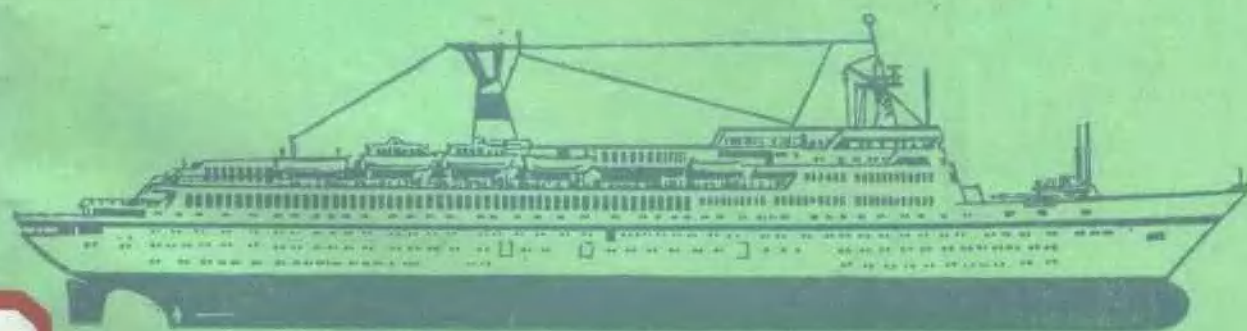


· 普通高等教育船舶类规划教材 ·

船舶与海洋结构运动的随机理论

黄祥鹿 编著



上海交通大学出版社

380030

船舶与海洋结构运动的随机理论

黄祥鹿 编著



上海交通大学出版社

(沪)新登字 205 号

内 容 提 要

本书介绍在船舶与海洋工程结构运动问题中,随机问题的处理方法。特别着重于非线性响应的统计分析问题。包括二阶响应的统计分析,和随机平均法的应用等当前较新的理论应用和发展。本书可供船舶及海洋工程有关专业的研究人员,和高等院校本科及研究生参考。也可供有关应用力学研究人员参考。

责任编辑 程锡林
封面设计 郁 萌



船舶与海洋结构运动的随机理论

出版: 上海交通大学出版社

(上海市华山路 1954 号 邮政编码: 200030)

发行: 新华书店上海发行所

印刷: 上海长城绘图印刷厂

开本: 787×1092(毫米) 1/16

印张: 8 字数: 189000

版次: 1994 年 10 月 第 1 版

印次: 1994 年 10 月 第 1 次

印数: 1—500

科目: 332—287

ISBN 7-313-01360-4/U·039

定 价: 4.90 元

出版说明

根据国务院国发(1978)23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司负责全国高等学校船舶类专业教材编审、出版的组织工作。

为了做好这一工作，中国船舶工业总公司相应地成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”、“水中兵器”五个教材小组，聘请了有关院校的教授、专家60余人参加工作。船舶类专业教材委员会(小组)是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的专家组织，其任务是做好高等学校船舶类专业教材的编审工作，为提高教材质量而努力。

在总结前三轮教材编审、出版工作的基础上，根据国家教委对“八·五”规划教材要“抓好重点教材，全面提高质量，适当发展品种，力争系统配套，完善管理体制，加强组织领导”的要求，船舶总公司于1991年又制定了《1991—1995年全国高等学校船舶类专业规划教材选题》。列入规划的选题共107种。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会(小组)评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会(小组)复审，然后分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及有关高等学校的出版社出版。

为了不断地提高教材质量，希望使用教材的单位和广大师生提出宝贵意见。

中国船舶工业总公司教材编审室

1994年5月

前 言

本书是作者在上海交通大学对船舶流体力学专业研究生讲课时的讲稿，曾在校内使用过多次。这次为了出版又作了部分修改和补充。船舶和海洋结构在波浪上的运动问题，包含了两个重要的部分。一是它的力学方面，即应用力学原理研究计算船舶的运动问题。另一方面，则是由于海洋波浪的随机性所带来的随机问题。第一个问题，目前已有不少的著作出版。但是后者则比较缺乏。特别是作为研究生和专门科研工作者的参考书目前还未见到。因此，出版一本这方面的书，作为研究生和高年级学生的参考，是很必要的。

船舶耐波性中的随机理论，从 50 年代开始发展以来，近 40 年来有了很大的发展。特别是其中的非线性理论，虽然难点较多，但也已有不少的成功尝试。而非线性问题，由于它在工程设计问题中的重要地位，一直受到人们的重视，此外，海洋工程的开发目前日益向深海发展。在设计上对经济性和可靠性提出了更高的要求。这就促使人们对非线性以及随之而来的非高斯问题的重视。因此，这将在船舶，特别是浮式海洋结构的运动问题研究中的一个很重要课题。而有关这方面近代国内外的研究，也已积累了相当的成果。本书的目的是将这些发展介绍给读者，作为进行这方面研究的一个参考和借鉴。

由于本书的目的是介绍当前的一些最新发展，因此主要的篇幅是在最后四章中。但为了理论的完整，仍旧包含了部分线性理论基础。但在编写组织上，力求简洁。限于本人水平，书中错误和不妥之处在所难免。

全书承徐德嘉教授主审。徐教授在审阅中提出了许多极为宝贵的意见，并指出原稿中的一些错误，使作者得益非浅。在此致以衷心的感谢。顾解仲同志也帮助审阅了手稿也在此表示感谢。

编 著 者

1994 年 2 月

目 录

第 1 章 概述	1
1.1 船舶及海洋工程结构物运动的随机性及其处理的基本方法	1
1.2 船舶及海洋结构物运动中的非线性问题	1
1.3 高斯随机过程	2
1.4 随机过程的分解	7
第 2 章 随机波浪理论	10
2.1 波浪理论基础	10
2.2 随机波浪的自相关函数及波能谱	14
2.3 波浪要素的统计分布	14
2.4 波谱的测量	19
第 3 章 船舶与海洋结构在随机波浪上运动的线性理论	26
3.1 船舶及海洋结构物运动响应的随机时域模型	26
3.2 线性系统随机响应的矩方程法	32
3.3 线性系统的频率域方程	34
第 4 章 非线性波浪理论	36
4.1 非线性与非高斯过程	36
4.2 非线性随机波浪理论	36
4.3 非线性波的谱表示·双谱函数	38
4.4 非线性波的概率分布	41
4.5 Stokes 有限振幅波的概率分布	42
4.6 非线性波浪要素的统计分布	45
第 5 章 非线性系统随机响应	48
5.1 非线性动力系统的一般介绍	48
5.2 非线性微分方程的近似解法	50
5.3 非线性系统随机响应的近似解法	56
第 6 章 二阶系统响应理论	62
6.1 二阶系统的概念及其在船舶与海洋工程中的应用	62
6.2 浮式结构在波浪上的二阶慢漂力及其数学模型	65
6.3 二阶系统对随机波浪响应的统计平均值	68
6.4 二阶核函数或二阶频率响应函数的测量	70
6.5 二阶系统在正态随机波作用下的响应的概率分布 (Kac,Siegrt) 理论	74
6.6 慢漂问题的处理	79
6.7 二阶系统响应的极值问题	82
6.8 系泊结构在波浪上的慢漂振荡	83
第 7 章 随机平均法及其在非线性和响应问题中的应用	86
7.1 概述	86
7.2 马尔科夫过程及随机微分方程	86
7.3 扩散过程与 Fokker-Planck 方程	89
7.4 Fokker-Planck 方程的解	91
7.5 首次通过时间问题	94
7.6 用马尔科夫过程代替某一实际过程·随机平均法初释	95
7.7 随机平均法在船舶与海洋结构物运动问题上的应用	106

第 1 章 概 述

1.1 船舶及海洋工程结构物运动的随机性及其处理的基本方法

海洋环境条件, 其中特别是波浪, 其最显著的特点就是随机性。即使形状很规则的在实验室生成的波列, 也很难找到其中每一个波形完全相似的。实际上, 在自然界中, 波浪的出现是无法准确预测的。因此, 它是很典型的随机事件。只有应用研究随机现象的方法, 即概率论的方法进行研究。由随机海浪所诱发的船舶及海洋结构物(浮式)的运动, 必然也具有随机的特点。研究这一随机的船舶运动响应, 预测船舶或浮式海洋结构物在给定的随机波上的运动, 或是更广的要求预测该结构在整个使用寿命内可能遭遇到的最严重海况及其在这一海况下的运动极限, 对于船舶及海洋结构的设计是十分有用的资料。

关于船舶在波浪上的运动, 特别是在随机波浪上的运动问题, 是船舶耐波性研究的主题。早在 30 多年前, 在造船学者首次将随机过程的理论方法引入船舶运动的研究以后, 已经有不少有关的专著发表, 这方面比较著名的有: Vossers, Korvin-Kroukovsky, 越智和夫等人的著作。但是他们有一个特点, 即到目前为止所收集的材料还只限于线性理论。这当然也和本学科的发展情况有关。在近 30 年来, 虽然在船舶运动的随机理论的应用推广方面有了很大的成绩, 但是基本理论本身进展缓慢。所研究的课题, 大多限于微幅理论的范围。本课程的目的意图克服这一缺点, 介绍一些近代开始发展起来的非线性理论方法, 特别是与浮式结构运动有密切关系的二阶系统方法。因此, 在本书中将尽可能的简化一些大家所熟知的线性理论内容, 以节省篇幅。

1.2 船舶及海洋结构物运动中的非线性问题

在船舶运动问题中, 一般为了求解问题方便, 总是假定船舶运动是微幅的。这样, 可以认为在运动幅值范围内, 所有流体动力, 复原力以及波浪力等均是运动参数的线性函数, 从而组成的运动控制方程为一线性方程

$$m_i \ddot{x}_i + v_i \dot{x}_i + C_i x_i = F_i \sin \omega_i t \quad (1.2.1)$$

式中:

m_i —— 惯性系数;

v_i —— 阻尼系数;

C_i —— 复原力系数;

F_i —— 波浪干扰力幅值。

这一线性方程的求解及其性质是大家所熟知的。它的特点是, 如果在频率域内, 则输入和输出的频率是一一对应的, 并且其振幅成比例。换句话说, 如果我们把这一方程看成一个对输入 $F_i(t)$ 的变换, 则经过此变换后, 对输入的某一个频率 ω 其输出也为该频率的振荡, 其振幅 X_i 与 F_i 间存在某比例常数。

但是在某些情况下，或者由于运动幅度加大，或者由于船形或结构的某些特点，我们不可能再作其受力为线性函数的假定。这时运动方程一般将具有如下形式：

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \omega) = 0$$

也就是说此时船舶的流体动力和外干扰力将相互有关。

非线性问题是一个困难的问题。到目前为止，还没有找到普遍适用于任何形式的非线性问题的解法。但是从对一些已知的或者常遇到的非线性问题的研究可以得到如下一些关于非线性系统的特性的了解。非线性系统的一个最重要特点就是，对于某一个振荡频率的输入，一般将不会得到一一对应的输出，而是会同时对应有几种不同频率的输出。实际上，从理论上讲，一个非线性系统会有许多个阶数的共振。但是，由于具体情况限制，通常发生高阶共振还是较少的。我们在以后关于系统特性的讨论中，将会详细说明。

一般说来，对于船舶或海洋结构物的运动问题，可以归结为运动微分方程。但是，如果我们仔细考虑问题的流体动力方面，这一运动方程即使在线性情况下，也不是像在前面写出的那样简单。而是应该写成如下的积微分方程的形式：

$$m\ddot{x} + m_1 + \int_{-\infty}^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau + Cx = F(t) \quad (1.2.2)$$

对于这一方程，求解是比较困难的。最方便的办法是将其解表示为脉冲函数的形式，即

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)F(\tau)d\tau \quad (1.2.3)$$

而在非线性的情况下，方程将会具有更复杂的形式。与上面所列的脉冲响应函数相类似，只要运动保持时不变的特点，这一非线性系统可以表示为

$$x(t) = x_0 + \int_{-\infty}^t h_1(\tau)F(t-\tau)d\tau + \iint_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)F(t-\tau_1)F(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \dots$$

这就是所谓的 Volterra 泛函表示法。在所谓的二阶系统中，上面的函数序列在二阶处截断。这一表示方法在二阶系统响应的研究中得到很好的应用。

除去上面提到的这些问题外，时变系统，或者所谓的参数共振问题，是与船舶的横稳性有重要关系的问题。

1.3 高斯随机过程

在线性理论中，我们通常都是应用高斯过程作为研究的基础。这是因为高斯过程具有非常良好的性质，完全适合于线性系统随机理论的研究。为了更清楚的说明这一点，我们在这里首先介绍有关高斯过程的理论。

为了说明高斯过程的特性，我们首先讨论作为过程的一个现实，高斯随机变量的特性。首先考虑一定义于 $-\infty, \infty$ 之间的连续型随机变量 ξ ，并且有概率密度函数 $f(x)$ 。这里 $f(x) = p(\xi = x)$ ，

$$p(\xi = x) = \frac{dP(\xi \leq x)}{dx} \Big|_{\xi=x}$$

特征函数：这里引进如下定义的函数 $M(s)$ 称为 ξ 的特征函数

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx = E[e^{is\xi}] \quad (1.3.1)$$

显然, 特征函数具有如下特性:

$$\begin{aligned} \frac{dM(s)}{ds} \Big|_{s=0} &= is \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{isx} dx = ism_1 \\ \frac{d^2M(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} &= is^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) e^{isx} dx = (is)^2 m_2 \\ &\dots\dots \\ \frac{d^n M(s)}{ds^n} \Big|_{s=0} &= (is)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = (is)^n m_n \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

其中 m_n 为 ξ 的 n 阶矩

将特征函数表示式中的指数函数 e^{isx} 展开为级数

$$\begin{aligned} M(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [1 + isx + \frac{1}{2!} (isx)^2 + \dots] dx \\ &= 1 + ism_1 + \frac{1}{2!} (is)^2 m_2 + \dots + \frac{1}{n!} (is)^n m_n + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(is)^j}{j!} m_j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(is)^j}{j!} m_j \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

这表明, 如果我们知道某一随机变量直到任意阶的矩, 则可以容易的将这一特征函数用这些矩表示出来。特征函数的这一特点可以用来求解一些未知的随机变量的概率分布。

但是特征函数的这一矩表示法有一定的不便之处。这是由于对一个随机变量来讲, 它的矩通常是不可截断的。而采用另一种累积量(Cumulant)又称半不变量的表示法则更方便, 即定义:

$$\begin{aligned} K(is) &= \log M(s) = \log(1 + z) \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!} (is)^j \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

由于

$$M(s) = \exp(\log M(s)) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!} (is)^j + \frac{1}{2!} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!} (is)^j \right]^2 + \frac{1}{3!} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{j!} (is)^j \right]^3 + \dots \quad (1.3.5)$$

显然如果与式 (1.3.3) 对比我们可以求得系数 k_j 与各阶矩 m_j 的关系式

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1 \\ k_2 &= m_2 - m_1^2 = \sigma^2 \\ k_3 &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \\ k_4 &= m_4 - 3m_1^2 m_2 - 4m_1 m_3 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4 \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

反之, 可以将矩 m_j 用 k_j 表示

$$\begin{aligned} m_1 &= k_1 \\ m_2 &= k_2 + k_1^2 \\ m_3 &= k_3 + 3k_1 k_2 + k_1^3 \\ m_4 &= k_4 + 3k_1^2 k_2 + 4k_1 k_3 + 6k_1^2 k_2 - k_1^4 \\ &\dots\dots \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

系数 k_1 即为累积量系数, 又称为半不变量。这是因为当对该随机变量作平移变换时, 除 k_1 以外所有的高阶 k_i 皆保持不变。

正态随机变量: 如果我们考虑某一随机变量, 其累积量系数或半不变量只存在到二阶为止, 并且根据半不变量的性质, 我们可以设其一阶半不变量 $k_1 = 0$, 则此时该随机变量的特征函数具有如下形式:

$$M(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}k_2 s^2\right)$$

分布函数 $f(x)$ 可以由对 $M(s)$ 进行 Fourier 变换求得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(s) e^{-isx} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{k_2}s + i\frac{x}{\sqrt{k_2}}\right)^2\right] \exp\frac{1}{2}\left(\frac{ix}{\sqrt{k_2}}\right)^2 ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2k_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}\left[-\left(\sqrt{k_2}s + \frac{ix}{\sqrt{k_2}}\right)^2\right]\right\} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

这就是正态随机变量的分布函数。因此, 可以说正态分布是属于只保留累积量系数到二阶的随机变量的分布函数。但是要注意的是, 此时分布函数的矩并不只到二阶。对于正态分布其高阶矩, 都可用它的一至二阶累积量系数表示。从上面的关系式中, 可以容易的导出它们的关系。这一关系也可以从特征函数中求出。它们对于正态随机变量 $x(= N(0, \sigma^2))$ σ -标准差, 则:

当 n 为奇数时,

$$E[x^{n+1}] = \sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi}} \sigma^{n+1} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \quad (1.3.9)$$

当 n 为偶数时,

$$E[x^{n+1}] = 0 \quad (1.3.10)$$

这一特征函数的概念可以推广至多元随机变量。设有某多元随机变量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, 它由 r 维联合概率密度分布函数

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_r}(x_1, \dots, x_r)$$

表征。

对于多元随机变量, 除去上面我们定义的矩等数字表征以外, 为了说明各元间的相关程度, 通常用相关系数来表征。对于二个变量 ξ_1, ξ_2 之间, 我们可以用协方差系数表示,

$$K[\xi_1, \xi_2] = E[\xi_1 \xi_2] - E[\xi_1]E[\xi_2] \quad (1.3.11)$$

对于三阶相关系数, 即 ξ_1, ξ_2, ξ_3 之间的相关系数, 为了消除低阶相关的影响, 表示为:

$$\begin{aligned} K[\xi_1, \xi_2, \xi_3] &= E[\xi_1 \xi_2 \xi_3] - E[\xi_1]K[\xi_2 \xi_3] - E[\xi_2]K[\xi_1 \xi_3] - E[\xi_3]K[\xi_1 \xi_2] \\ &\quad - E[\xi_1]E[\xi_2]E[\xi_3] \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

可以看出, 如果我们设 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi$, 则

$$K[\xi, \xi, \xi] = k_3 \quad (1.3.13)$$

即转化为累积量系数，因此，相关系数与累积量系数类似。在多元的情况下，特征函数可以表示为：

$$\begin{aligned} M(s_1, \dots, s_r) &= E[\exp i(s_1 x_1 + \dots + s_r x_r)] \\ &= \int \dots \int f(x_1, \dots, x_r) e^{i(s_1 x_1 + \dots + s_r x_r)} dx_1 \dots dx_r \end{aligned}$$

显然，如一元特征函数，我们有：

$$E[\xi_1, \dots, \xi_r] = \frac{1}{i^r} \frac{\partial^r M(s_1, \dots, s_r)}{\partial s_1 \dots \partial s_r} \Big|_{s_1 = \dots = s_r = 0} \quad (1.3.14)$$

而对 r 阶的多元相关系数 $K[\xi_1, \dots, \xi_r]$ 则有

$$K[\xi_1, \dots, \xi_r] = \frac{1}{i^r} \frac{\partial^r \ln M(s_1, \dots, s_r)}{\partial s_1 \dots \partial s_r} \Big|_{s_1 = \dots = s_r = 0}$$

同上面的推导相似，如果我们只取相关系数到二阶，则由此一元特征函数可以推导出多元正态分布的结果。

对于随机函数，即随机过程，我们知道可以由过程的有限维概率分布函数来表征，即 $f(x_1, \dots, x_r; t_1, \dots, t_r)$ ，在此一情况下，特征函数为

$$M_r(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_r) = E[e^{i(s_1 \xi(t_1) + \dots + s_r \xi(t_r))}] \quad (1.3.15)$$

而此时的矩为时刻 $t_1, \dots, t_r$ 的函数，称为矩函数

$$m_1(t_1) \quad m_2(t_1, t_2) \quad m_3(t_1, t_2, t_3) \dots \dots$$

也可用相关函数

$$k_1(t_1) \quad k_2(t_1, t_2) \quad k_3(t_1, t_2, t_3) \dots \dots$$

它们的定义与相关函数 $K(\xi_1, \xi_2)$ 等相似。

应用前面的关系，可以将此一特征函数表示成

$$M_r(s_1, \dots, s_r) = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{i^j}{j!} \sum_{t_1, \dots, t_{j-1}} m_j(t_1, \dots, t_{j-1}, t_r) s_1 \dots s_r \quad (1.3.16)$$

或者用相关函数表示为：

$$M_r(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_r) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^r \frac{i^j}{j!} \sum_{t_1, \dots, t_{j-1}} k_j(t_1, \dots, t_{j-1}, t_r) s_1 \dots s_r \right\} \quad (1.3.17)$$

高斯随机过程（正态过程）：由上面的讨论可以看出，相关函数（在随机变量的情况下，为累积量系数）对描述一个随机过程或随机变量的统计特征是很重要的。我们如果考虑一个最简单的情况，即对于某一随机过程 $\xi(t)$ 其高阶相关函数，除去一阶及二阶的 $k_1(t_1)$, $k_2(t_1, t_2)$ 之外都为零，则这一过程 $\xi(t)$ 称为高斯或正态过程。在这一情况下，其特征函数将是：

$$M_r(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_r) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^r k_1(t_j) s_j - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^r k_2(t_j, t_l) s_j s_l \right\} \quad (1.3.18)$$

其分布函数可以对上式进行 Fourier 变换求得，即

$$f(\xi_1, \dots, \xi_r) = \int \dots \int \exp\left\{-i \sum_{j=1}^r s_j \xi_j\right\} M_r(s_1, \dots, s_r; t_1, \dots, t_r) ds_1 \dots ds_r \quad (1.3.19)$$

这里表达式 (1.3.18) 中的 $\sum_{j=1}^r k_2(t_j, t_j) s_j s_j$

可以写成

$$E\left[\left\{\sum_{j=1}^r [\xi(t_j) - k_1(t_j)] s_j\right\}^2\right]$$

这是一个正定的二次形。所以式 1.3.18 所表示的特征函数的绝对值当 $s_1, \dots, s_r$ 增大时将不会增长。这表明，不管存在无穷的积分限，这一积分存在。我们计算出 1.3.19 的积分，得到如下显式：

$$f(\xi_1, \dots, \xi_r) = (2\pi)^{-\frac{r}{2}} [\det \|k_2(t_j, t_l)\|]^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^r \alpha_{jl} [\xi_j - k_1(t_j)] [\xi_l - k_1(t_l)]\right\} \quad (1.3.20)$$

这里 $\det \|k_2(t_j, t_l)\|$ 为相关矩阵的行列式

$$\|k_2(t_j, t_l)\| = \begin{vmatrix} k_2(t_1, t_1) & k_2(t_1, t_2) & \dots & k_2(t_1, t_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_2(t_r, t_1) & k_2(t_r, t_2) & \dots & k_2(t_r, t_r) \end{vmatrix} \quad (1.3.21)$$

而 α_{jl} 为相关矩阵的逆矩阵，即

$$\alpha_{jl} = \|k_2(t_j, t_l)\|^{-1}, \quad \sum_{l=1}^r \alpha_{jl} k_2(t_l, t_r) = \delta_{jr} \quad (1.3.22)$$

其中 δ_{jr} 为 Kronecker Delta 函数，即

$$\delta_{jr} = \begin{cases} 1 & j=r \\ 0 & j \neq r \end{cases}$$

具有以上形式的概率分布函数的随机变量称为高斯或正态随机变量。

令 $r=1$ 则矩阵 1.3.20 及其逆矩阵都化为单个元素，即

$$\alpha_{11} = \frac{1}{k_2(t_1, t_1)} = \frac{1}{\sigma^2}$$

这样一维概率分布成为：

$$f[\xi(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [\xi(t) - m]^2\right\} \quad (1.3.23)$$

令 $r=2$ 则相关矩阵的逆阵为

$$\begin{vmatrix} k_2(0) & k_2(\tau) \\ k_2(\tau) & k_2(0) \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{k_2(0)}{k_2^2(0) - k_2^2(\tau)} & \frac{-k_2(\tau)}{k_2^2(0) - k_2^2(\tau)} \\ \frac{-k_2(\tau)}{k_2^2(0) - k_2^2(\tau)} & \frac{k_2(0)}{k_2^2(0) - k_2^2(\tau)} \end{vmatrix}$$

这里 τ 为 t_1, t_2 之差，即 $\tau = t_1 - t_2$ 。并假定过程为平稳。因此二维概率密度为：

$$f_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\xi_1^2 - 2R(\tau)\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{1-R^2(\tau)}\right\} \quad (1.3.24)$$

这里 $R(\tau)$ 为正规化的相关函数，即

$$R(\tau) = \frac{k_2(\tau)}{\sigma^2}$$

高斯随机变量，及高斯随机过程具有一些很优良的特性。其中很重要的一条是，高斯随机变量是可以线性叠加的。即不同的高斯随机变量相加组成的变量仍为高斯变量。高斯过程也是一样。这一点在我们以后研究系统对随机输入的响应时，将是十分有用的。线性系统的响应理论就是建立在这一性质之上。

除此以外，高斯随机变量，及高斯随机过程是在假设其高于二阶的累积量系数或自相关函数为零的情况下得到的。因此，它们的高于二阶的矩，都可以由其二阶矩表示出。这可以由其特征函数直接导出。如果设变量或过程的均值，或一阶矩为零，则：

$$E[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n+1}] = 0 \quad (1.3.25)$$

可以由特征函数证明：

$$E[\xi_1, \dots, \xi_n] = \sum_{\text{对所有可能的组合}} E[\xi_i, \xi_i] E[\xi_i, \xi_m] \quad (1.3.26)$$

但是在大多数非线性系统情况下，由于非线性作用，在输入为正态时，其输出也将为非正态的。这时，正态分布的所有性质将不再能利用。

1.4 随机过程的分解

我们已经熟悉了关于平稳随机过程的理论。这在普通的概率论以及船舶耐波性理论中已有介绍。在这些理论中，主要应用谱分析方法，对于研究线性系统时是很有用的。但是为了进一步讨论非线性系统的分析问题，我们还须要进一步深化对随机过程的理解。

实际上，在我们过去课程中所了解的平稳随机过程，主要是研究某一个时刻的现实的分布问题。具体应用频率域的方法。但是随机过程是时间的随机函数。也可以直接从时间上，即时间域内去研究它。而这一时间域上的随机过程理论就是平稳时间序列理论。

平稳时间序列理论，即是研究各时刻间的过程出现值的相关性的理论。通常用所谓自回归模型及滑动平均模型作为理论模型。

如果一个离散型过程或时间序列 $\{X_t\}$ ，包含一系列不相关的随机变量，即对所有的 $s \neq t$ ， s, t 表示不同时刻，其

$$\text{Cov}\{X_t, X_s\} = 0$$

这相当于过程完全无记忆。即过程在时刻 t 的值与过去直至 $t-1$ 时刻都无关。这一过程称为纯随机过程，或白噪声。

应用白噪声作为一个基本单元，我们可以构造不同型式的随机过程或序列。在平稳时间序列理论中的滑动平均模型即为其一。所谓滑动平均过程即：

设 $\{X_t\}$ 为1阶滑动平均过程。如果它可以表示为：

$$X_t = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + b_l \varepsilon_{t-l} \quad (1.3.27)$$

其中 $\{\varepsilon_t\}$ 为白噪声, 其方差为 σ^2 , 均值为零。 $b_0, b_1, \dots, b_l$ 为常数。

可以看出, 不论 $b_0, b_1, \dots, b_l$ 为何值 $\{X_t\}$ 总是一平稳过程, 并且

$$1) \sigma_x^2 = \sigma_\varepsilon^2 (b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_l^2)$$

2) 如设 $E[\varepsilon_t] = 0$, 则 $E[X_t] = 0$, 则

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{E[X_t X_{t-r}]}{\sigma_x^2} = \left(\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2} \right) \{b_0 b_r + b_1 b_{r-1} + \cdots + b_l b_{l-r}\} & 0 \leq r \leq l \\ 0 & r \geq l \end{cases}$$

更精确的讲,

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{\left\{ \sum_{s=0}^l b_s b_{s-r} \right\}}{\left\{ \sum_{s=0}^l b_s^2 \right\}} & 0 \leq r \leq l \\ 0 & r > l \\ \rho(r) = \rho(-r) & r < 0 \end{cases}$$

从上面可以看出这一滑动平均过程的自相关函数只于 r 有关, 即 $\{X_t\}$ 为一平稳过程。这说明我们可以应用对白噪声过程 $\{\varepsilon_t\}$ 进行滑动平均的办法构造出某一具有给定自相关函数 $\rho(r)$ 的平稳随机过程。平稳随机过程的这一特点是十分有用的。

滑动平均模型在连续过程的情况下, 可以将白噪声序列 $\{\varepsilon_t\}$ 替换为 $\varepsilon(t)$ 而其离散和则用积分表示。这样上式改写为:

$$x(t) = \int_0^l b(u) \varepsilon(t-u) du$$

这和我们在线性系统中的脉冲响应函数, 或者滤波器理论相似。换句话说, 对某一实际上可实现的平稳随机过程, 我们可以用对白噪声过程进行滤波来求得。

随机过程在时间域内的估计, 用滑动平均模型是不方便的。通常采用所谓自回归模型。它的基本想法是, 应用一个过程在过去时刻的数值来估计下一个时刻可能出现的数值。

我们称 $\{X_t\}$ 为一个 k 阶的自回归过程(记为 $AR(k)$)如果它满足下列差分方程:

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \cdots + a_k X_{t-k} = \varepsilon_t$$

这里 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 为常数。上面的模型也可以表示为:

$$X_t = -a_1 X_{t-1} - \cdots - a_k X_{t-k} + \varepsilon_t$$

有关自回归以及滑动平均模型, 以及它们的具体应用存在一整套理论, 称为平稳随机序列理论, 实际上是从时间域上来探讨平稳过程的特性。我们打算在本课程内过多的讨论。但这一方法可以给我们对平稳随机过程有更深入的理解。在进行深入研究时是有用处的。读者可以参阅有关著作, 例如 M.B.Priestly: Spectral Analysis and Time Series.

参考文献

- 1.M.K.Ochi W.E.Bolton 预测海浪中船舶性能的统计方法 交通部上海船舶运输科学研究所译
- 2.Cummins W.E. 1962 The Impulse Response Function and Ship Motion Schiffstechnik 9
- 3.Stratonovitch,R.L. 1964 Topics in the Theory of Random Noise Gordon and Breach
- 4.Prestly M.B.:Spectral Analysis and Time Series Academic Press Inc
- 5.Price W.G.Bishop R.E.:Probabilistic Theory of Ship Dynamic

第2章 随机波浪理论

海洋波浪理论包含两个方面。一是确定性理论，另一则是随机理论。确定性理论在其它课程中已经介绍了，本课程主要讨论随机波浪理论。由确定性波浪理论知，由于决定波浪运动的边界条件中自由面条件的非线性，海洋波浪本质上是非线性的。只是从摄动方法的角度，作为一阶近似，可以把它作为线性处理。近代波浪理论的发展在确定性范围内，已经可以应用摄动展开法求解一些高阶近似问题。与此相应的随机波浪理论也可以处理一些弱非线性波浪问题。在本章中，我们着重介绍线性波浪理论的一些大家可能熟知的结果。作为在下面深入讨论非线性波浪理论做准备。

2.1 波浪理论基础

从流体力学理论考虑，波浪运动主要是受到重力的作用。当然粘性与表面张力也会对波浪运动起一定的影响。但是，对于我们研究船舶运动，以及海洋结构物的载荷理论问题，则主要是在1~15秒周期的海浪范围内。表面张力及粘性的影响大都是微小的。因此，我们可以应用理想流体即势流的方法。大家所熟知的波浪运动可以用势函数 $\varphi_1(x, y, z, t)$ 表示。在本章中，我们只限于考虑线性假设下的理论问题，故这一势函数满足如下的定解条件：

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi_1 &= 0 && \text{流体中} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= 0 && z = -d \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= 0 && z = 0 \\ \zeta_1 &= -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)_{z=0}\end{aligned}$$

可以看出一阶势 φ_1 以及波面坐标 ζ_1 的边界条件是线性的，它的解是熟知的，即

$$\varphi_1(x, y, t) = \frac{g}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} a \cos(kx + \omega t) \quad (2.1.1)$$

式中：

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (2.1.2)$$

特别当水无限深时，上式成为

$$\omega^2 = gk \quad (2.1.3)$$

波浪表面 ζ_1 为

$$\zeta_1 = a \cos(kx + \omega t)$$

式中 a 为波幅。

由于自由面条件是线性的，故解可以叠加。如果此时在水面上同时存在两个以上的不同振幅，频率的波动，则可以证明，这些波的组合，即

$$\zeta(t) = \sum_n a_n \cos(k_n x + \omega_n t + \delta_n) \quad (2.1.4)$$

也同样满足自由面条件。并且

$$\omega_n^2 = gk_n \tanh(k_n d) \quad (2.1.5)$$

即每个个别波分量仍然满足其色散关系。

同样的，波浪速度势也可以表示成线性叠加的形式。

$$\varphi(t) = \sum_n \frac{g}{\omega_n} a_n e^{k_n z} \cos(k_n x + \omega_n t)$$

如果波浪是沿与x轴成某一夹角 α 传播的，则 $\zeta(t)$ 也可写成

$$\zeta(t) = \sum_n a_n \cos(k_n x \cos \alpha + k_n y \sin \alpha - \omega_n t + \delta_n)$$

其中 δ_n 为初相角。

在波浪是随机的情况下，我们相信，波浪所应满足的基本控制方程及边界条件是不变的。因此，可以相信速度势以及波面公式的基本特征不会变化。唯一的区别在于波浪的随机性。为此 Longuet-Higgins 提出了随机相位模型。也就是，在以上表示式中，加进了随机因素，从而使波浪表示式具有随机特征。我们首先考虑一个波列的情况，即：

$$\zeta(t) = a \cos(kx + \omega t + \delta)$$

为了使 $\zeta(t)$ 即波面坐标成为某一随机发生的变量，必须在右边的表示式中加进某一随机成分。这里我们保持 a, ω, k 为确定的，而使初相位角 δ 为一随机变量。由于 δ 的随机性， $\zeta(t)$ 也必然具有随机性，随机相位角假定为在 $0 \sim 2\pi$ 之间具有均匀分布的随机变量。

$$p[\delta < \Delta \leq \delta + d\delta] = f(\delta)d\delta \quad (2.1.6)$$

我们现在来求上述随机波浪模型的波浪表面 ζ 的概率分布。为此考虑一新的随机变量

$$v = kx - \omega t + \Delta$$

则对于区域 $-a < \zeta < a$ 中的每一个 ζ 值对应两个在区间 $0 < \delta < 2\pi$ 的 Δ 值。设为 v_A, v_B 。由于事件： ζ 发生在 $(\zeta, \zeta + d\zeta)$ 之间，要求 v 处在 $(v_A, v_A + \delta v)$ 或 $(v_B, v_B + \delta v)$ 。而且由于这两个 v 的事件不相交，根据概率的加法定理

$$p[\zeta < \zeta(x, t) \leq \zeta + d\zeta] = p[v_A < v(x, t) \leq v_A + \delta v] + p[v_B < v(x, t) \leq v_B + \delta v]$$

因此概率密度函数可表示为：

$$f(\zeta; x, t) d\zeta = [f_1(v_A; x, t) + f_1(v_B; x, t)] dv \quad (2.1.7)$$

对任一 v

$$f_1(v; x, t) dv = f_1(\delta) d\delta = \frac{1}{2\pi} d\delta \quad (2.1.8)$$

因为在 $0 \sim 2\pi$ 之间所有的 Δ 都是等可能性的，故

$$f_1(\zeta; x, t) d\zeta = \frac{1}{\pi} d\delta \quad (2.1.9)$$

即波面坐标 ζ 的概率分布密度与相位角成正比。对于任一特定的现实 ζ, δ 及 Δ 的关系是

$$\zeta = a \cos(kx - \omega t + \delta)$$