高等学校教学用书

分析力学講义

FENXI LIXUE JIANGYI

Ф. Р. 甘特馬赫著
钟奉俄　薛問西譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

分析力学讲义

FENXI LIXUE JIANGYI

Φ. Р. 甘特馬赫著
钟奉俄　薛問西譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国家物理数学书籍出版社（Физматгиз）出版的甘特馬赫（Ф. Р. Гантмахер）著“分析力学讲义”（Лекции по аналитической механике）一书 1960 年版譯出的。书中介紹了分析力学的研究方法和分析力学在李亚普諾夫稳定性理論、振动理論、剛体动力学等方面的应用。除振动理論的古典方法外，还闡述了現代頻率法的基础。也对于把分析力学方法推广到电的和机电的系統中所用的机电模拟进行了討論。

本书为讀者学习狹义相对論、量子力学和理論物理的其它部分打下足够深入的基础，并詳尽地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变換和哈密頓-雅科毕方程。

本书可供綜合性大学数学力学系和物理系学生、研究生閱讀。也可以供工程研究人員和其他专家閱讀，以扩大并加深他們的力学知識。

分析力学讲义

Ф. Р. 甘特馬赫著

钟奉俄　薛問西譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

民族印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 K13010·1090　开本 850×1168 1/32　印张 8 6/16

字数 202,000　印数 0,001-5,500　定价（6）¥0.80

1963年6月第1版　1963年6月北京第1次印刷

序

"分析力学"一詞，在力学著述中幷无統一涵义。有的作者把分析力学和理論力学看作是等同的①。另一些人认为，以广义坐标叙述力学理論是分析力学的主要标志。本书作者所持的第三种观点则是：分析力学的特征旣表現在叙述的体系方面，也表現在所探討的問題的范圍方面。

以普遍原理（微分的或积分的）为基础，用分析的方法来导出运动基本微分方程，这就是分析力学叙述体系的特征。闡述力学的普遍原理、由这些原理导出基本运动微分方程，幷研究这些方程本身及其积分方法——所有这些就构成分析力学的基本內容。

在綜合性大学及师范学院的数学力学系、物理系及工程物理系的教学大綱里，分析力学是理論力学課程的一部分。而在工科大学的理論力学教学大綱中，或者根本沒有分析力学，或者仅有它的一部分。按照傳統方式分为"静力学"、"运动学"和"质点及系統的动力学"，而讲授的理論力学教程对于解决現代技术所提出的各种問題是很不够的。在現代技术各領域工作的研究工程师們，对于分析力学的一般方法是应該掌握的，因为这些方法不仅对于研究那些屬于純力学現象的复杂問題，而且也对于研究那些屬于电学現象和机电現象的复杂問題，給出了一个通用的分析工具。

本书幷不企图将分析力学的全部內容包括无遺。本书系根据作者近六年来，在莫斯科物理技术学院对二年級第二学期学生的讲課內容写成的。这种情况也就决定了本书的取材及其讲述特点。

---

① 例如，Г.К. Суслов 及 Ш.Ж. Валле Пуссен 的名著"理論力学教程"曾被作者自己称为"分析力学教程"。

分析力学課程是学习量子力学、狭义相对論及广义相对論等若干理論物理章节的基础。因此，书中詳細地闡述了力学的变分原理和积分不变量、正則变換、哈密頓-雅科毕方程以及具有循环坐标的系統（二、三、四、七諸章）。在引入了 A. 龐伽雷及 Э. 卡当的思想之后，作者即以力学积分不变量作为叙述所讲材料的基础。积分不变量在这里幷非理論上的装飾，而是工具。

非自由系統的討論与技术应用有关。第一章中仔細地研究了这类系統。从这一章讲机电模拟的一节可以看出将力学的分析方法推广用于电学系統和机电系統的可能性。五、六两章讲述了分析力学在李亚普諾夫稳定性理論及振动理論方面的应用。除綫性振动理論的古典問題而外，还讲到了近代頻率法的基础。有关剛体动力学的若干問題是分散在几个例子中讲的。

本书設想讀者已經具有理論力学及高等数学的一般基础知識。本书供綜合性大学数学力学系、物理系及工程物理系学生及研究生之用，也可以供那些希望扩充幷加深自己在力学方面的知識的工程研究人員及其他专家們閱讀。

目　录

第一章　任意质点系統的运动微分方程

§1. 自由系統和非自由系統·約束及其分类

我們来研究质点系統 $P_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 相对于某惯性坐标系統(伽利略系統)的运动。系統各个质点的位置和速度受有几何学的或运动学的限制，这种限制称之为約束。具有这种約束的系統称为非自由系統，以别于沒有这种約束的自由系統。

約束可以用方程

$$f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)=0^{①} \tag{1}$$

解析地表示。它的左端包含有时間 t 以及系統所有各质点 P_ν 的矢徑 $\boldsymbol{r}_\nu$ 和速度 $\boldsymbol{v}_\nu=\dot{\boldsymbol{r}}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$。在約束方程 (1) 中不包含速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 的特别情形的約束便称之为有限約束或几何約束。它的解析表达式可以写作

$$f(t,\boldsymbol{r}_\nu)=0. \tag{2}$$

在一般情况下，約束(1)称为微分約束或运动約束。今后我們仅限于討論这样的微分約束：在它的方程中，速度是綫性地出現的，即

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu+D=0. \tag{3}$$

---

① 字母上加一点（如 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$）表示对应的量对时間的导数。所有矢徑都是由固定在給定坐标系中的同一极点引出。往后，我們将以 $f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)$ 表示函数 $f(t,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_N)$ 的縮写。这种縮写方式将在全书中采用。如果 x_ν,y_ν,z_ν 是点 $P_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 在所討論的坐标系中的笛卡尔坐标，則函数 f 可以看作 $6N+1$ 个純量 $t,x_\nu,y_\nu,z_\nu,\dot{x}_\nu,\dot{y}_\nu,\dot{z}_\nu$ $(\nu=1,\cdots,N)$ 的函数。对于函数 f 以及今后在本书中遇到的所有函数，在沒有預先申明时，我們都假定这些函数及其导数是連續的。

式中 $\boldsymbol{l}_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 是矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$ 的数积，而矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ 和純量 D 則是变量 t 和全体 $\boldsymbol{r}_\mu$ 的已知函数($\mu, \nu=1, \cdots, N$)。同时我們还假設全体矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ 不同时为零。

当有形式(2)的有限約束存在时，在每一給定时刻，系統就不能够占据空間的任意位置。有限約束在系統于时刻 t 的可能位置上加上了一定的限制。当仅有微分約束存在时，系統于任一时刻 t 可以占有空間的任意位置。但在这位置上，系統各点的速度却不能是任意的。微分約束給这些速度加上了一定的限制。

由每个形式如(2)的有限約束都可以导出一个微分約束，它的方程可由等式(2)經逐項微分而得到：

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{4}$$

式中$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}=\mathrm{grad}_\nu f\ (\nu=1, \cdots, N)$①。这样的微分約束称为可积微分約束，因为它和有限約束

$$f(t, \boldsymbol{r}_\nu)=c \tag{5}$$

是等价的。这里 c 是任意常数。

注意，在笛卡尔直角坐标中，約束方程(1)—(4)可以写成如下形式：

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu)=0, \tag{1'}$$

$$f(t, x_\nu, y_\nu, z_\nu)=0, \tag{2'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}(A_\nu\dot{x}_\nu+B_\nu\dot{y}_\nu+C_\nu\dot{z}_\nu)+D=0②, \tag{3'}$$

---

① 若 $\boldsymbol{r}_\nu=x_\nu\boldsymbol{i}+y_\nu\boldsymbol{j}+z_\nu\boldsymbol{k}$，其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是正交坐标軸的单位矢量，則

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}=\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\boldsymbol{k}\quad(\nu=1, \cdots, N).$$

② $A_\nu, B_\nu, C_\nu(\nu=1, \cdots, N)$都是 $t, x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N$ 的数量函数。

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial f}{\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial f}{\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0. \tag{4'}$$

在有限約束方程 (2) 或(2′)中，如果不明显地包含时間 t，即 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，則这种約束称为平稳的。此时，微分約束方程 (4)的左端，对速度而言，是綫性齐次的。与此相仿，如果方程(3)的 $D=0$，而且矢量 $\boldsymbol{l}_\nu$ [相应地，(3′) 的系数 A_ν, B_ν, C_ν]不明显地依賴于时間 t，則微分約束(3)或(3′) 称为平稳的。

如果沒有不可积微分約束加于质点系統的各点，則这种系統称为完整系統。因此，自由的质点系統以及具有有限約束或可积微分約束的非自由系統都是完整系統。完整系統所具有的一切約束都可以写成有限形式。

当有不可积微分約束存在时，系統称为非完整系統[①]。

仅仅具有平稳約束的系統称为平稳系統。有非平稳約束的系統称为非平稳系統。

例題 1. 质点只可以沿着曲面运动，曲面方程为

$$f(\boldsymbol{r})=0 \tag{6}$$

或

$$f(x, y, z)=0. \tag{6'}$$

这是有限的平稳約束。

如果曲面本身在运动或变形，那么，在曲面方程中将显含时間 t：

$$f(t, \boldsymbol{r})=0 \tag{7}$$

或

$$f(t, x, y, z)=0. \tag{7'}$$

在这种情况下，約束是有限的但非平稳的。

2. 由长度为 l 的剛性杆联結着的二质点。在这种情况下，約束方程为

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2-l^2=0 \tag{8}$$

---

① 不可积微分約束往往又称为非完整約束，而可积微分約束有时又称为半完整約束。

或

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-l^2=0. \tag{8'}$$

这是完整的平稳系統。

应当注意，刚体可以看作质点間距离不变的系統，即具有形式(8)的約束。从这种观点出发，自由剛体乃是非自由的、完整的平稳质点系統的特殊情況。

3. 由变长度 $l=f(t)$ 的杆联結着的二质点。約束方程可以写作：

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2-f^2(t)=0 \tag{9}$$

或

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-f^2(t)=0. \tag{9'}$$

这是完整的非平稳系統。

4. 平面上二质点由一长度为 l 的剛性杆联結，运动中杆的中点速度只可以沿着杆向(冰刀在平面上的运动)。約束方程可以写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned} &z_1=0,\quad z_2=0,\\ &(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-l^2=0,\\ &\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{x_1-x_2}=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{y_1-y_2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

这是非完整系統，因为(10)中最后一个方程決定一个不可积的微分約束。

形式如(1)的約束称为固执約束。在力学中还会遇到一种非固执約束，它可以用如下形式的不等式来表示：

$$f(t,\boldsymbol{r}_\nu,\dot{\boldsymbol{r}}_\nu)\geqslant 0. \tag{11}$$

例如由长度为 l 的綫所联結的二质点。这时的約束可以用下列不等式来表示：

$$l^2-(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)^2\geqslant 0. \tag{12}$$

在方程(11)中，如果等号成立，我們就說約束是張紧的。

当有非固执約束存在时，系統的运动可以分段考虑：在約束是張紧的一段上，系統的运动和在固执約束情况下一样，而在約束是非張紧的一段上，則和沒有約束的情况一样。因此，在各个阶段上，非固执約束或者可代之以固执約束，或者可以完全解除。有鉴于此，今后我們将仅討論固执約束。

§2. 可能位移和虛位移·理想約束

設在质点系統上加有 d 个有限約束

$$f_{\alpha}(t, \boldsymbol{r}_{\nu})=0 \quad (\alpha=1, \cdots, d) \tag{1}$$

和 g 个微分約束①

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} \boldsymbol{v}_{\nu}+D_{\beta}=0 \quad (\beta=1, \cdots, g). \tag{2}$$

現在將有限約束代之以其微分形式

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}} \boldsymbol{v}_{\nu}+\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}=0 \quad (\alpha=1, \cdots, d). \tag{3}$$

若矢量組 $\boldsymbol{v}_{\nu}$ 滿足 $d+g$ 个綫性方程(2)和(3), 則矢量組 $\boldsymbol{v}_{\nu}$ 称为瞬时 t 系統在其可能位置的可能速度。

因此，可能速度是約束所容許的速度。对于系統在时刻 t 的每一可能位置, 都存在无数組可能速度, 而系統在时刻 t 作实际运动时, 这无数組速度中仅有一組被实現。

我們將无限小位移

$$d\boldsymbol{r}_{\nu}=\boldsymbol{v}_{\nu} dt \quad (\nu=1, \cdots, N) \tag{4}$$

叫做可能的无限小位移或簡称为可能位移, 其中 $\boldsymbol{v}_{\nu}$ $(\nu=1, \cdots, N)$ 是可能速度。將方程(2)和(3)逐項乘以 dt 就得到决定可能位移的方程:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{r}_{\nu}} d\boldsymbol{r}_{\nu}+\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt=0 \quad (\alpha=1, \cdots, d), \\ &\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{l}_{\beta\nu} d\boldsymbol{r}_{\nu}+D_{\beta} dt=0 \quad (\beta=1, \cdots, g). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

取系統在同一时刻、同一位置的两組可能位移

① 在微分約束方程中, 我們將 $\dot{\boldsymbol{r}}_{\nu}$ 写成 $\boldsymbol{v}_{\nu}$。

$$d\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{v}_\nu dt,\quad d'\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{v}'_\nu dt\ \ (\nu=1,\cdots,N).$$

$d\boldsymbol{r}_\nu$ 和 $d'\boldsymbol{r}_\nu$ 同样都满足方程(5)，但差

$$\delta\boldsymbol{r}_\nu=d'\boldsymbol{r}_\nu-d\boldsymbol{r}_\nu\ \ (\nu=1,\cdots,N)\tag{6}$$

却满足齐次关系式:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\boldsymbol{r}_\nu}\delta\boldsymbol{r}_\nu=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d),\\&\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\delta\boldsymbol{r}_\nu=0\ \ (\beta=1,\cdots,g).\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

差 $\delta\boldsymbol{r}_\nu=d'\boldsymbol{r}_\nu-d\boldsymbol{r}_\nu$ 称为虚位移。满足方程(7)的任意一組矢量 $\delta\boldsymbol{r}_\nu$ 都是一組虚位移。关于虚位移的方程(7)和确定可能位移的方程(5)之間的差别仅在于方程(7)沒有$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$ 及 $D_\beta dt$ 两項。因此可以說，当約束被“凝固”时，虚位移与可能位移是一样的。

事实上，当約束被“凝固”时，出現在有限約束中的时間 t 就被固定了，也就是說，約束将保持它在时刻 t 的形状不变。因此，在求函数 f_α 的微分时就不出現$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt$ 这一項，因之，(5)式的头 d 个方程就和(7)式中的头 d 个一样。对于微分約束而言，“凝固”就意味着使之具有平稳的特征，即丢掉約束方程左端中的 D_β 并使显含在系数 $\boldsymbol{l}_{\beta\nu}$ 中的 t 固定不变。这样一来，方程(5)中的后 g 个方程就和(7)中对应的方程完全相同。

我們也可以这样說：虚位移乃是系統各质点从系統在时刻 t 的某一可能位置到系統在同一时刻 t 可能占有的另一无限临近位置的位移。

在平稳約束情况下，虚位移与可能位移一致。

例題 1. 点沿固定曲面运动(图1)。

在这种情况下，从点 P 所引出的、在該点与曲面相切的任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 都是可能速度。对应的可能位移 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt$ 則位于曲面在点 P 的切平面內。二切

綫矢量之差 $\delta \boldsymbol{r}=d'\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r}$ 也是与曲面在同一点相切的矢量。因此，由点 P 所作的位于切平面内的任何矢量既可以看作是某一个 $d\boldsymbol{r}$ 也可以看作是某一个 $\delta\boldsymbol{r}$。在这个例子中，約束是平稳的，因之，虚位移和可能位移一致。

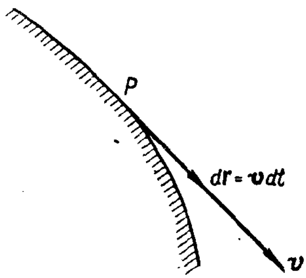

图 1.

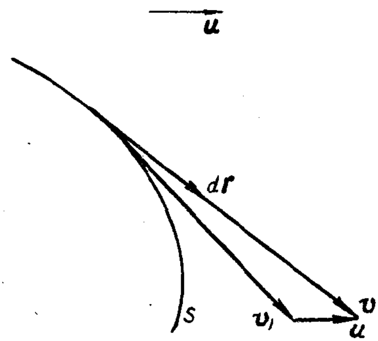

图 2.

2. 作为約束的曲面 S 以速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于原来坐标系(像剛体一样地)运动(图 2)。

此时，可能速度 $\boldsymbol{v}$ 可由与曲面相切的任一矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 同曲面自身的速度 $\boldsymbol{u}$ 之和得出:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}.$$

因此，

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\,dt=\boldsymbol{v}_1\,dt+\boldsymbol{u}\,dt.$$

与此相仿，对于另一个可能位移则有

$$d'\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}'_1\,dt+\boldsymbol{u}\,dt.$$

因而，虚位移

$$\delta\boldsymbol{r}=d'\boldsymbol{r}-d\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{v}'_1-\boldsymbol{v}_1)dt$$

和 $d\boldsymbol{r}$ 不同，它是位于过 P 点的切平面上的矢量 (图 3)。矢量 $\delta\boldsymbol{r}$ 是当曲面 S 不动时的可能位移。

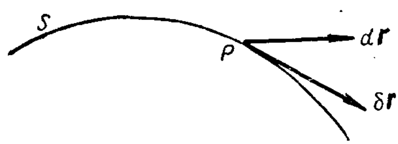

图 3.

在笛卡尔坐标中，$\delta\boldsymbol{r}_\nu$ 可用它沿坐标軸的三个投影 δx_ν，δy_ν，$\delta z_\nu(\nu=1, \cdots, N)$ 来表示，因而，确定虚位移的方程(7)可以写成如下形式:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0\ \ (\alpha=1,\cdots,d),\\&\sum_{\nu=1}^{N}(A_{\beta\nu}\delta x_\nu+B_{\beta\nu}\delta y_\nu+C_{\beta\nu}\delta z_\nu)=0\ \ (\beta=1,\cdots,g).\end{aligned}\right\}\qquad(7')$$

如果这 $d+g$ 个方程是独立的，则 $3N$ 个坐标虚增量 $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ 中将有 $n=3N-d-g$ 个是独立的。数 n 称为质点系統的自由度。

設在系統各质点 P_ν 上分别作用有力 $\boldsymbol{F}_\nu(\nu=1, \cdots, N)$[①]。如果沒有約束，則按牛頓第二定律，质量 m_ν、加速度 $\boldsymbol{w}_\nu$ 和力 $\boldsymbol{F}_\nu$ 之間有 $m_\nu\boldsymbol{w}_\nu=\boldsymbol{F}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$ 的关系。在有約束存在的情况下，加速度 $\boldsymbol{w}_\nu=\dfrac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$（在給定的时刻 t 和系統各质点的給定位置 $\boldsymbol{r}_\nu$ 和速度 $\boldsymbol{v}_\nu$ 之下）可能和約束不一致。事实上，将等式(3)和(2)对时間逐項微分便得到約束加在系統各质点加速度 $\boldsymbol{w}_\nu$ 上的限制的解析表达式[②]：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\boldsymbol{w}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\right)\boldsymbol{v}_\nu+\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0\quad(\alpha=1,\cdots,d),\\&\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{l}_{\beta\nu}\boldsymbol{w}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{d\boldsymbol{l}_{\beta\nu}}{dt}\boldsymbol{v}_\nu+\frac{dD_\beta}{dt}=0\ \ (\beta=1,\cdots,g).\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

加速度 $\boldsymbol{w}_\nu=\dfrac{1}{m_\nu}\boldsymbol{F}_\nu$ 可能不满足这些关系。因此，实际存在的約束将在系統的质点 P_ν 上作用以附加的力 $\boldsymbol{R}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$；这些由約束产生的作用力称之为約束反力[③]。所产生的反力应当使由

---

① $\boldsymbol{F}_\nu$ 应理解为直接作用在质点 P_ν 上的一切力的合力($\nu=1,\cdots,N$)。

② (8)式左端綫性地依賴于加速度 $\boldsymbol{w}_\nu$。不难看出，这些左端部分在微分之后仍然依賴于 $t, \boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu(\nu=1,\cdots,N)$。

③ 当有若干个約束存在 $(d+g>1)$时，$\boldsymbol{R}_\nu$ 就是作用在点 P_ν 上的全体約束反力的合力($\nu=1,\cdots,N$)。

方程

$$m_\nu \boldsymbol{w}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \boldsymbol{R}_\nu \quad (\nu=1, \cdots, N) \tag{9}$$

所确定的加速度为約束所容許。

为了和反力 $\boldsymbol{R}_\nu(\nu=1, \cdots, N)$ 相区别，我們将預先給定的力 $\boldsymbol{F}_\nu(\nu=1, \cdots, N)$ 称为主动力。主动力通常是时間和系統各质点位置和速度的已知函数①.

$$\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu) \quad (\nu=1, \cdots, N) \tag{10}$$

非自由系統动力学的基本問題如下:

設主动力 $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_\mu, \boldsymbol{v}_\mu)$ 是已知的，系統各质点的一組为約束所容許的初始位置 $\boldsymbol{r}_\nu^0$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}_\nu^0$ 也是已知的($\nu=1, \cdots, N$)。求系統的运动和約束反力 $\boldsymbol{R}_\nu(\nu=1, \cdots, N)$②。

如果除方程(1)、(2)而外，关于約束的特征一无所知，因而，关于这些約束所产生的反力 $\boldsymbol{R}_\nu$ 我們也就一无所知，則前述問題将无法确定。因为在这种情况下，需要确定的未知数 $x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$ 多于現有的方程 $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}, m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}, m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$ 和約束方程(1)、(2)($6N > 3N + d + g$)。

为使动力学基本問題成为能够确定的，对未知量就还需要有 $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$ 个补充的独立关系式。若仅限于討論理想約束这一重要类型，这些关系式是可以得到的。

若約束反力在任何虛位移上所作功的总和等于零，即

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0, \tag{11}$$

則这种約束就称为理想約束。式(11)还可以写成如下的展开形式:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (R_{\nu x} \delta x_\nu + R_{\nu y} \delta y_\nu + R_{\nu z} \delta z_\nu) = 0. \tag{11'}$$

---

① 在一般情况下，(10)式右端除 t 而外还依賴于所有的 $\boldsymbol{r}_\mu$ 和 $\boldsymbol{v}_\mu(\mu=1, \cdots, N)$。

② 对于自由系統，无需确定反力而仅需确定系統的运动。

在 $3N$ 个量 $\delta x_\nu, \delta y_\nu, \delta z_\nu$ 中有 n 个是独立的($n=3N-d-g$ 是系統的自由度数)。因此，在(11′)式中可以将 $3N-n$ 个不独立的增量 δx_ν, δy_ν, δz_ν 通过 n 个独立的增量表出。令这些独立增量的系数等于零，就得到所短少的 n 个关系式。有了这些关系式非自由系統的动力学基本問題就成为确定的了。

在討論了下面几个理想約束的例子之后，就可以見出引入理想約束的必然性及其在实踐上的重要性是很显然的。

例題 1. 质点沿固定光滑曲面运动(图 4)。

在这种情况下，任何可能位移 $d\boldsymbol{r}$ 和任何虛位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 都位于曲面过 P 点的切平面上，而光滑曲面的反力則沿曲面过 P 点的法綫方向；因此，恒有

$$\boldsymbol{R}d\boldsymbol{r}=0 \text{ 或 } \boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{r}=0.$$

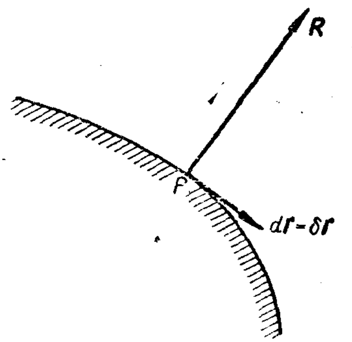

图 4.

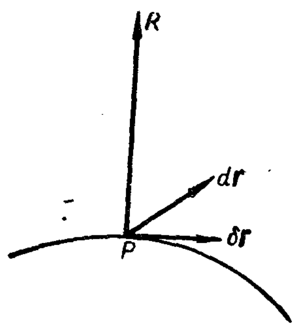

图 5.

2. 质点沿运动着的或形状变化着的光滑曲面运动(图 5)。

在这种情况下，质点的可能速度不再位于切平面上，因而无限小位移 $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}dt$ 也不在切平面上(見第 7 頁例 2)。但虛位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 乃是当曲面"被阻止不动"或"被凝固不变"时的可能位移，因而仍在切平面內。又由于光滑曲面在运动和变形的情况下反力还是沿曲面的法綫方向，所以 $\boldsymbol{R}\delta\boldsymbol{r}=0$(但 $\boldsymbol{R}d\boldsymbol{r}\neq 0$)。

因此，光滑曲面，无論它是固定的，还是运动的，还是变形的，都是理想約束。

例 2 很清楚地說明了在定义非平稳的理想約束时，为什么必