

光学仪器理论

第一卷

А. И. 杜德罗夫斯基

科学出版社

光学仪器理论

第一卷

A. И. 杜德羅夫斯基 著

王之江 王乃弘 袁幼心 譯

科學出版社

1958

А. И. ТУДОРОВСКИЙ
ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

I

ОБЩАЯ ЧАСТЬ

2-е издание, переработанное и дополненное

1948

內 容 提 要

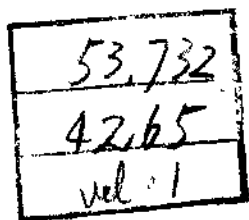
本書是蘇聯科學院通訊院士 А. И. Тудоровский 所著光學儀器理論第一卷，闡明幾何光學的普遍理論（第二卷討論具體的儀器以及光學設計方法）。本書中論述了幾何光學各基本原理間相互關係，對於用微分幾何方法討論光束以及用矢量方法討論平面反射和折射提供了很成功的範例。本書對於理論光學系統的性質——共轭成像作了詳細討論，對於實際光學系統的問題特別仔細研討了餘弦定理。關於同軸球面光學系統的三級像差理論，討論的完整是前所未有的。書中詳細地介紹了極角 (Eikonal) 理論，以極角方法再導出高斯光學以及三級像差的基本關係，表明從 Malus 原理出發來建立幾何光學理論更有系統更有成效。為完整了解光學儀器，本書對光度學和色度學和成像的輻射理論都作了全面簡要的介紹。在書末附有所涉及的俄文及西文文獻索引。從本書不但能得到光學儀器普遍理論的基礎知識，而且可以得到深入研究的門徑。

光 學 儀 器 理 論 第 一 卷

原著者 [蘇] А. И. 杜德羅夫斯基
翻譯者 王之江 王乃弘 袁幼心
出版者 科 學 出 版 社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者 中 國 科 學 院 印 刷 廠
總經售 新 華 書 店

1958年7月第一版 書號：1272
1958年7月第一次印刷 字數：634,000
(京) 華：1-943 開本：787×1092 1/16
京：1-465 印張：35 1/4 插圖：3

定價：(10) 報紙本 6.00 元
道林本 8.80 元



第二版序言

在準備第二版時，曾把本書加以修訂，部分重寫並作了較多的補充。由於內容增加，所以必須把本書分為二卷出版。

新版的第一卷是總論部分，相當於第一版的總論部分，並作了很多補充，其中最重要的列舉如下：

將光線的學說與關於法線疊和曲面法截線等的微分幾何學定義及理論放在一起論述；闡明了波面與焦面形狀間的關聯。

討論了光在不均勻媒質中的傳播問題。在討論光學成像的一般性質時，特別地注意了餘弦定理及等暈條件。

三級像差的理論得到了很大的發展。本書敘述了在像面上及出射光瞳面上的賽特係數間的關係，以及物體位置及入射光瞳的位置與這些係數的關係；對後一個關係做了詳細討論。

對於色差係數同樣地建立了這樣的關係並做了討論。

補充了討論程函的一章，在該章中研討了四級的坐標程函、什瓦爾茨希耳德程函及角度程函的基本性質；闡明了這些程函係數的意義；用程函理論導出了賽特公式及前面述及的這些係數間的關係。

物理性質方面的補充最多的是：色度學基本概念的敘述，這是為使在應用光學領域內的工作者易於找到色度學文獻的門徑。在成像的繞射理論一章內企圖以 Д. С. Рождественский 院士的觀點闡明這方面的問題。

本書附有為數不多的俄文及西文文獻索引，其中主要是幾何光學的著作，以及將本書中某些討論得不够的個別特殊問題加以更完滿敘述的論文。

全部補充的目的在於使讀者能在理論上作深入研究並熟悉本門的文獻；本書所講的基本材料之內容和性質沒有變更。

А. И. Тудоровский

目 錄

第二版序言

第一章 幾何光學的基本定律

§ 1. 光學儀器理論與幾何光學	1
§ 2. 發光點和光線	1
§ 3. 曲面的法線; 曲面的法截線及其曲率	2
§ 4. 無限細的法線束的性質; 共心光束和像散光束	5
§ 5. 法線彙	8
§ 6. 焦散線和焦散面	10
§ 7. 光的直線傳播定律	11
§ 8. 光線的獨立傳播定律	12
§ 9. 光在媒質中和媒質的分界面上通過時所發生的現象	13
§ 10. 反射和折射定律; 折射率	14
§ 11. 完全內反射(全反射)	16
§ 12. 以矢量形式表示的光的反射和折射定律	17
§ 13. 應用矢量形式的反射和折射定律的例子	20
§ 14. 在折射率連續變化的媒質中光線的傳播	23
§ 15. 馬呂斯-杜平定律	29
§ 16. 費馬原理; 程函的簡單介紹	31

第二章 光能; 光度學和色度學的基本概念

§ 17. 輻射能通量; 光通量. 照度和發光度	35
§ 18. 主體角; 它在球坐標中的表示式. 元光管; 它的反射和折射	37
§ 19. 史特洛伯耳定理	39
§ 20. 光束的亮度. 光源的亮度	41
§ 21. 點光源的發光強度; 光源周圍的照度	44
§ 22. 陸末-布洛洪光度計. 光度學的基本問題	45

§ 23.	光的單位·····	47
§ 24.	單色輻射能通量的光當量; 眼的光譜靈敏度 ·····	49
§ 25.	折射時光的反射損失·····	51
§ 26.	折射光束的亮度·····	53
§ 27.	減少玻璃表面的反射係數·····	55
§ 28.	光在媒質中的吸收損失·····	58
§ 29.	光學儀器中光損失的計算·····	59
§ 30.	複合輻射的顏色; 色的混合 ·····	63
§ 31.	色度學的三色系統, 不列顛國家物理實驗室的單位·····	65
§ 32.	色度學的基本問題·····	68
§ 33.	1931 年國際光照大會的色度學單位系統 ·····	71
§ 34.	色的量度; 色度計及其標定 ·····	73
§ 35.	白光; 色溫度 ·····	75
§ 36.	透明及不透明物體的色·····	77
§ 37.	在色度學中的幾何表示和圖解法·····	78

第 三 章 平面鏡與平面鏡系統

§ 38.	點與空間物體在平面鏡中的成像·····	79
§ 39.	平面鏡轉動時反射光線方向的變化·····	80
§ 40.	兩個平面鏡的連續反射, 偶數平面鏡的系統 ·····	82
§ 41.	矢量方程式在兩面鏡情形中的應用·····	85

第 四 章 平面和平面系統的折射

§ 42.	光線經過平面的折射·····	90
§ 43.	光線經過平行面平板的折射·····	93
§ 44.	光線在稜鏡主截面內的折射·····	95
§ 45.	在稜鏡或稜鏡系統主截面內折射光線的光路計算 ·····	100
§ 46.	羅宋-赫謝耳稜鏡對, 雙尖劈補償器·····	102
§ 47.	光線經過稜鏡主截面外的折射 ·····	104
§ 48.	具有全反射面的稜鏡; 轉向稜鏡和轉向稜鏡系統 ·····	108
§ 49.	稜鏡製造的誤差 ·····	119

§ 50. 角度準確的反射稜鏡中光路的計算	122
§ 51. 當稜鏡角有小誤差時稜鏡內光路的計算	126
§ 52. 坐標變換	133
§ 53. 當稜鏡有角誤差及位置誤差時稜鏡內光路的計算	136

第 五 章 折射時光的分解 (光的色散)

§ 54. 光的色散之基本現象;光譜	138
§ 55. 光學玻璃折射率的測量	139
§ 56. 玻璃的光學常數	142
§ 57. 消色差稜鏡. 二級光譜	145
§ 58. 光譜稜鏡	148
§ 59. 玻璃及其它透明介質的光學常數	150

第 六 章 經過球面和球面系統的折射. 球面的反射

§ 60. 球面折射時決定光路的三角公式	154
§ 61. 共心光線經過球面折射後的點像. 不暈點	155
§ 62. 在一般情況下經過球面折射後的點像. 傍軸光線;亞培“零”不變量	158
§ 63. 細光束經球面折射後的空間成像. 拉格朗日-亥姆霍茲公式	160
§ 64. 同軸球面系統;在系統軸上點的多次成像	162
§ 65. 在傍軸光線區域中公式應用的例子	165
§ 66. 元光束經球面折射時的像散. 楊氏公式	167

第 七 章 在同軸光學系統中光路的三角計算

§ 67. 光路三角計算的概述	172
§ 68. 子午面內光路之計算	173
§ 69. 在大半徑和平面的情形下子午面內光線的計算	179
§ 70. 用計算機進行傍軸光線計算的格式	182
§ 71. 按楊氏公式計算像散元光束	185
§ 72. 按克爾伯公式計算像散元光束	196
§ 73. 按朗日公式計算像散元光束	207
§ 74. 子午面外光線的計算 (空間光線計算)	212

第 八 章 理想光學系統理論

§ 75. 理想光學系統和共線成像	226
§ 76. 高斯公式的解析推導	227
§ 77. 線的或垂軸的放大率	231
§ 78. 同軸光學系統的主點和主平面; 焦距	232
§ 79. 光學系統成像的圖解法	234
§ 80. 決定光學系統共軛點位置的基本公式	235
§ 81. 拉格朗日-亥姆霍茲定理和光學系統焦距的比	236
§ 82. 角放大率和軸向放大率; 它和線放大率的關係	237
§ 83. 光學系統的分類	239
§ 84. 放大率; 折射系統的焦平面、主平面及節平面上線放大率、軸向放大率 和角放大率	242
§ 85. 實際光學系統基本常數之計算	245
§ 86. 光學系統的光焦度; 光線的會聚度、屈光度	248
§ 87. 聯合二光學系統成為具有公共對稱軸的一個光學系統	249
§ 88. 望遠鏡系統或遠焦系統	252
§ 89. 望遠鏡系統和焦距一定的系統組合	256
§ 90. 球面鏡; 厚透鏡	257
§ 91. 複合光學系統的主點; 例	261

第 九 章 光學系統中光束的限制

§ 92. 光學系統的光闌及其用途	264
§ 93. 有效光闌, 系統的入射和出射光瞳, 主光線	265
§ 94. 視場光闌, 系統的入射窗和出射窗	266
§ 95. 在某些情況下的有效光闌和視場光闌	269
§ 96. 空間在平面上的像; 主光線及兩光瞳中心之意義	274
§ 97. 投影像的比例尺寸; 消畸變條件	275
§ 98. 平面像的空間概念; 景相的變化, 望遠鏡系統的情形	276
§ 99. 空間在平面上成像的不清晰度; 像空間的深度	278
§ 100. 焦闌光路 (遠心光路)	283

§ 101. 通過光學系統及像的面元之光通量;光束的亮度和像的亮度	284
§ 102. 亞培的正弦定律	289
§ 103. 像空間的照度;入射光瞳和出射光瞳的孔徑	290
§ 104. 像在肉眼中的主觀亮度	296
§ 105. 通過儀器觀察時像的主觀亮度	297

第十章 實際光學系統所成的像和像差

§ 106. 用大光束將面元成像的實際光學系統概論	300
§ 107. 無限靠近的二條光線底光程差	300
§ 108. 餘弦定律	301
§ 109. 無限小面積的完善成像	304
§ 110. 體積元的完善成像	307
§ 111. 餘弦定律在軸對稱的光學系統中之應用	308
§ 112. 不暈成像光線的幾個性質及正弦定律的應用	312
§ 113. 測驗物鏡滿足正弦條件的亞培方法	314
§ 114. 垂直於光軸而不與軸相交的平面元的像	317
§ 115. 像差概述	318
§ 116. 軸上點的軸向球差及垂軸球差;圖示及解析公式表示	320
§ 117. 在幾種具體情形中的球差	325
§ 118. 光軸上點的波面和焦面	328
§ 119. 最小暈圓;光束具有剩餘球差時的像面	335
§ 120. 等暈成像時的餘弦定律	336
§ 121. 近軸面元之等暈成像	338
§ 122. 軸外點由細光束成像;光束的像散和像面彎曲	340
§ 123. 成像的畸變	343
§ 124. 決定空間光線折射前後位置的坐標	346
§ 125. 像差展開為級數. 賽特和什瓦爾茨希耳德公式	347
§ 126. 斜射大光束的彗差;在像面上的彌散圖形	349

第十一章 三級像差理論

§ 127. 賽特輔助傍軸光線及其幾個不變量	354
------------------------	-----

§ 128. 一些輔助公式及變換	356
§ 129. 空間光線的克爾伯不變量	362
§ 130. 二級軸向像差	365
§ 131. 三級垂軸像差	370
§ 132. 物體不在子午面內時的垂軸像差及出射光瞳面上的像差	375
§ 133. 特殊情形下的賽特公式: a) 物體在無限遠; б) 望遠鏡系統	377
§ 134. 物平面上與出射光瞳上的像差間關係	379
§ 135. 出射光瞳位置變化時三級像差之變化	381
§ 136. 物體位置變化時三級像差的變化	382
§ 137. 物面和像面不是平面時的三級像差	386
§ 138. 賽特係數 S_I	389
§ 139. 賽特係數 S_{II} ; 彗差, 不暈及等暈條件	391
§ 140. 彗差係數 S_{II} 與入射光瞳及像的位置間的關係	395
§ 141. 賽特係數 S_{III} 和 S_{IV}	399
§ 142. S_{III} 與物面及入射光瞳位置的關係	402
§ 143. 賽特係數 S_V	410
§ 144. S_V 與物體及入射光瞳位置的關係	412
§ 145. 在光學系統中三級像差獨立係數的個數; 相接合的薄透鏡系統	416
§ 145a. 總結	418

第十二章 光學系統的色像差

§ 146. 色像差概述	421
§ 147. 軸上點像的位置色差	421
§ 148. 某些情形的位置色差	424
§ 149. 放大率色差	429
§ 150. 色差係數與物平面及入射光瞳位置的關係	432
§ 151. 焦點和焦距的色差	436
§ 152. 以角量度的放大率色差	438
§ 153. 色差係數的一些性質	440
§ 154. 一些特殊情形下的放大率色差	442
§ 155. 在各種情形中光學系統消色差時光線的選擇	446

§ 156. 二級光譜. 複消色系統	448
§ 157. 光學系統像差的色差	451

第十三章 程 函

§ 158. 光程和程函	452
§ 159. 坐標程函	453
§ 160. 角度程函	454
§ 161. 混合程函	455
§ 162. 布魯恩程函概述及其級數展開式	456
§ 163. 坐標程函 E_1 的級數展開式; 高斯光學公式的推演	457
§ 164. 四級坐標程函	461
§ 165. 四級坐標程函的係數與入射光瞳位置的關係	464
§ 166. 四級程函的係數與物平面位置的關係	467
§ 167. 複合光學系統的坐標程函	470
§ 168. 一個折射球面的四級坐標程函	473
§ 169. 同軸球面系統的四級坐標程函的係數	479
§ 170. 什瓦爾茨希耳德程函	480
§ 171. 什瓦爾茨希耳德四級程函的係數	483
§ 172. 四級什瓦爾茨希耳德程函的一些性質及應用	485
§ 173. 角度程函的展開式; 它在高斯區域的應用	487
§ 174. 應用角度程函計算像差; 四級程函	489
§ 175. 由角度程函導出什瓦爾茨希耳德程函	490
§ 176. T. 史密斯的角度程函展開式	492
§ 177. 用 T. 史密斯變數時的像差; 餘弦定律	494
§ 178. 二個或二個以上的光學系統所組成複合系統的角度程函	496
§ 179. 像平面和出射光瞳上角度程函係數間的關係	498
§ 180. 角度程函係數與物平面和出射光瞳位置的關係	500
§ 181. 高級像差和 T. 史密斯的分類	503
§ 182. 對於程函的一些結論和補充	506

第十四章 成像的繞射理論

§ 183. 理想系統中發光點的成像	508
--------------------------	-----

§ 184. 在有球差的情形下光學系統軸上的點像和波面	517
§ 185. 球差與傍軸光線和邊緣光線之程差間之關係	520
§ 186. 在有球差的情形下軸上點照度的計算	523
§ 187. 在有像差的情形下光學系統軸外點的成像	524
§ 188. 光學系統對發光物體的鑑別力	528
§ 189. 光學系統對不發光物體的鑑別力	531
§ 190. 亞培的顯微鏡成像理論	537
§ 191. 顯微鏡對透明和半透明物體成像概述	541
文 獻	543
譯後記	548
內容索引	549

第一章

幾何光學的基本定律

§ 1. 光學儀器理論與幾何光學

光學儀器理論是應用物理學的一個部門，其推導和構成主要依據於幾何光學。在光學儀器理論的總論部分中，研討光學系統中成像的條件並對這些系統確立一般的原理；而在專門部分中則研討一些光學儀器的光學系統，並將幾何光學中的一般原理應用到各種光學系統的設計中去。

幾何光學中底諸概念是當我們研究光現象時，在實驗材料的基礎上所作出的抽象；幾何光學諸原理具有純粹數學的特性，這些原理的導出和幾何定理的導出相似，是基於為數不多的、極簡單的、為實驗所確立的基本定律，再用嚴格的演繹法導出的；光的物理性質如輻射能通量在這裏完全不考慮。幾何光學諸原理具有一級近似的意義，在多數情況下與所觀察的現象很相符合；從實用觀點來說，這點尤其重要，因為用考慮到繞射和干涉現象的物理光學方法，來精確地研究光學儀器中發生的現象時，在許多情況下會複雜得難以解決實際問題。

運用幾何光學的原理已完滿地解決了應用光學中問題的很大一部分，雖然，在某些情況中只有以物理光學中光的波動觀點來研討問題，才能正確解決光學儀器理論的問題。

為了完整地研討光學系統的作用，就必須注意到由光線帶進系統的能量，此時，光學儀器理論亦已超出幾何光學原理的範圍。

§ 2. 發光點和光線

幾何光學的基本概念之一——關於發光點的概念——是和物理光學中對這術語的理解不同的。從物理的觀點來說，發光點是一輻射體，其大小與其輻射能所作用的距離相比，可忽略不計；例如，對地球上的觀察者來說，體積超過太陽系的恆星仍然是發光點。在幾何光學中，把這樣微小的輻射光源視作幾何的點，既無大小亦無體積；因為這樣的點是輻射能源，故必儲存一定的能量，因此此點的能量密度為無限大；這假定與有關能量的全部物理概念相抵觸。

若在圍繞光源周圍的空間置兩個小光闕(具有圓孔的板)(圖 1)。顯然,相繼貫穿兩小孔光闕的光能都不會越出直紋曲面的範圍,該直紋曲面是由小孔的邊界線 $M_1 N_1$ 和 $M_2 N_2$ 所確定的。此直紋曲面所限圍的空間部分稱為光管;若此管的橫截面比它的長度小得很多,則稱此管為物理光線。在幾何光學中稱此光管的軸 $O_1 O_2$ 為光線,即把幾何的線——一個尺度的伸長了解為光線;若認為沿這樣的光線傳播輻射能,則此能量的體密度為無限大;顯然幾何光學的光線是不可能實際存在的。

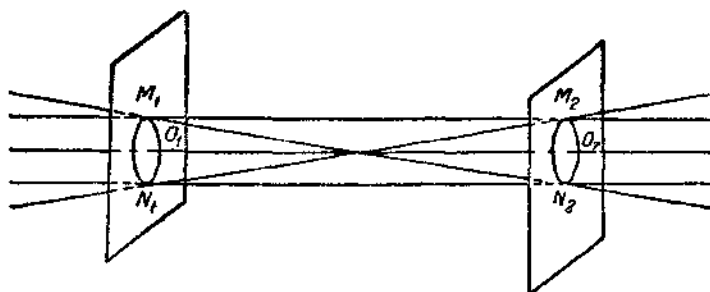


圖 1

光從某中心(點)向四周傳播的現象,從物理光學的觀點來看,是振動在周圍空間的傳播;振動的方向垂直於光的傳播方向。在某一定時刻,中心點的振動所到達的點的軌跡(或者說,具有同一振動位相的點所形成的曲面)稱為波面;輻射能在空間傳播的方向是波面上每個點的法線方向。這樣,在物理光學中的波面法線相當於幾何光學中的光線;用以確立曲面和其法線以及法截線性質的微分幾何原理,也同時確立了波面和幾何光學中光線的相應性質。

§ 3. 曲面的法線;曲面的法截線及其曲率

在笛卡兒坐標系中,曲面方程式一般可寫作:

$$f(x, y, z) = 0, \quad (3.1)$$

f 是三個坐標的函數。

在曲面上坐標為 x, y, z 的一點作法線,法線的方向餘弦用 λ, μ 及 ν 表示;若 dx, dy 及 dz 為曲面上該點的曲線弧元的投影,則

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0.$$

由方程式 (3.1) 微分得出:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

上列二方程式僅於下列情況下才能同時成立，即：

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{\mu}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{v}{\frac{\partial f}{\partial z}}; \quad (3.2)$$

再注意到

$$\lambda^2 + \mu^2 + v^2 = 1,$$

即得到所求的餘弦 λ , μ 及 v .

爲簡化公式，可假定自方程式 (3.1) 中解出 z ，即：

$$z = \varphi(x, y). \quad (3.3)$$

於是在方程式 (3.1) 中

$$f(x, y, z) = \varphi(x, y) - z = 0.$$

引用符號：

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad (3.4)$$

則方程式 (3.2) 可改寫爲：

$$\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q} = \frac{v}{-1}.$$

由此得：

$$\lambda = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}; \quad \mu = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}. \quad (3.5)$$

其中把與 z 軸成銳角的法線方向作爲正向，並以正號加在上面表示式分母中的平方根上。

通過曲面法線的任何平面都稱爲法平面；此平面與曲面的交線稱爲該點上曲面的法截線。此法截線的切線方向餘弦以字母 α, β, γ 表示。此外，補充 (3.4) 的符號而引用新符號：

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \\ s &= \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \\ t &= \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

於是，在坐標爲 x, y, z 的點上曲面的法截線曲率半徑 R 由下式決定：

$$R = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}; \quad (3.7)$$

依根值的條件,分子取正值,

若分母爲正,則 $R > 0$, 即曲線凹向 z 軸的方向。

公式(3.7)的導出及詳細情形,可參考微積分或微分幾何的教科書,如 К. А. Поссе, С. П. Фиников.

爲簡化公式且不影響討論的普遍性,可取該點的法線爲 z 軸;此時坐標面 OXY 與曲面相切。當這樣選軸時:

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad \nu = 1;$$

此外:

$$\left. \begin{aligned} p = 0, \quad q = 0, \quad \sqrt{p^2 + q^2 + 1} &= +1; \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1; \quad \gamma = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

坐標軸原點上的法截線的切線與 z 軸的夾角用 ψ 表示,則

$$\alpha^2 = \cos^2 \psi \quad \text{及} \quad \beta^2 = \sin^2 \psi.$$

於是在坐標軸原點的法截線曲率 $\frac{1}{R}$ 成爲:

$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \psi + 2s \sin \psi \cos \psi + t \sin^2 \psi. \quad (3.9)$$

法平面繞法線轉動時,法截線的曲率隨之發生變化;當 ψ 角爲下面方程式所定的 ψ_0 值時,曲率爲極值:

$$\tan 2\psi_0 = \frac{2s}{r-t}. \quad (3.10)$$

除當 $s=0$, 且同時 $r=t$ 的情形,總可以在零到 π 之間找出二個 ψ_0 值;由此二值所定的二個截線互相垂直,稱爲主截線。此二截線的曲率半徑具有極大值和極小值,並稱爲主曲率半徑。

若 $s=0$ 且 $r=t$, 則公式 (3.10) 右端成爲不定式,但由公式 (3.9) 可得:

$$R = \frac{1}{r} = \frac{1}{t},$$

即對所有的 ψ 值,亦即該點的所有法截線,具有相同的曲率半徑。這樣的點稱爲圓點;迴轉橢圓體在其轉動軸的端有二個圓點。

若取主截面爲坐標面 OXZ 及 OYZ , 則 (3.10) 中的分子爲零,即

$$s = 0, \quad (3.11)$$

且公式 (3.9) 簡化為:

$$\frac{1}{R} = r \cos^2 \psi + \epsilon \sin^2 \psi. \quad (3.12)$$

顯然, 當這樣選擇坐標面時, 主曲率半徑 R_1 和 R_2 具有下列的值:

$$R_1 = \frac{1}{r} \quad \text{及} \quad R_2 = \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.13)$$

公式 (3.9) 可改寫為:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \psi}{R_1} + \frac{\sin^2 \psi}{R_2}; \quad (3.14)$$

這就是歐拉公式.

有下列三種可能的情况:

a) 二導數 r 和 ϵ 在原點符號相同, 則主半徑和主曲率亦具有相同的符號. 若平行於被考察點上的切平面且無限接近此切平面作一平面, 與曲面相截, 其截線為無限小的橢圓. 這種點稱為橢圓點.

б) 導數 r 和 ϵ 異號; 兩主截線凹向不同的方向. 與被考察點上的切面無限接近並位於此切面兩邊的兩平面與曲面相交為無限小的共軛雙曲線. 在被考察點附近的曲面形式如鞍子; 這種點稱為雙曲線點.

в) 主半徑之一為無限大; 無限接近切平面的平面與曲面交線為二平行的直線; 這種點稱為拋物線點.

§ 4. 無限細的法線束的性質; 共心光束和像散光束

與前節一樣, 取笛卡兒坐標軸, 以被考察點為原點, 以該點法線為 z 軸, 以主截面為坐標面 OXZ 和 OYZ . 如圖 2 中, MN 為曲面元, OZ 為 O 點的法線; ZOX 為第一主截面, ZOY 為第二主截面. 下面求在曲面上無限接近原點, 坐標為 δx , δy 及 δz 的 D 點上, 法線 DE 的方程式.

由 (3.5) 可知, 此法線的方向餘弦與 p_1 , q_1 及 -1 成正比, 在僅取一級無限小時, 用馬克勞林級數求得其值為:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y = r \delta x, \\ q_1 &= q + \frac{\partial q}{\partial x} \delta x + \frac{\partial q}{\partial y} \delta y = \epsilon \delta y, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$