A}$  表示, 即

$$\bar{A} = a - ib。$$

显然,  $\bar{A}$  的共軛复数是  $A$ , 所以  $\overline{\bar{A}} = A$ 。  $A$  是实数的必要与充分条件是  $A = \bar{A}$ 。

容易証明

$$\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B} \quad (1)$$

及

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}。 \quad (2)$$

若  $AC = B$ , 因  $\bar{A}\bar{C} = \bar{B}$ , 得

$$\overline{\left(\frac{B}{A}\right)} = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}。 \quad (3)$$

由此, 設  $R(A, B, C, \dots)$  表对复数  $A, B, C, \dots$  的算术运算結果, 則

$$\overline{R(A, B, C, \dots)} = R(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots)。 \quad (4)$$

作为一个应用, 若  $\zeta$  是方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5)$$

的一个根, 则  $\bar{\zeta}$  是方程

$$\bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = 0$$

的根。

特例, 若  $a_0, a_1, \dots, a_n$  是实数, 则  $\zeta$  与  $\bar{\zeta}$  都是方程 (5) 的根。所以实系数有理整方程如有复数根, 则其共轭复数亦是它的根。

2. 因  $A\bar{A} = a^2 + b^2 \geq 0$ ,  $a^2 + b^2$  不为负的平方根叫做  $A$  的绝对值, 或模, 用符号  $|A|$  表示, 即

$$|A| = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

由此

$$A\bar{A} = |A|^2. \quad (6)$$

应用等式 (6), 对任何两个复数  $A, B$

$$|AB|^2 = (AB)(\overline{AB}) = (A\bar{A})(B\bar{B}) = |A|^2 \cdot |B|^2,$$

由于绝对值不为负数, 故得

$$|AB| = |A| \cdot |B|, \quad (7)$$

这个结果可以推广到任意有限个复数乘积的绝对值。

如  $A \neq 0$ ,  $AB = C$ , 由  $B = \frac{C}{A}$ , 得

$$\left| \frac{C}{A} \right| = \frac{|C|}{|A|}. \quad (8)$$

对于复数相加的绝对值不如乘除的简单。因

$$|A+B|^2 = (A+B)(\bar{A}+\bar{B}) = A\bar{A} + (A\bar{B} + \bar{A}B) + B\bar{B},$$

故得

$$|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2R(A\bar{B}). \quad (9)$$

同样

$$|A-B|^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2R(A\bar{B}). \quad (10)$$

(9)和(10)相加, 又得

$$|A+B|^2 + |A-B|^2 = 2(|A|^2 + |B|^2). \quad (11)$$

3. 现在来导出几个重要不等式。因在复数域中没有大小的关系, 所有不等式都是关于复数的绝对值的。

首先, 由绝对值的定义

$$\begin{aligned} -|A| &\leq RA \leq |A|, \\ -|A| &\leq IA \leq |A|. \end{aligned} \quad (12)$$

将此结果应用到等式(9), 得

$$|A+B|^2 \leq (|A|+|B|)^2$$

即

$$|A+B| \leq |A|+|B|. \quad (13)$$

这叫做三角形不等式①。

$$\text{因 } |A| = |(A-B)+B| \leq |A-B|+|B|,$$

$$\text{所以 } |A-B| \geq |A|-|B|.$$

$$\text{同样理由 } |A-B| \geq |B|-|A|.$$

故得

$$|A-B| \geq ||A|-|B||. \quad (14)$$

1.4. 复数在平面上的表示 在平面上取一点  $O$  和一点  $M$ , 以  $O$  为原点, 过  $OM$  的直线为  $x$  轴,

$OM$  为单位长。于是任一复数  $a+ib$  可以这个平面上以  $a$  为横坐标,  $b$  为纵坐标的一点  $A$  来表示。反之, 对平面上任一点  $A(a, b)$ , 我们可以有一个复数  $a+ib$  和它相对应。因此全部

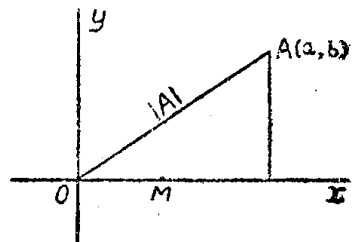


图 1.1.

复数和平面上所有的点成一一对应。 $x$  轴叫做实轴, 过  $O$  点和  $Ox$  成垂直的  $y$  轴叫做虚轴 (图 1.1)。这样规定的平面叫做复数平

① 在 1.4 节读者亦可用几何方法导出这个不等式, 并且可以了解取名为三角形不等式的原因。这里等号只当  $AB \geq 0$  时成立。

面<sup>①</sup>。

复数的这样几何表示法是有很大的优点，它可以將許多关于复数的結果直接作几何的解释。例如复数域中的实数可用  $Ox$  軸上的点来表示，两个共轭复数可以用关于  $x$  軸成对称的两点来表示，复数  $A$  的絕對值  $|A|$  表示平面上点  $A$  和原点的距离。若  $A = a + ib$ ,  $B = c + id$ , 則

$$|A - B| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

是平面上表  $A, B$  两复数的点的距离。

以上这些简单例子說明了复数的几何表示法所起的作用。函数論的許多地方是由这样的表示法和几何联系起来。函数論中关于复数的若干非常重要的基本性質如不用几何观念，則显示出非常困难。

复数的算术运算亦可用几何作图法来表示。現在先說明加和減的作图方法。

設  $A = a + ib$ ,  $B = c + id$ , 在平面上作出代表  $A, B$  的两点。作平行四边形如图所示，則点

$P$  是  $A + B$ , 点  $Q$  是  $A - B$  (图 1.2)。

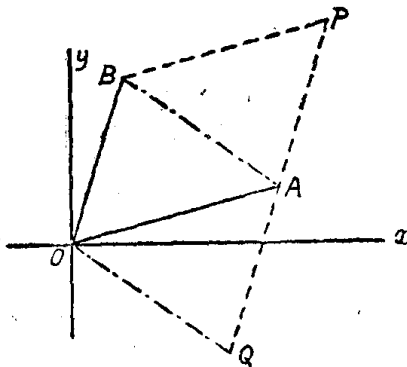


图 1.2.

1.5. 复数的幅角 1. 設  $A = a + ib$ . 由方程

$$a = |A| \cos \theta, \quad b = |A| \sin \theta$$

即

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a},$$

所定的  $\theta$  叫做复数  $A$  的幅角，写为

① 亦叫做埃根平面或高斯平面，用以紀念創始人埃根(Argand)和高斯(Gauss)。

$$\theta = \arg A.$$

由 1.4 节的图, 讀者可以了解  $\theta$  是  $OA$  和  $Ox$  所夹的角。

如  $A \neq 0$ , 則  $A$  的幅角有无穷个; 因为如  $\theta$  是  $\arg A$  的一个值, 則  $\theta + 2n\pi$  ( $n$  为整数) 亦为  $\arg A$  的值。满足

$$-\pi < \arg A \leq \pi$$

的幅角叫做主值。

如  $A=0$ , 則  $a, b$  皆为 0; 复数  $O$  的幅角是不定的。

設  $A \neq 0$ ,  $|A| = r$ , 則复数  $A$  又可写为

$$A = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

2. 設  $A_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ;

$$A_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

則由平面三角公式, 得

$$A_1 A_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)], \quad (1)$$

所以

$$\arg(A_1 A_2) = \arg A_1 + \arg A_2. \quad (2)$$

这个公式可以推广到任意有限个复数的相乘积。

注意, 公式(2)中的  $\arg A_1$  和  $\arg A_2$  是指主值而言。公式(2)是說明:  $A_1 A_2$  的一个幅角是  $A_1$  和  $A_2$  的幅角的主值的和<sup>①</sup>。其次, 由于  $0$  的幅角是沒定义, 公式(2)只当  $A_1$  和  $A_2$  都不等于  $0$  时才有意义。

在相除时, 如  $A_1 \neq 0$ , 則

$$\arg \frac{A_2}{A_1} = \arg A_2 - \arg A_1. \quad (3)$$

3. 由公式(2)和(3), 可以用

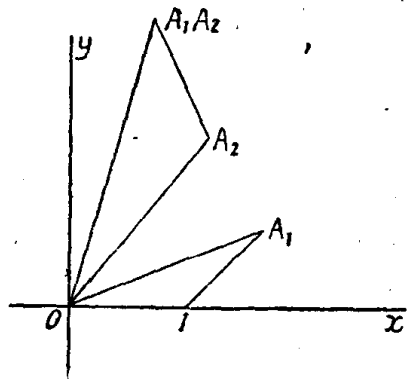


图 1.3.

①  $A_1 A_2$  有无穷个幅角, 每两个相差是  $2\pi$  的整数倍。所以一般公式应是  $\arg(A_1 A_2) = \arg A_1 + \arg A_2 + 2n\pi$ ,  $n$  是整数。



几何方法作出  $A_1A_2$  和  $\frac{A_2}{A_1}$ 。

因以  $O, 1, A_1$  为顶点的三角形和以  $O, A_2, A_1A_2$  为顶角的三角形是相似的, 所以已知  $A_1, A_2$ , 作相似三角形就可以得到代表  $A_1A_2$  的点(图 1.3)。

除法的作图是相同的, 只是相似三角形是  $O, 1, A_1$  和  $O, \frac{A_2}{A_1}, A_2$ 。

### 1.6. 复数的乘幂和方根 1. 设 $A$ 为任何不为零的复数:

$$A = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

由 1.5. 节, 当  $n$  为正整数时

$$A^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (1)$$

这个公式对  $n=0$  时亦成立。我们定义  $A^{-1} = \frac{1}{A}$ 。因

$$A^{-1} = r^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta) = r^{-1}[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)],$$

所以当  $n$  为负整数时, (1) 亦成立。

当  $r=1$ , 得到德摩(de Moivre)公式:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta. \quad (2)$$

因此,  $\cos n\theta$  和  $\sin n\theta$  可以用  $\cos \theta, \sin \theta$  表达出来。

2. 当  $A \neq 0$ , 求  $A$  的  $n$  次根是相当于解二项方程:

$$z^n = A. \quad (3)$$

令  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , 则方程式(3)化为

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (4)$$

显然  $\rho^n = r, n\varphi = \theta,$

故得  $z = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right),$

其中  $\sqrt[n]{r}$  表正数  $r$  的正  $n$  次根。

但这不是唯一的解。满足方程式(4)的幅角  $n\varphi$  可以是  $\theta$  增加