离散数学及其应用

刘 玮 编著

煤炭工业出版社

离散数学及其应用

刘　玮　编著

煤　炭　工　业　出　版　社

图书在版编目（CIP）数据

离散数学及其应用/刘玮编著．－北京：煤炭工业出版社，1996

ISBN 7-5020-1430-6

Ⅰ．离…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．离散数学　Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 15358 号

离散数学及其应用

刘　玮　编著

责任编辑：黄　朝　阳

*

煤炭工业出版社　出版

（北京安定门外和平里北街 21 号）

北京房山宏伟印刷厂　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本 850×1168mm 1/32　印张 9¼

字数 241 千字　　印数 1－1，270

1997 年 3 月第 1 版　　1997 年 3 月第 1 次印刷

书号 4199　　定价 26.00 元

内 容 提 要

本书介绍了离散数学的基础内容，包括：集合、图、树、二元关系、函数、代数系统、群环和域、数理逻辑等八章，并给出了常用的概念和定理，列举出许多与计算机科学和工程有关的例题和算法，每个例题都有详细的分析和解答，算法配有思路和流程图。全书内容深入浅出，通俗易懂。本书适合于计算机及有关专业的院校师生参考，也可供广大从事计算机研究和应用的有关人员阅读。

前　　言

由于计算机科学的迅速发展和计算机应用的日趋广泛，计算机理论的研究也不断加深。数学作为研究计算机科学的工具，其中很重要的一环是关于离散量的问题，人们把计算机科学中所涉及到的关于离散量的数学问题综合在一起，进行系统的、全面的讨论，便形成了离散数学。它是研究计算机科学的基础，同时也为其提供了有力的工具。

离散数学作为数学工具，对计算机的发展、计算机科学的研究起着重大的作用。在计算机发展初期，利用布尔代数理论研究开关电路，从而建立了一门完整的数字逻辑理论，对计算机的逻辑设计起了很大的作用。在近期，利用谓词演算研究程序正确性问题；利用代数结构研究编码理论等等。目前，离散数学在计算机研究中的作用越来越大，计算机科学中普遍地采用离散数学中的一些基本概念、基本思想、基本方法，使得计算机科学日趋完善与成熟。

离散数学是数学上的一个分支，它以离散量作为研究的主要对象，使得它与数学中的数学分析在研究对象上形成了鲜明的差别，数学分析是以连续量作为其研究对象的。

离散数学由多个分支组成，它们从不同的角度去研究各种离散量的结构和相互关系，它们互相补充、互相促进、互相渗透，逐渐形成了一门具有一定共性的学科。它们包括：集合论、图论、代数系统、数理逻辑等。

离散数学及其应用一书是作者近年来在讲授多遍离散数学课程的基础上，博采众长，并根据自己教学和应用的心得体会整理而成的，它可供学习离散数学的读者学习，也可供从事计算机工作的有关人员参考。作者在编写过程中尽量做到内容深入浅出，

文字通俗易懂，避免了重述教科书上对定理的详细证明，把注意力放在对概念和定理的理解上，为此书中给出了足够数量的有代表性的例题，每个例题都有详细的分析和解答，除此之外，全书还配备了许多算法，使得全书内容简明实用。

本书的编写，得到了山西矿业学院计算机工程系张雯教授、陈俊杰副教授、李东生副教授以及北京工业大学计算机工程系宗大华教授的关怀、指导和帮助，在此表示诚挚的感谢。由于作者水平所限，书中难免出现错误和不足之处，恳请读者指正。

目　　录

第一章 集　　合

集合的概念是一般数学及离散数学中的基本概念，大多数数学家相信所有数学用集合论语言表达是可能的。集合的概念也是计算机科学中常用的基本概念，集合论能够直接应用到计算机科学的各个部分中去，如程序语言、数据结构等。

第一节　集合及有关概念

一、集合

集合是数学中的一个基本概念，通常当讨论或研究某些对象时，把这些对象的全体称为**集合**，而把集合中的对象称为该集合中的**元素**。由有限个元素组成的集合称为**有限集**，由无限个元素组成的集合称为**无限集**。

例如：

（1）某个学校的学生是一个集合，是有限集。

（2）全体偶数是一个集合，是无限集。

（3）中国所有的城市可看成一个有限集。

（4）26 个英文字母可组成一个集合，每个字母是该集合的元素。

（5）一个计算机内存的全体单元构成一个集合，每个存储单元是该集合的元素。

通常用大写英文字母表示集合，用小写英文字母表示集合中的元素。

若 a 是集合 A 的元素，记作 $a \in A$，并读作“a 属于 A”或“A 包含元素 a”。

若 a 不是集合 A 的元素，记作 $a \notin A$，读作“a 不属于 A”或“A 不包含元素 a”。

二、集合的表示方法

1. 列举法

把集合中的元素全部或部分地列举出来。

例如，小于 8 的正偶数这个集合的元素是 2、4、6，如果把这个集合命名为 A，可记为 $A=\{2, 4, 6\}$

又例如，$B=\{a, b, c, d\}$

$C=\{x, y, z\}$

$D=\{3, 5, 7; 9, 11\}$

有些集合的元素只能列出一部分，而其余部分可以从已知元素的前后关系中得出。例如，$A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 100\}$ 表示从 1 到 100 的整数集合。又例如，$E=\{\cdots\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\cdots\}$ 表示偶数集合。

列举表示法简单且直观。

2. 描述法

用一个集合中元素的共同性质来刻划这个集合。

书写形式是：$A=\{x \mid x$ 具有的性质$\}$，

其中 x 表示集合 A 中的元素。

例如，$I=\{n \mid n$ 是整数$\}$ 表示全体整数构成的集合。

又例如，$A=\{a \mid a$ 是奇数且 $1 \leqslant a < 100\}$ 表示小于 100 的正奇数构成的集合。

描述表示法的优点有三：简单；严格；便于对集合进行运算和推理。原则上任何集合都可以用此方法来描述。

下面是几种常见集合的表示符号：

N　自然数集合；

Z　非负整数集合；

I　整数集合；

Q　有理数集合；

R　实数集合；

P　素数集合；

$N_m(m \geqslant 1)$介于 0 和m之间的自然数集合$\{0,1,2,\cdots\cdots,m-1\}$。

第二节　集合间的关系

一、集合的相等

定义 1.1　如果集合 A 与集合 B 所有元素相同，则称这两个集合是相等的。也就是说 A 与 B 是同一个集合，记为 $A=B$。

例 1，设 A、B、C、D、E 为五个集合，它们分别是：

$A=\{3, 2, 1, 1\}$　　　$B=\{1, 2, 3\}$

$C=\{1, 2, 3, 2\}$　　　$D=\{0, 1, 2\}$

$E=\{0, 1, 2, 1\}$

根据集合相等的定义，可知：$D=E$，$A=B=C$。

从此简单的例子中，可以得到以下几点结论：

1）集合与元素的顺序无关。

2）集合中重复的元素只作为一个元素。

二、子集和真子集

定义 1.2　设 A 和 B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作"A 包含于 B 中"或"B 包含 A"。

若 $A\subseteq B$，但 $A\neq B$，即 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"B 真包含 A"。

例 2，设 A、B、C、D 为四个集合，它们分别是：

$A=\{1, 2, 3\}$　　　$B=\{1, 2, 3, 5, 7\}$

$C=\{a, b, \{c\}\}$　　　$D=\{a, \{c\}, d, b\}$

根据子集的定义可知：

$A\subseteq A$，因为 A 中元素都是 A 的元素

$A\subseteq B$，因为 $\{1, 2, 3\}\subseteq\{1, 2, 3, 5, 7\}$

$C\subseteq D$，因为 $\{a, b, \{c\}\}\subseteq\{a, \{c\}, d, b\}$

三、空集与全集

元素个数为零的集合称为**空集**，记作 ϕ。例如，"缺席今天会议的人"构成集合 A，而今天全体人员均出席会议，则 A 为

空集，表示为 $A=\phi$。

与空集相对应的是全集。一个集合，如果它能包括我们所考虑的范围之内的所有元素，则称此集合为**全集**，记为 E。例如，如果所讨论的问题只限于实数范围内，则可将全体实数看作是全集；如果所讨论的集合其元素都是英文字母，则 26 个英文字母就是全集。

例 3，若把自然数看成全集，即 $E=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$ 那么下列集合

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$$
$$B=\{11, 13, 15, 17, 19\}$$
$$C=\{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$$

都是全集 E 的子集。

四、定理

1. 对于两个集合 A 和 B，$A=B$ 的充分必要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。

2. 对于任意集合 A，有 $A\subseteq A$。

3. 对于任意集合 A、B、C，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

4. 对于任意集合 A，有 $\phi\subseteq A\subseteq E$。

5. 空集是唯一的。

上述定理由集合、子集合、空集和全集的定义可直接证出。

例 4，考虑下列集合：ϕ，$A=\{1\}$，$B=\{1, 3\}$，$C=\{1, 5, 9\}$，$D=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$，$E=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，用 $\subseteq$ 或 $\nsubseteq$ 联结以下各对集合：

(1) ϕ，A　　　　(2) A，B

(3) C，D　　　　(4) D，E

解：由子集的定义，对于任意集合 X 和 Y，如果 X 的所有元素都是 Y 的元素，那么 $X\subseteq Y$，否则 $X\nsubseteq Y$；又有 $\phi\subseteq$ 任意集合，可知

(1) $\phi\subseteq A$，因为 ϕ 是任意集合的子集。

(2) $A \subseteq B$，因为 A 的唯一元素 $1 \in B$。

(3) $C \nsubseteq D$，因为 $9 \in C$，但 $9 \notin D$。

(4) $D \nsubseteq E$，因为 $2 \in D$，但 $2 \notin E$。

例 5，列出集合 A 与 B 的全部子集合，$A = \{p, q\}$，$B = \{\{q\}\}$。

解：根据空集和子集的定义可知，任意非空集合 A 至少有两个子集，A 和 ϕ。此外，A 的每个元素确定 A 的一个子集。这样，集合 $A = \{p, q\}$ 有 4 个不同的子集：$\{p, q\}$，$\{p\}$，$\{q\}$，ϕ。

集合 $B = \{\{q\}\}$ 有 2 个不同的子集：$\{\{q\}\}$，ϕ。

注意：$\{q\} \in \{\{q\}\}$，但 $\{q\} \nsubseteq \{\{q\}\}$。

第三节　集合的运算

集合上的运算是用给定的集合去指定新的集合。我们假定所有的集合都是由全集 E 的元素构造的。

一、集合的并、交、差、补运算

1. 并

两个集合 A 和 B 的并，是由属于集合 A 或者属于集合 B 的所有元素组成的集合，记为 $A \cup B$。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$

例如，$A = \{a, b\}$，$B = \{b, c\}$，则 $A \cup B = \{a, b, c\}$。

2. 交

两个集合 A 和 B 的交，是由同时属于集合 A 和集合 B 的元素组成的集合，记为 $A \cap B$。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

例如，$A = \{a, b\}$，$B = \{b, c\}$，则 $A \cap B = \{b\}$。

3. 差

两个集合 A 和 B 的差，是由属于集合 A 而不属于集合 B 的元素组成的集合，记为 $A - B$。

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 并且 } x\notin B\}$$

例如，$A=\{a, b\}$，$B=\{b, c\}$，则 $A-B=\{a\}$，$B-A=\{c\}$。

4. 补

全集 E 与集合 A 的差 $E-A$ 称为 A 的补集，记为 $\overline{A}$。

$$\overline{A}=E-A=\{x \mid x\in E \text{ 并且 } x\notin A\}$$

例如，设 $E=\{a, b, c, \cdots\cdots, y, z\}$，$A=\{a, b\}$，则 $\overline{A}=\{c, d, \cdots\cdots, y, z\}$。

5. 对称差

两个集合 A 和 B 的对称差，是由属于集合 A 但不属于集合 B，或者属于集合 B 但不属于集合 A 的元素组成的集合，记为 $A\oplus B$。

$$A\oplus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\text{，或者 } x\in B \text{ 且 } x\notin A\}$$

例如，$A=\{a, b\}$，$B=\{b, c\}$，则 $A\oplus B=\{a, c\}$。

6. 文氏图

利用平面上的点集作为一个集合的表示方法。

设 A、B、C 是任意集合：

交集 $A\cap B$、交集 $A\cap B\cap C$ 的文氏图如图 1-1 所示。

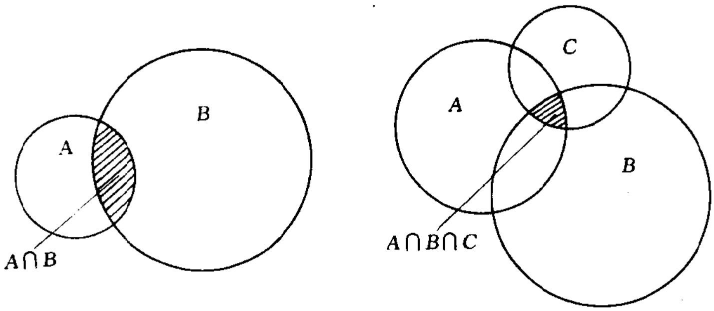

图 1-1　交集的文氏图

并集 $A\cup B$、并集 $A\cup B\cup C$ 的文氏图如图 1-2 所示。

差集 $A-B$、差集 $A-B-C$ 的文氏图如图 1-3 所示。

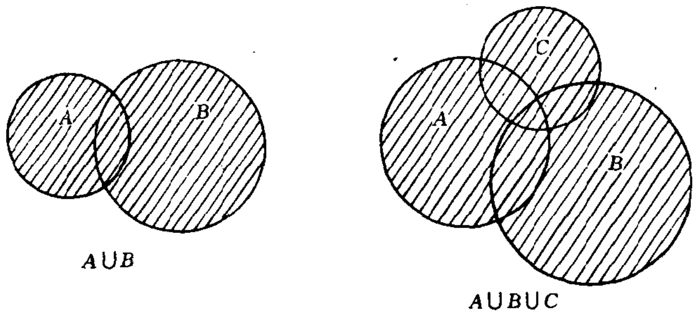

图 1－2　并集的文氏图

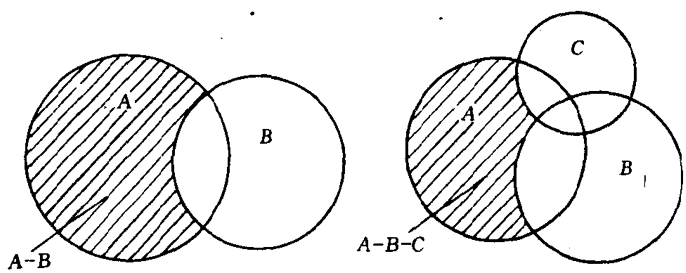

图 1－3　差集的文氏图

补集 $E-A$ 的文氏图如图 1－4 所示。

对称差 $A \oplus B$ 的文氏图如图 1－5 所示。

二、集合运算的基本定律

1. 等幂律　$A \cup A = A$，$A \cap A = A$
2. 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

　　$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. 交换律　$A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$
4. 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

　　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

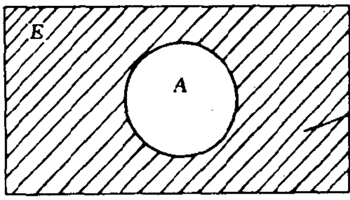

图1－4　补集的文氏图

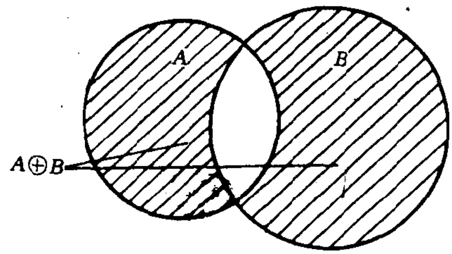

图1－5　对称差的文氏图

5. 同一律　　$A\cup\phi=A$，$A\cap E=A$

6. 零一律　　$A\cup E=E$，$A\cap\phi=\phi$

7. 补余律　　$A\cup\overline{A}=E$，$A\cap\overline{A}=\phi$，$\overline{\phi}=E$，$\overline{E}=\phi$

8. 双重补律　　$\overline{(\overline{A})}=A$

9. 吸收律　　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$

10. 德·摩根律　　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对上述定律有些可以直接从定义得到证明，有些可以利用其它基本定律得到证明。

例如，对于吸收律，有

$$\begin{aligned}A\cup(A\cap B)&=(A\cap E)\cup(A\cap B) && \text{由同一律}\\&=A\cap(E\cup B) && \text{由分配律}\\&=A\cap E && \text{由零一律}\\&=A && \text{由同一律}\end{aligned}$$

例6，证明对任意集合 A、B，都有

(1) $A-B=A-(A\cap B)$

(2) $A-(A-B)=A\cap B$

(3) $A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cup B)$

证： (1) 此题可以从对任意元素的属于关系出发进行推演。对于任意元素 x，有

$$x\in A-B$$

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \notin B$ 由差的定义

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \notin A \cap B$ 由交的定义

$\Longrightarrow x \in A - (A \cap B)$ 由差的定义

由子集的定义可知 $A - B \subseteq A - (A \cap B)$

$x \in A - (A \cap B)$

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \notin A \cap B$ 由差的定义

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \in \overline{A \cap B}$ 由补的定义

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ 由德·摩根律

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $(x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B})$ 由并的定义

$\Longrightarrow (x \in A$ 且 $x \in \overline{A})$

或 $(x \in A$ 且 $x \in \overline{B})$

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \in \overline{B}$

$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \notin B$ 由补的定义

$\Longrightarrow x \in A - B$ 由差的定义

于是有 $A - (A \cap B) \subseteq A - B$

因此 $A - B = A - (A \cap B)$

(2) $A - (A - B)$ 由 $P - Q$

$= A - (A \cap \overline{B})$ $= \{x \mid x \in P$ 且 $x \notin Q\}$

$= A \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$ $= \{x \mid x \in P$ 且 $x \in \overline{Q}\}$

$= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})$ $= P \cap \overline{Q}$

$= A \cap (\overline{A} \cup B)$ 由双重补律

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ 由分配律

$= \phi \cup (A \cap B)$ 由补余律

$= A \cap B$ 由同一律

因此 $A - (A - B) = A \cap B$

(3) $A \cup B$

$= (A \cup B) \cap E$ 由零一律

$= (A \cup B) \cap ((\overline{A \cap B}) \cup (A \cap B))$ 由补余律

$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cap B)$ 由德·摩根律

$= ((A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup ((A \cup B) \cap (A \cap B))$