高等学校教学用書

复变函数論

李銳夫　程其襄編

高等教育出版社

本书是根据1956年10月中华人民共和国教育部頒訂的师范学院数学系复变函数論試行教学大綱編写的，原稿是編者在华东师范大学講授复变函数論时所用的講义。全书分十三章。前三章是准备知識。从第四章到第十章是复变函数論的基础及其应用。第十一章将有理函数的表示法推广到整函数及半純函数，并用以处理初等超越函数。第十二章和第十三章論解析开拓与多值函数，并給出代数函数的初步理論。附录I叙述物理应用，附录II介紹复变函数論发展史略。

复 变 函 数 論

李銳夫　程其襄編

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)
上海市印刷四厂印刷　新华书店发行

統一书号 13010·747　开本 850×1168 1/32　印張 7 1/16
字数 165,000　印数 1—18,000　定价(4)￥0.70
1960年3月第1版　1960年3月上海第1次印刷

目　　录

第一章　复数

1.1. 复数　在数学分析中讀者已經知道实数系統的建立方法；最初引出自然数，然后以分数 p/q 作为具有順序的一对自然数，定义出其算术运算法則。十九世紀 40 年代，数学家汉弥尔敦(Hamilton)利用实数，依同样的方法建立复数理論的基础。

具有一定順序的一对实数 a 和 b 的組合叫做一个复数。設 A 表这个复数，則用符号 $A=(a, b)$ 表示。当 $b=0$ 时，$(a, 0)$ 定义为实数 a，即 $(a, 0)=a$。因此全部实数是全部复数的一部分。

对于这样建立起来的复数，我們必須規定其运算方法。由于实数是复数的特例，規定复数算术运算的一个基本問題是要求复数运算的結果如推到实数特例时，能够和实数运算的結果相符合，同时也要求复数算术运算能够滿足实数算术运算的一般公理。

1.2. 复数的算术运算　1. 設

$$A=(a, b),\quad B=(c, d)$$

是任意两个复数，則当而只当

$$a=c,\quad b=d$$

时，A 和 B 叫做相等，写为

$$A=B。$$

如 $A=B$，則 $B=A$；若 C 是另一个复数，而 $A=B$，$B=C$，則 $A=C$。

任意两个复数間是沒有大小关系的，但如两个复数 A 和 B 不相等，則写为

$$A \neq B。$$

2. 所謂两个复数的結合是一种算术运算，由它可以产生第三个复数。

設 $A=(a, b), B=(c, d), C=(e, f), \cdots$

为任何复数。第一种結合是 $A+B$，叫做 A 加 B，其結果命为 $(a+c, b+d)$，叫做 A, B 的和。所以

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d) \tag{1}$$

求和的方法叫做加法。

显然加法是可能且唯一的。它是适合于下列两个运算律：

I. 交換律：$A+B=B+A$;

II. 締結律：$A+(B+C)=(A+B)+C$。

加法的反运算叫做減法。設由 A, B 两个复数求另一个复数 $X=(x, y)$，使满足方程

$$A+X=B。$$

这个方程是相当于下列两个方程：

$$a+x=c, \quad b+y=d。$$

因此 X 是存在且唯一的，其結果写为

$$X=B-A,$$

就是

$$(c, d)-(a, b)=(c-a, d-b)。 \tag{2}$$

如 $A=B$，則等式(2)的右端是 $(0, 0)$，这个数叫做零，用符号 0 表示，即 $0=(0, 0)$。零在加法运算中有以下的性質：

$$A+0=0+A=A。$$

零的存在是唯一的；因为有一个 0，且

$$A+0=A,$$

已如上面所說，假定另有一个零 $0'$ 存在，則应有

$$A+0'=A,$$

在这两个方程中分别令 $A=0'$ 和 $A=0$，得

$$0'+0=0' \quad \text{和} \quad 0+0'=0,$$

由加法交换律

$$0+0'=0'+0,$$

得
$$0'=0,$$

所以只能有一个零。

对每一个复数 $A=(a, b)$ 有一个而只有一个复数 $(-a, -b)$ 和它对应，这叫做负 A，写为 $-A$；就是

$$-A=(-a, -b)。$$

A 和 $-A$ 满足下列关系式：

$$A+(-A)=0=(-A)+A。$$

不难証明一个复数的負数是該数本身的必要和充分条件是該数为 0。

3. 两个复数 A 和 B 的第二种結合是 $A \cdot B$，或写为 AB，这叫做 A 乘 B，其結果命为 $(ac-bd, ad+bc)$，叫做 A 和 B 的积。所以

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc)。\tag{3}$$

求积的方法叫做乘法。

显然乘法是适合于下列三个运算律：

I. 交换律：$AB=BA$；

II. 締結律：$A(BC)=(AB)C$；

III. 分配律：$(A+B)C=AC+BC$。

乘法的反运算叫做除法，就是已知两个复数 A 和 B，求一个复数 $X=(x, y)$，使满足方程：

$$AX=B。$$

如 $A\neq 0$，除法是可能且唯一的；因为以上方程相当于下列两个方程：

$$ax-by=c,\quad bx+ay=d。$$

这个方程組的系数行列式是 $a^2+b^2\neq 0$，所以他們对 x, y 有唯一的解，就是

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}。$$

因此，当 $A\neq 0$，我們用符号 $\frac{B}{A}$ 代表 X，就是

$$\frac{(c,\ d)}{(a,\ b)}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\ \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)。\tag{4}$$

在等式(4)中当 $A=B$，命其結果为 I，即

$$\mathrm{I}=(1,\ 0)$$

这叫做单位数或一。它在乘法运算中有以下的性質：

$$A\cdot\mathrm{I}=\mathrm{I}\cdot A=A。$$

4. 由1.1.节，我們定义 $(a,\ 0)=a$，它包括 $0=(0,\ 0)$ 和 $\mathrm{I}=(1,\ 0)$。就复数的观点說，我們将 $(a,\ 0)$ 叫做复数域中的实数。設 $a=(a,\ 0)$，$b=(b,\ 0)$，則

$$a\pm b=(a\pm b,\ 0),$$

$$ab=(ab,\ 0),$$

$$\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a},\ 0\right)\quad a\neq 0。$$

因此复数域中的实数四則运算的結果亦是复数域中的实数。所以复数域中的实数不但与实数是一一对应，而且在四則运算上亦成同构的。

5. 由乘法

$$(0,\ 1)(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1,$$

因此复数 $(0,\ 1)$ 和 $\sqrt{-1}$ 的性質相同，它是方程 $x^2+1=0$ 的一个根。命

$$(0,\ 1)=i,$$

i 叫做虚数单位。

由于 $$(0,1)(b,0)=(0,b),$$

所以 $$(0,b)=ib。$$

因 $$A=(a,b)=(a,0)+(0,b),$$

我們将复数 A 写为

$$A=a+ib。$$

由以上的規定，复数的算术运算法則和实数的算术运算法則完全一致，只是将符号 i 看做一个数，而将其平方代以 -1。

当 $A=a+ib$，a 叫做 A 的实数部，b 叫做 A 的虛数部，写为

$$a=RA,\quad b=IA。$$

1.3. 共轭复数，絕对值，不等式 1. 設 $A=a+ib$，則 $a-ib$ 叫做 A 的共轭复数。用符号 $\bar{A}$ 表示，卽

$$\bar{A}=a-ib。$$

显然，$\bar{A}$ 的共轭复数是 A，所以 $\bar{\bar{A}}=A$。A 是实数的必要与充分条件是 $A=\bar{A}$。

容易証明

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B} \tag{1}$$

及

$$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}。 \tag{2}$$

若 $AC=B$，因 $\bar{A}\bar{C}=\bar{B}$，得

$$\overline{\left(\frac{B}{A}\right)}=\frac{\bar{B}}{\bar{A}}。 \tag{3}$$

由此，設 $R(A,B,C,\cdots)$ 表对复数 $A,B,C,\cdots$ 的算术运算結果，則

$$\overline{R(A,B,C,\cdots)}=R(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\cdots)。 \tag{4}$$

作为一个应用，若 ζ 是方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0 \tag{5}$$

的一个根，则 $\bar{\zeta}$ 是方程

$$\bar{a}_0z^n+\bar{a}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n=0$$

的根。

特例，若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是实数，则 ζ 与 $\bar{\zeta}$ 都是方程 (5) 的根。所以实系数有理整方程如有复数根，则其共軛复数亦是它的根。

2. 因 $A\bar{A}=a^2+b^2\geqslant 0$, a^2+b^2 不为負的平方根叫做 A 的絕对值，或模，用符号 $|A|$ 表示，卽

$$|A|=+\sqrt{a^2+b^2}。$$

由此

$$A\bar{A}=|A|^2。 \tag{6}$$

应用等式(6)，对任何两个复数 A, B

$$|AB|^2=(AB)(\bar{A}\bar{B})=(A\bar{A})(B\bar{B})=|A|^2\cdot|B|^2,$$

由于絕对值不为負数，故得

$$|AB|=|A|\cdot|B|, \tag{7}$$

这个結果可以推广到任意有限个复数乘积的絕对值。

如 $A\neq 0$, $AB=C$, 由 $B=\dfrac{C}{A}$, 得

$$\left|\frac{C}{A}\right|=\frac{|C|}{|A|}。 \tag{8}$$

对于复数相加的絕对值不如乘除的簡单。因

$$|A+B|^2=(A+B)(\bar{A}+\bar{B})=A\bar{A}+(A\bar{B}+\bar{A}B)+B\bar{B},$$

故得

$$|A+B|^2=|A|^2+|B|^2+2R(A\bar{B})。 \tag{9}$$

同样

$$|A-B|^2=|A|^2+|B|^2-2R(A\bar{B})。 \tag{10}$$

(9)和(10)相加，又得

$$|A+B|^2+|A-B|^2=2(|A|^2+|B|^2)。 \tag{11}$$

3. 現在来导出几个重要不等式。因在复数域中沒有大小的关系，所有不等式都是关于复数的絕对值的。

首先，由絕对值的定义

$$-|A|\leqslant RA\leqslant|A|,\quad -|A|\leqslant IA\leqslant|A|。\tag{12}$$

将此結果应用到等式(9)，得

$$|A+B|^2\leqslant(|A|+|B|)^2$$

即

$$|A+B|\leqslant|A|+|B|。\tag{13}$$

这叫做三角形不等式①。

因 $|A|=|(A-B)+B|\leqslant|A-B|+|B|$,

所以 $|A-B|\geqslant|A|-|B|$。

同样理由 $|A-B|\geqslant|B|-|A|$。

故得

$$|A-B|\geqslant||A|-|B||。\tag{14}$$

1.4. 复数在平面上的表示 在平面上取一点 O 和一点 M，以 O 为原点，过 OM 的直綫为 x 軸，OM 为单位长。于是任一复数 $a+ib$ 可以这个平面上以 a 为横坐标，b 为縱坐标的一点 A 来表示。反之，对平面上任一点 $A(a, b)$，我們可以有一个复数 $a+ib$ 和它相对应。因此全部复数和平面上所有的点成一一对应。x 軸叫做实軸，过 O 点和 Ox 成垂直的 y 軸叫做虛軸（图 1.1）。这样規定的平面叫做复数平

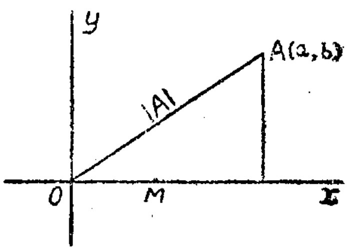

图 1.1.

① 在 1.4 节讀者亦可用几何方法导出这个不等式，并且可以了解取名为三角形不等式的原因。这里等号只当 $A\bar{B}\geqslant0$ 时成立。

面①。

复数的这样几何表示法是有很大的优点，它可以将許多关于复数的結果直接作几何的解释。例如复数域中的实数可用 Ox 軸上的点来表示，两个共軛复数可以用关于 x 軸成对称的两点来表示，复数 A 的絕对值 $|A|$ 表示平面上点 A 和原点的距离。若 $A=a+ib$，$B=c+id$，則

$$|A-B|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

是平面上表 A，B 两复数的点的距离。

以上这些簡单例子說明了复数的几何表示法所起的作用。函数論的許多地方是由这样的表示法和几何联系起来。函数論中关于复数的若干非常重要的基本性质如不用几何观念，則显示出非常困难。

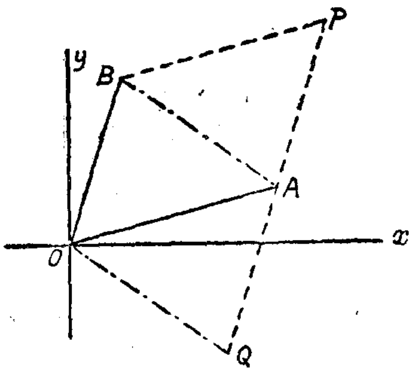

图 1.2.

复数的算术运算亦可用几何作图法来表示。現在先說明加和減的作图方法。

設 $A=a+ib$，$B=c+id$，在平面上作出代表 A，B 的两点。作平行四边形如图所示，則点 P 是 $A+B$，点 Q 是 $A-B$（图1.2）。

1.5. 复数的幅角 1. 設 $A=a+ib$。由方程

$$a=|A|\cos\theta,\quad b=|A|\sin\theta$$

即
$$\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a},$$

所定的 θ 叫做复数 A 的幅角，写为

① 亦叫做埃根平面或高斯平面，用以紀念創始人埃根(Argand)和高斯(Gauss)。

$$\theta=\arg A。$$

由1.4节的图,讀者可以了解 θ 是 OA 和 Ox 所夹的角。

如 $A\neq 0$,则 A 的幅角有无穷个;因为如 θ 是 $\arg A$ 的一个值,则 $\theta+2n\pi$ (n 为整数)亦为 $\arg A$ 的值。满足

$$-\pi<\arg A\leqslant\pi$$

的幅角叫做主值。

如 $A=0$, 则 a,b 皆为0; 复数 O 的幅角是不定的。

設 $A\neq 0$, $|A|=r$, 则复数 A 又可写为

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta)。$$

2. 設
$$A_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1);$$
$$A_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则由平面三角公式,得

$$A_1A_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)], \tag{1}$$

所以

$$\arg(A_1A_2)=\arg A_1+\arg A_2。 \tag{2}$$

这个公式可以推广到任意有限个复数的相乘积。

注意,公式(2)中的 $\arg A_1$ 和 $\arg A_2$ 是指主值而言。公式(2)是說明: A_1A_2 的一个幅角是 A_1 和 A_2 的幅角的主值的和①。其次,由于0的幅角是沒定义,公式(2)只当 A_1 和 A_2 都不等于0时才有意义。

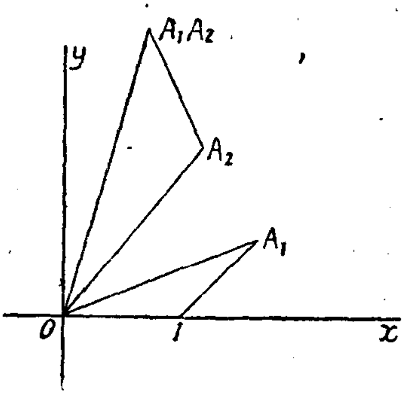

图 1.3.

在相除时,如 $A_1\neq 0$, 则

$$\arg\frac{A_2}{A_1}=\arg A_2-\arg A_1。 \tag{3}$$

3. 由公式(2)和(3),可以用

① A_1A_2 有无穷个幅角,每两个相差是 2π 的整数倍。所以一般公式应是 $\arg(A_1A_2)=\arg A_1+\arg A_2+2n\pi$, n 是整数。

几何方法作出 A_1A_2 和 $\frac{A_2}{A_1}$。

因以 $O, 1, A_1$ 为顶点的三角形和以 O, A_2, A_1A_2 为顶角的三角形是相似的，所以已知 A_1, A_2，作相似三角形就可以得到代表 A_1A_2 的点(图 1.3)。

除法的作图是相同的，只是相似三角形是 $O, 1, A_1$ 和 $O, \frac{A_2}{A_1}, A_2$。

1.6. 复数的乘幂和方根 1. 設 A 为任何不为零的复数：

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta)。$$

由 1.5. 节，当 n 为正整数时

$$A^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)。\tag{1}$$

这个公式对 $n=0$ 时亦成立。我們定义 $A^{-1}=\frac{1}{A}$。因

$$A^{-1}=r^{-1}(\cos\theta-i\sin\theta)=r^{-1}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)],$$

所以当 n 为負整数时，(1)亦成立。

当 $r=1$，得到德摩(de Moivre)公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta。\tag{2}$$

因此，$\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 可以用 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 表达出来。

2. 当 $A\neq 0$，求 A 的 n 次根是相当于解二项方程：

$$z^n=A。\tag{3}$$

令 $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，則方程式(3)化为

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)。\tag{4}$$

显然 $$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta,$$

故得 $$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 表正数 r 的正 n 次根。

但这不是唯一的解。滿足方程式(4)的幅角 $n\varphi$ 可以是 θ 增加