信号分析与相关技术

徐秉铮　欧阳景正　著

科学出版社

信号分析与相关技术

徐秉铮　欧阳景正　著

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书主要论述信号分析与相关技术问题．首先介绍信号(函数)空间的概念，以及它在信号分析中的应用，着重讨论了信号的正交展开和量化问题．然后详细讨论测量相关函数的相关器，比较了各种方案，特别对测量误差作了深入分析．最后还概括地介绍了相关技术在各个领域中的应用．

本书是一本专题论著(包括了作者在这方面的工作)，可供无线电电子学领域的科技人员参考，也可供大专院校有关专业的师生以及研究生参考．

信号分析与相关技术

徐秉铮　欧阳景正 著

责任编辑　刘兴民

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981年10月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1981年10月第一次印刷　　印张：7 3/4

印数：0001—5,650　　字数：176,000

统一书号：15031・363

本社书号：2273・15—7

定价：1.20 元

前　　言

在无线电电子学的应用中，我们常常遇到与随机信号或噪声的相关函数有关的问题．例如，进行信号分析时，我们想把随机噪声按正交函数集合 $\{\phi_m(t)\}$ 展开，并要求各系数之间互不相关，那么就需要求解下列齐次积分方程：

$$\int_a^b R_x(t,s)\phi_m(s)ds = \lambda_m\phi_m(t)$$

其中 $R_x(t,s)$ 是噪声的相关函数(设噪声的平均值为零)．又如讨论在非白噪声 $n(t)$ 背景下，确知信号 $s(t)$ 的最佳接收问题时，需要求解下列非齐次积分方程：

$$\int_a^b R_n(t,s)g(s)ds = s(t)$$

其中 $R_n(t,s)$ 是非白噪声的相关函数．因而实际测量随机信号或噪声的相关函数，有着很重要的意义．

本书前三章从人们最熟悉的谐波分析(傅里叶级数展开)的概念出发，讨论一般的信号正交展开问题，介绍信号空间的概念，说明相关函数乃是希尔伯特空间的内积．由内积可以定义范数，从而定义信号在信号空间的距离，加深对信号的几何概念的认识．

第四章分均匀量化和非均匀量化两种情形，讨论随机信号或噪声量化后的相关函数，得出正态过程经过粗分层量化后的相关函数的计算公式．从数字计算结果得到分层数目与相关函数误差的关系．

第五章和第六章讨论各种测定相关函数的方法和测量误

差．由于模拟技术有许多固有的缺点，模拟式相关器已逐渐被淘汰，所以本书未予详细讨论．这里只着重介绍一些测定相关函数的特殊方法及误差分析．这些方法大都可使相关运算中的乘法运算简化，从而使相关器的电路易于实现，而且由于这种电路比较简单，所以工作频率也可以大大提高．

本书最后一章概括地介绍了相关技术的应用．主要讨论相关技术在速度测量、微弱信号提取和振动（包括声学）测量等方面的应用．在微弱信号提取方面常用的锁相放大器和抽样积分器，实际上也是一种相关积累技术，不过本书未予讨论．

由于我们水平所限，缺点、错误在所难免，希望广大读者批评、指正。

著　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章　信号空间的概念

§1.1　概　　述

在无线电电子学的应用中，我们经常遇到两类不同的信号，一类是确定信号(实际上是理想化的信号)，这就是平常所说的正弦波、脉冲波等等，它们是时间的确定函数．另一类是随机信号，例如随机噪声，它不是时间的确定函数，它的出现遵循统计(概率)的规律．

信号除了划分为上述两大类以外，随着数字技术的发展，近代数字通信中，在时间上经常要将信号抽样，得到离散化的信号，在幅度上则要将信号分层"取整"，得到量化的信号．为了讨论各种各样的信号，我们需要有统一的工具，信号(函数)空间的概念和泛函分析的方法就是这样一种工具．

为了引入信号空间，我们来讨论三维空间的向量沿正交轴分解为分量的问题．

图 1.1 代表三维空间的直角坐标系，其中 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 代表互相正交的单位向量，即它们的长度为 1，彼此点乘积(纯量积)为 0，即

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_3^2 = 1 \tag{1.2}$$

它们可以写成 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$．单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 之间的正交性保证它们线性无关，线性无关的定义是：如果 a, b, c 有下列关系：

$$a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3 = 0 \tag{1.3}$$

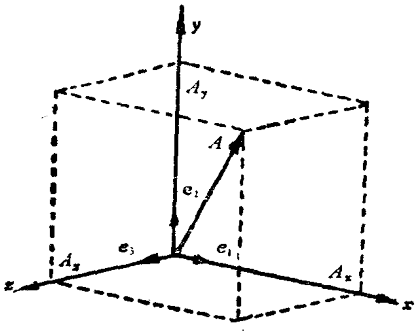

图 1.1 三维空间的直角坐标

则一定有 $a = b = c = 0$. 用 $\mathbf{e}_1$ 和式 (1.3) 作点乘,并利用式 (1.1) 可得: $a = 0$. 同理可证 $b = c = 0$.

三维空间的任一向量$\boldsymbol{A}$可以沿 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 正交展开为

$$\boldsymbol{A} = A_x\mathbf{e}_1 + A_y\mathbf{e}_2 + A_z\mathbf{e}_3 \tag{1.4}$$

如图 1.1 所示, A_x, A_y, A_z 代表向量 $\boldsymbol{A}$ 相对于 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的坐标或分量. 从上述 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ 的线性独立性,可以证明图 1 中向量 $\boldsymbol{A}$ 正交展开的唯一性.

我们可以这样证明: 假设向量 $\boldsymbol{A}$ 还可以展开为

$$\boldsymbol{A} = A'_x\mathbf{e}_1 + A'_y\mathbf{e}_2 + A'_z\mathbf{e}_3,$$

则和式 (1.4) 相减后有

$$(A_x - A'_x)\mathbf{e}_1 + (A_y - A'_y)\mathbf{e}_2 + (A_z - A'_z)\mathbf{e}_3 = 0$$

前面已证上式不可能成立,除非

$$(A_x - A'_x) = (A_y - A'_y) = (A_z - A'_z) = 0$$

即 $A_x = A'_x$, $A_y = A'_y$, $A_z = A'_z$, 亦即说明式(1.4)的展开是唯一的. 上述正交性不但向量有,函数也有,从下面的例题可以看出这一点.

例 1 正弦函数 $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cdots$, $\cos nx$, $\cdots$,和 $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\cdots$, $\sin nx$, $\cdots$,其正交性表现为下列关

系式成立：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases}\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n\end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases}\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n\end{cases} \\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

和三维空间向量相类似，正弦函数的线性独立性表现为，如果

$$a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x + \cdots = 0 \tag{1.6}$$

成立，则一定有$a = b = c = d = 0$. 假如我们要证明$d = 0$，则用 $\sin 2x$ 乘式(1.6)，然后自 $-\pi$ 至 π 进行积分，应用正交关系式(1.5)即得. 这和证明单位向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 相互独立的手续非常相象，因此，正弦函数可以作为函数空间的一种正交坐标. 如果把持续时间有限的信号(或者周期信号)$f(x)$看作函数空间的向量，则它沿正弦函数组成的正交坐标可展开为

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots$$
$$+ b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots$$

式中，a_0, a_1, a_2, $\cdots$, b_1, b_2, $\cdots$ 代表向量在正交坐标上的投影(相当于图 1 中的 A_x, A_y, A_z)，其值可以求出为

$$\left.\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

此式就是人们熟知的三角函数的傅里叶级数，式(1.7)展开的唯一性，也和向量一样可以用独立性来证明.

前面通过和三维空间类比，我们介绍了信号(函数)空间以及信号空间中正交坐标的概念. 下面我们进行更详细的讨论.

§1.2 距离空间

在讨论无线电通信系统或者自动控制系统时，我们往往不是着眼于系统对某一特定信号的反应，而是从信号的总体来考虑. 我们把具有某种共同性质的信号归为一个集合，用符号 S 来代表. 例如，正弦信号的集合 S_C，记为

$$S_C = \{x, x(t) = \mathrm{Re}[e^{\alpha+j(2\pi ft+\theta)}], \quad -\infty < t < \infty, \alpha, \theta, f \in R\} \tag{1.8}$$

式中，符号 $\alpha, \theta, f \in R$[1] 是指这些参数可以从实数集合 R 中任意选择. 这表示集合 S_C 包含振幅，相位，以及频率取所有可能值的正弦波. 又如能量有限的信号的集合 $S_E(k)$

$$S_E(k) = \left\{x, \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt \leqslant k\right\} \tag{1.9}$$

式中，k 是正实数，$S_E(k)$ 代表信号能量[把 $x(t)$ 看作加于 1Ω 电阻上的电压]受限于 k 的信号集合.

现在我们在信号集合中引入几何概念“距离”，这样得到一个抽象空间作为分析信号的基础，我们把这个空间称为距离空间.

包含许多元素(这里元素指函数)的空间 $\mathscr{X}$，如果它的每一对元素 x 和 y，可使一个非负实数 $d(x, y)$ 与之对应，并满足下列条件:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{(a)} & d(x,y) \geqslant 0, \quad \text{且} & \\
 & d(x,y) = 0, \quad \text{必须且只须 } x = y & \\
 & & \text{(恒等公理)} \\
\text{(b)} & d(x,y) = d(y,x) & \text{(对称公理)} \\
\text{(c)} & d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) & \text{(三角形公理)}
\end{array}\right\} \tag{1.10}$$

1) 符号 $f \in R$ 的意义是 f 属于集合 R.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$d(x, y)$ 称为元素 x 和 y 的距离，而上列的三个条件则称为距离公理．显然，距离公理所表达的乃是普通三维欧几里得空间的点之间距离的最一般性质．

元素的集合 $\mathscr{X}$ 加上距离 d，称为距离空间 $(\mathscr{X}, d)$．注意到，定义于同一元素集合的两种不同距离，构成两个不同的距离空间．我们现在用一些例子来说明距离的概念．

例 2 包含全体实数集合的实轴 R 是一个距离空间，它的距离由下式给出：

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in R \tag{1.11}$$

式(1.11)是实轴上通常意义下的距离．抽象距离空间所定义的距离，可看作是上述距离概念的一般化．

例 3 几个实数的有序序列的集合 R^n 可以用多种方法构成距离空间．令 $x = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$，$y = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n\}$，则下列泛函[1]可作为距离的例子：

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{a}) \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| \\ &(\mathrm{b}) \quad d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|^2\right]^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

式 (1.12 b) 距离的概念和平常三维欧几里得空间距离的概念相一致．上述距离可以直接用于 n 维复数集合 C^n ［此时 α_i, β_i 为复数，其大小表为实数部分和虚数部分平方和的平方根，即如 $\alpha = a + jb$，则 $|\alpha| = (a^2 + b^2)^{1/2}$］．这些距离的定义还可以扩展到无穷序列的情况，亦即用作集合 R^∞ 和 C^∞ 的距离．

例 4 我们现在来看看距离概念在数字通信中的一种应用．设由 n 位 0 与 1 数元组成的二元码序列(码组)，其总数

1) 从任意集合到数字集合的映射 (mapping) 称为函数，从函数集合到数字集合的映射称为泛函．

共有 2^n 个. 这 2^n 个码序列组成的集合可构成距离空间. 从中任取二个,分别记为 x 及 y. 这两个码组中第 i 位,分别记为 α_i 及 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$, 它们可任取 0 或 1 之值,其距离可定义为

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i \oplus \beta_i] \qquad (1.13)$$

式中, $\oplus$ 是"模二和", 其规则为: $1\oplus 1=0$, $0\oplus 0=0$, $1\oplus 0=1$, $0\oplus 1=1$. 式(1.13)定义的距离称为二进码的汉明距离或码距. 它代表二个码组对应位中不同码元的数目.

我们来讨论如何用距离的概念来描述编码的抗干扰性能. 假如用三位二进码组来传递消息, 总共有八个码组, 即 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 码组间的最小距离 $d_{\min}=1$. 在无噪声条件下,发送这八个码组,在接收端可以无误地收到. 但在有噪声的情况下, 当一个码组因干扰的作用而使任何一位发生错误时, 在接收端就无法辨认是否有错误. 例如发送 010, 错了一位变成 110, 接收时就会误认为发送的是 110 而被接收. 造成了错误判断. 要能发现错误必须要求码组间的最小距离 $d_{\min}=2$, 这样例中八个码组能满足 $d_{\min}=2$ 的只有四个,即 000, 011, 101, 110. 这四个码组称为许用码组,其他四个禁止使用,亦即不能发送. 这样能够发现错误但不能纠正. 例如, 000 错成 001, 在接收端收到 001 后, 与预定发送的许用码组查对, 可能认为是 000 错第三位, 或 011 错第二位,也可能是 101 错第一位,无法确定. 所以最小距离 $d_{\min}$ 必须是 3 才能纠正一个错误. $d_{\min}=3$ 的许用码组是 000, 111. 如果发送 000, 错了一位变成 001, 可以肯定有错误. 而且 001 与 000 间的距离比 001 与 111 间的距离为小. 所以 001 是 000 错一位的可能性比由 111 错二位的可能

性要大．因而可以将 001 纠正成 000． 归纳起来：

（1）发现 e 位或 e 位以下错误的充要条件是码组间的最小距离 $d_{\min} \geqslant e+1$；

（2）纠正 e 位或 e 位以下错误的充要条件是码组间的最小距离 $d_{\min} \geqslant 2e+1$.

例 5 定义于时间间隔 $T=\{t, a \leqslant t \leqslant b\}$ 的实时间函数或复时间函数的任意集合，可以和例 2 相类似定义距离：

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)} \quad d_1(x, y)=\int_T |x(t)-y(t)|\,dt \\ &\text{(b)} \quad d_2(x, y)=\left[\int_T |x(t)-y(t)|^2\,dt\right]^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

在函数空间中给出函数间距离的概念后，我们可以利用这一概念导入极限的概念，这种极限的表达形式和通常的极限很相似．

设有序列 $\{x_n;\ x_n \in \mathscr{X},\ n=1, 2, \cdots\}$． 如果对于任意的正数 ε，有正整数 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，不等式 $d(x_n, x)<\varepsilon$ 成立，称 x 是 $\{x_n\}$ 的极限，亦即 $n \to \infty$ 时，$d(x_n, x) \to 0$，平常写成 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

从直观上来看，收敛的概念有一个共性：一个序列的元素 x_n（可以代表数，向量或函数）收敛于元素 x，意思是说 x_n 无限趋近于 x，亦即当 n 无限增大时，这些元素间的“距离”就无限地减小． 因此，随着我们对 x_n 和 x 的距离的不同理解，我们可以得出不同极限的定义．

距离空间 $\mathscr{X}$ 的元素序列 $\{x_n\}$ 称为基本序列或柯西（Cauchy）序列，假如给定任意 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 n_0，使得 $m, n \geqslant n_0$ 时，有 $d(x_m, x_n)<\varepsilon$ 成立．从三角形不等式 $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x)+d(x, x_m)$ 可知，一个收敛序列必定是柯西序列．但一个柯西序列却可以不收敛，这是因为序列

所趋近的极限元素可以不在集合 $\mathscr{X}$ 内．若距离空间 $\mathscr{X}$ 的每一个基本序列都收敛于一个极限（而且是同一空间的某一个元素），我们就说空间 $\mathscr{X}$ 是完备的．

现在，我们讨论信号理论中最常用的能量有限的信号空间，亦即在勒贝格（Lebesgue）积分[1]意义下平方可积的函数空间 $L^2(T)$；$T=\{t,\ a\leqslant t\leqslant b\}$ 其中信号 $x(t)$ 设为实值时间函数，满足

$$\int_a^b x^2(t)\,dt<+\infty$$

我们就 $L^2(T)$ 空间来证明一个重要不等式，即许华兹（Schwarz）不等式．如果 $x(t)\in L^2(T)$，$y(t)\in L^2(T)$，则有

$$\left[\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right]^2\leqslant\left[\int_a^b x^2(t)\,dt\right]\left[\int_a^b y^2(t)\,dt\right]\qquad(1.15)$$

证明：设二次三项式 $\phi(u)=Au^2+2Bu+C$ 的系数 A,B,C 都是实数且 $A>0$．假如 $\phi(u)\geqslant 0$ 常成立，则必有

$$B^2\leqslant AC\qquad(1.16)$$

否则，发生矛盾：

$$\phi\left(-\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{A}(AC-B^2)<0$$

注意到这一点后，令

$$\begin{aligned}\phi(u)&=\int_a^b[ux(t)+y(t)]^2dt\\&=u^2\int_a^b x^2dt+2u\int_a^b xy\,dt+\int_a^b y^2dt\end{aligned}$$

则因 $\phi(u)\geqslant 0$，从式(1.16)可得式(1.15)．

还可以证明 $L^2(T)$ 空间是完备的[1]，即满足柯西条件的序列 $\{x_n\}$，总存在极限 $x\in\mathscr{X}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$．这

1) 勒贝格积分定义见有关参考文献，例如文献[3]的第五章．

里不再详细叙述.

建立距离空间的一个重要结果是函数连续的概念可以一般化后推广于由一个距离空间至另一个距离空间的任意映射. 令泛函数 f 代表从空间 $(\mathscr{X}, d_1)$ 到空间 $(\mathscr{Y}, d_2)$ 的映射,如果在 x_0 点有对于任意 $\varepsilon>0$, 存在有 $\delta>0$, 使得

$$d_1(x, x_0)<\delta \Rightarrow d_2(y, y_0)<\varepsilon$$

$x \in \mathscr{X}$ 和 $y \in \mathscr{Y}$ 则我们说 f 在 x_0 点连续. 这里 $y=f(x)$ 和 $y_0=f(x_0)$. 如果 f 在其空间内的每一点均连续,则称 f 是一连续映射.

为了说明连续的一般定义, 我们讨论由实时间函数空间 $L^2(T)$ 到实数空间 R 的映射. 在空间 $L^2(T)$, 定义距离

$$d_2(x, y)=\left[\int_T |x(t)-y(t)|^2\, dt\right]^{1/2}$$

在空间 R 定义距离 $d(x, y)=|x-y|$. 泛函定义为

$$f_\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi(t)\, dt$$

对于任意 x_0 有

$$\begin{aligned} d\{f_\varphi(x), f_\varphi(x_0)\} &= |f_\varphi(x)-f_\varphi(x_0)| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\{x(t)-x_0(t)\}\varphi(t)\, dt\right| \end{aligned} \tag{1.17}$$

应用许华兹不等式(1.15)有

$$\begin{aligned} &\left|\int_{-\infty}^{\infty}\{x(t)-x_0(t)\}\varphi(t)\, dt\right| \\ &\leqslant \left[\int_{-\infty}^{\infty}\{x(t)-x_0(t)\}^2 dt\right]^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)\, dt\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{1.18}$$

如果 φ 是平方可积的话,即

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)\, dt\right]^{1/2}<K$$

其中,K 是正实数,那么,如果

$$d_2(x, x_0) < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$$

则

$$|f_\varphi(x) - f_\varphi(x_0)| < Kd_2(x, x_0) < \varepsilon \qquad (1.19)$$

因而 f_φ 是一个连续的泛函数.

距离空间除了前述的完备性外，还要讨论它的可分性和列紧性. 这些性质使我们可以了解含有无穷多个元素的距离空间的复杂程度. 如果对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以在空间 $\mathscr{X}$ 中找到可列[1]个元素的序列 $\{x_1, x_2, \cdots\}$，使得对于某些 i 和任意的 $x \in \mathscr{X}$，有 $d(x, x_i) < \varepsilon$，则称距离空间 $(\mathscr{X}, d)$ 是可分的. 如果可以在 $\mathscr{X}$ 中找到有限的序列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n(\varepsilon)}\}$ 使得对于某些 i，$1 \leqslant i \leqslant n(\varepsilon)$ 和任意 $x \in \mathscr{X}$，有 $d(x, x_i) < \varepsilon$，则称距离空间 $(\mathscr{X}, d)$ 为列紧的. 因而不妨想象：列紧的空间可以用有限个半径为 ε 的圆球来覆盖它，而可分的空间则更大些，但至少可用可列个圆球来覆盖它.

§1.3 线性(向量)空间

§1.1 中我们提到三维向量空间，现在我们推广这一空间概念，在函数集合中引入简单的代数结构，称之为线性(向量)空间. 如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是线性空间的任意两元素(向量或函数)，α，β 为任意实数或复数，则有加法与数乘法运算：$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ 与 $\alpha\boldsymbol{x}$，这些运算满足平常向量运算所遵守的规律：

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (加法交换律)；

(2) $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ (加法结合律)；

(3) 有零元素(或零向量) $\boldsymbol{0}$ 存在，使对于每一个 $\boldsymbol{x}$ 满足

1) 无穷多个元素如果可以照次序一个个地排列，则称为可列，否则为不可列. 例如，(0, 1)区间内有理数为可列，无理数为不可列.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com