



计算方法丛书

一维非定常流体力学

周毓麟 著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了进行一维非定常流体力学计算时必须解决的问题,以及求解不同类型流场的精确解和高精度的近似解的数值方法。内容包括:热力学基本概念、流体力学方程组、双曲型方程组、简单波及其性质、冲击波及其性质、爆震波及其性质、雷诺理论、流体的自模拟运动、球形爆震波和点源爆炸等。

本书可作为高等学校计算数学、应用数学、流体力学专业的教材,也可供有关科技工作者参考。

计算方法丛书 一维非定常流体力学

周敏麟 著

责任编辑 林 鹏

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1990年10月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1990年10月第一次印刷 印张:13 3/8

印数:0001—1400 字数:352 000

ISBN 7-03-001772-2/O · 345

定价:14.90 元

《计算方法丛书》编委会

主 编	冯 康					
副主编	石钟慈	李岳生				
编 委	王仁宏	王汝权	孙继广	李德元	李庆扬	
	何旭初	吴文达	林 群	周毓麟	席少霖	
	徐利治	郭本瑜	袁兆鼎	黄鸿慈	蒋尔雄	
	雷晋干	滕振寰				

前 言

本书着重分析了一维流体运动中各种非线性波的结构、传播等特性以及它们之间的相互作用。还介绍了流体运动场问题的一些精确与近似解析求解的方法，并且通过对一些流场数学模型例子的详细求解，描述了这些解法在实际模型问题研究中的应用。

在流体力学计算方法的研究中，需要对不同类型流场求出精确解或有较高精度的近似解析解。这些问题的解析解可以用来检验计算格式、计算参数等的选取，还可以用来检验计算方法的精度与比较方法的优劣等。流场的数值计算结果的定性与定量分析，实际上也就是对流场非线性波的传播与相互作用作细致的定性与定量的分析。

在实际流体运动场问题的研究中，一般先对尽可能接近于实际的数学模型作解析近似求解。从这些解中可以了解到模型的流场的一些现象和规律。这些现象与规律往往可以对实际流体运动场的深入研究提供一些必要与基本的依据。

本书的目的就是对流体力学计算方法与运动规律的研究提供一些必要与有用的知识与方法。

本书可作为研究生课程的教材使用。

目 录

第一章 流体运动方程组	1
§ 1 热力学基本概念	1
1.1 物质状态的变化过程	1
1.2 热力学定律	3
1.3 热力学状态函数	11
1.4 流体的状态方程	15
1.5 完全气体,多方气体,常比热完全气体	17
1.6 数学推导的补充	18
§ 2 流体力学方程组	24
2.1 流体运动的守恒方程组	24
2.2 无粘流体的运动方程组	30
2.3 一维流体力学方程组	37
2.4 特征线方程与特征关系	40
第二章 波的概念	45
§ 1. 双曲型方程组	45
§ 2 简单波及其性质	50
2.1 可约双曲型方程组	50
2.2 简单波	57
2.3 等熵运动的通解	61
2.4 稀疏波及活塞运动	71
2.5 例题	85
§ 3 冲击波及其性质	144
3.1 冲击波的形成及压缩波	144
3.2 冲击波及其关系式	148
3.3 Hugoniot 关系式与冲击波的基本性质	154
3.4 多方气体的冲击波关系式	165
3.5 波的相互作用	170
3.6 Riemann 问题(初始间断的分解)	202

3.7	活塞运动问题	212
3.8	弱冲击波近似	223
§ 4	爆震波及其性质	243
4.1	爆震波与燃烧波	243
4.2	Chapman-Jouguet 过程与 Jouguet 规律	249
4.3	多方介质中爆震波关系式	259
4.4	平面爆震波问题	268
第三章	自模拟运动	324
§ 1	量纲理论	324
1.1	量纲	324
1.2	无量纲量之间的关系	328
1.3	现象的相似	333
1.4	量纲分析应用的例子	335
1.5	热传导问题的自模拟解	339
1.6	变量变换	350
§ 2	流体的自模拟运动	354
2.1	自模拟运动的常微分方程组	354
2.2	冲击波关系式	358
2.3	自模拟运动的若干积分	361
§ 3	球形爆震波	364
3.1	运动方程组	364
3.2	积分曲线分布	366
3.3	爆震波波面附近的近似解	372
§ 4	点源爆炸	376
4.1	强爆炸自模拟解	377
4.2	冲击波的消失过程	382
4.3	点源爆炸冲击波参数的近似公式	391
§ 5	聚合柱形与球形冲击波	396
5.1	常微分方程组	396
5.2	积分曲线分布	399
5.3	解的曲线	411
5.4	聚合柱形与球形爆震波	415
	参考文献	419

第一章 流体运动方程组

在本章中要讨论的是流体运动所满足的运动方程组。为此首先要对热力学的基本概念作一些简单介绍,从这些基本概念出发,来研究一些关于物质状态方程的性质和表示形式。本章讨论的流体运动方程组是不考虑粘性与热传导效应的。对一维理想流体运动方程也作了一些讨论。最后还要提到方程组的特征线方程与特征线关系式,这些是以后各章节的讨论中所需要的基础知识。

§1 热力学基本概念

研究流体运动问题时,除了要研究流体每个质点在某一定时间的位置与速度(这些叫做运动学状态)外,还必须知道质点的热力学状态。描写质点的热力学状态的有:质点的压力 p 、比容 τ (单位质量的体积,即为密度 ρ 的倒数)和温度 T 。

解决流体力学问题,也就是在一定的初始条件与边界条件下,要求出质点的压力 p 、比容 τ 、温度 T 以及运动速度 \vec{u} 为时间 t 与位置 x, y, z 的函数关系。

关于物质热力学状态的物理参数 p, τ, T 等不是完全独立无关的。物理和力学中的原理阐明,只要有二个热力学参数是已知的,其他热力学参数都可以由这两个参数来决定。以下要讨论的就是这些物理参数之间的关系。

1.1 物质状态的变化过程

在流体运动过程中,如果每个质点的密度 ρ (或比容 τ) 不变,这流体称为不可压缩的,否则就称之为可压缩的。设 t_1 时质点的位置为 x_1, y_1, z_1 , 密度为 $\rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$; 在 t_2 时,质

点的位置为 x_2, y_2, z_2 , 密度为 $\rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 。

定义

$$\frac{d\rho}{dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho(x_2, y_2, z_2, t_2) - \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)}{t_2 - t_1}$$

为质点密度的质点微商(或随体微商或全微商), 所以对于不可压缩流体 $\frac{d\rho}{dt} = 0$, 而对于可压缩流体 $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$ 。但是要注意的是,

$\frac{d\rho}{dt} = 0$ 时, ρ 还可以是 x, y, z, t 的函数, 而不一定是常数。如

果只考虑固定地点, x, y, z , 在不同时间 t_1, t_2 , 质点是不同的。所以

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho(x, y, z, t_2) - \rho(x, y, z, t_1)}{t_2 - t_1}$$

称为当地微商(或偏微商)。当地微商与质点微商之间的关系为

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

其中 $u = \frac{\partial x}{\partial t}$, $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, $w = \frac{\partial z}{\partial t}$ 分别为速度向量 \vec{u} 在 $x, y,$

z 方向上的分量。如果所有物理参数的当地微商都等于零, 运动则称为定常的, 否则称为非定常的。

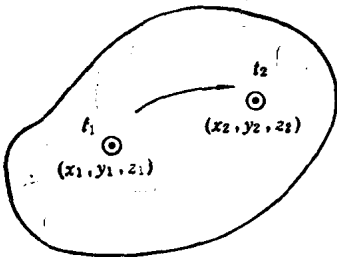


图 1.1 不同时刻质点的位置

在流体运动过程中, 若考虑到流体质点之间摩擦影响, 则称这种流体为粘性流体。若在运动过程中, 不考虑或者没有质点之间的摩擦作用, 则这种流体或气体可称为无粘流体或无粘气体。

在流体的运动过程中, 对于不同的情况, 可以考虑或不考虑质点之间有热交换或有热传导。如果所考虑的具有许多质量团的运动系统是在热力学意义下封闭的, 与系统的外界不发生热交换, 那

么称这个系统的运动过程为绝热过程。这时系统的质点之间可以有热交换。

所谓可逆过程是这样的变化过程：一个运动系统从一个热力学状态变到另一个状态，在变化中的每一步都可以向反方向进行，把系统变回原来状态，而外界没有什么变化。也就是说，某一步的初始状态为 A ，最终状态为 B ，系统从 A 变到 B ，再从 B 变回到 A ，原来在 A 状态时，外界的条件与回到 A 状态时外界的条件是一样的。在这个循环过程中，外界没有对系统发生热交换和做功。整个过程的每一步都能这样，才叫做可逆过程，否则就称为不可逆过程。（如果 A 到 B 是一个无穷小的过程，从 A 到 B ，再从 B 到 A 的过程中所做的功应该是高级无穷小，才能是可逆的，因为整个过程中，这种功的总和还是无穷小量。）一个没有粘性与热交换的流体的绝热过程是个可逆的绝热过程，因为运动过程中，每个质量团没有损失能量来做功。有粘性或有热交换，或者既有粘性又有热传导的绝热过程是不可逆的绝热过程。

1.2 热力学定律

自然界一切物质都有能量。能量有不同的形式，而且可以从一种形式转化为另一种形式。

在平衡状态时，物质有状态函数 e ，称作内能。内能可以定义为，当这个物质系统从一个状态经过绝热过程变到另一个状态后，系统的内能的增加等于在这过程中外界对系统所作的功：

$$de = dw.$$

如果在非绝热过程时，系统从外界吸收的热量为 dQ ，根据能量守恒定理，则内能的改变为

$$de = dQ + dw, \quad (1)$$

即物体内能的增加等于物体从外界吸收的热量 dQ 与外界对物体所做的功之和。这就是热力学第一定律。这里先用绝热过程定义了内能。热力学归纳人类实践，并推理说明从一个状态到另一个状态，不管经过什么绝热过程，得到物体温度的上升是一样的，所以

内能是状态的函数。这样 $e_2 - e_1 = w$ ，其中 w 为外界做的功，而 e_2, e_1 分别为外界做功后与做功前物体的内能。另一方面，把物体从原来状态变到最后状态，不是通过绝热过程，而是发生外界的加热。若外界没有做功，只是向物体输送了热量， $Q = e_2 - e_1$ 。这时就可以用内能来定义热量和计算热量。对于更一般的过程，外界又加热又做功，那么关系式就应该是 $Q = e_2 - e_1 - w$ 。

物体温度升高一度所需要的热量称为物体的热容量。单位质量的物质热容量称为物质的比热，即

$$c = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T},$$

其中 ΔQ 为使物质升高 ΔT 度所需的热量。这里的 ΔQ 是与运动过程有关的，所以 c 也与运动过程有关。常比容过程中的热容量与比热称为定容热容量与定容比热，常压力过程中的热容量与比热称为定压热容量与定压比热。定容比热 c_v 与定压比热 c_p 分别可表成

$$c_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v, \quad c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p. \quad (2)$$

一般说来， c_p 与 c_v 随温度而变，也略随压力而变。为不使数学问题过于复杂，以下往往讨论 $c_p = \text{常数}$ 与 $c_v = \text{常数}$ 的这样近似的简化情况。

在自然界的运动过程中，物质的状态随时间而变化，并且状态的变化具有方向性。以下就要对运动过程的方向性作一些讨论。

一般说来，自然界的运动过程都是不可逆过程。因为物质之间不能没有摩擦，所以可逆过程只是一种理想的情况，一种实际情况的极限过程。可逆过程中的每一步都可以向反方向进行，物体和外界的状态，都是原来正方向进行时的状态的重演，不引起外界条件的任何变化，否则就是不可逆过程。另一方面，不可逆过程的每一步不是不能向反方向进行变化，是可以向反方向进行的，但是需要外界条件有一定的改变。

不可逆过程的例子很多。热学中趋向于平衡状态的现象是一

个例子。当两个温度不同的物体相接触时，热量总是从高温物体流到低温物体的，不可能从低温物体流到高温物体。这就是说，热传导过程是不可逆的。摩擦生热也是不可逆的过程，还有各种爆炸过程、气体扩散过程等也都是不可逆的过程。

从这些事实提出二点：(1) 可以求得一个表示方向的状态函数；(2) 自然界的不可逆过程，都是互相关连的，就是从某一过程的不可逆性，可以推断出另一过程的不可逆性。因为可以利用各种各样的曲折的复杂的方法，把两个不可逆过程联系起来。我们这里着重讨论第一个问题。

从以上很多自然界的现象，归结出一个重要的定律，称为热力学第二定律。热力学第二定律可以有不同的表述（因为不可逆过程是互相联系的），例如：

不可能把热从低温物体传到高温物体而不引起其他变化；

不可能从单一热源取热使之完全变为有用的功，而不发生其他影响；

在一个物体系的任一给定的平衡态的附近，总有这样的状态存在，从给定的状态出发，不可能经绝热过程达到。

这些提法都是等价的(但第一个是最明显的)。它是从无数自

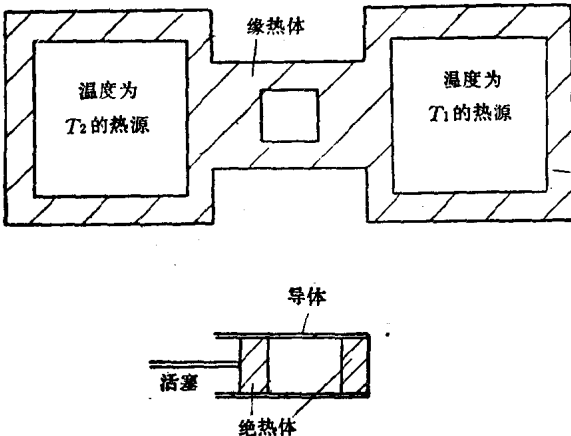


图 1.2 Carnot 循环器示意图

然现象中归纳出来的。它的无数推论，都在实践中得到证实。这些都证实了热力学第二定律的正确性。下面将从这个定律出发来说明判别方向的状态函数的存在。

以下讨论可逆过程的性质。

Carnot 循环。 给定一定量（如一克分子的）的气体和温度分别为 T_2 , T_1 的两个热源。设 $T_2 < T_1$ ，气体作以下四个过程：

- (a) 绝热膨胀，由 (V_1, T_1) 到 (V_2, T_2) ；
- (b) 等温压缩，由 (V_2, T_2) 到 (V_3, T_2) ；
- (c) 绝热压缩，由 (V_3, T_2) 到 (V_4, T_1) ；
- (d) 等温膨胀，由 (V_4, T_1) 到 (V_1, T_1) ，恢复原状。

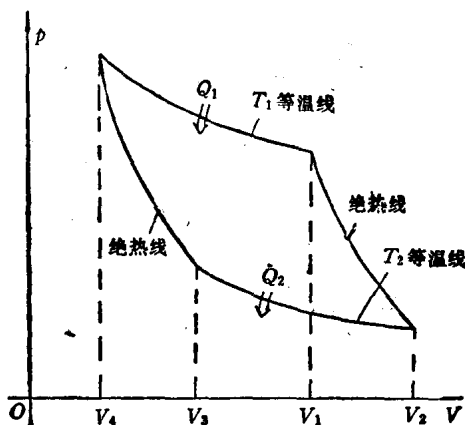


图 1.3 Carnot 可逆循环过程

这就是 Carnot 可逆循环。在 (b) 中，热源 T_2 从气体中吸去热量 $-Q_2$ 。在 (d) 中，气体从热源 T_1 中吸收热量 Q_1 。气体总共吸取的热量 $Q_1 + Q_2$ 等于气体对外界做的功 $|w| = -w$ 。这个循环过程的效率 η 为

$$\eta = \frac{|w|}{Q_1} \quad \text{或} \quad \eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

以下对给定的气体的情况，计算一下 Carnot 循环每一步的

各个参数。

没有粘性作用的气体称为理想气体，或无粘气体。状态方程为 $pV = RT$ 的气体称为完全气体。状态方程为 $p = \lambda \rho^\gamma$ 的气体，称为多方气体。多方气体包括了内能 e 与温度成比例的完全气体，即适合条件 $e = c_v T$ 的完全气体。比热 c_p, c_v 与比热比 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ 都是常数 ($R = c_p - c_v$) 的气体叫做常比热气体。

对于等温线为 $pV = RT$ (常数) 的完全气体，无粘流体绝热变化应满足微分方程

$$dQ = de + pdV = 0.$$

如果流体又具有常比热的性质，那么从 $de + pdV = \frac{c_v}{R} \cdot d(pV) + pdV = \frac{1}{\gamma-1} V dp + \frac{\gamma}{\gamma-1} p dV$ 的积分因子 $\frac{pV}{\gamma-1}$ ，得绝热线方程为 $pV^\gamma = C$ (常数)。

现在对于常比热完全气体，考虑一个一般的可逆循环。对于这样的循环，考虑积分 $\oint \frac{dQ}{T}$ ，得

$$\begin{aligned} \oint \frac{dQ}{T} &= \oint \frac{de + pdV}{T} = \oint \frac{R}{pV} \left\{ \frac{c_v}{R} d(pV) + pdV \right\} \\ &= \oint \left\{ c_v \frac{d(pV)}{pV} + R \frac{dV}{V} \right\} = c_v \oint d \ln pV^\gamma = 0. \end{aligned}$$

对 Carnot 可逆循环的证明也是一样。所以对于这种气体的任意可逆循环，

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0.$$

把这个结果用到该气体的 Carnot 可逆循环时，得等式

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0,$$

即可得

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (3)$$

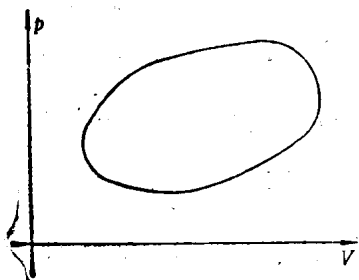


图 1.4 任意可逆循环过程

现在考虑一般气体 A 所组成的热机。设在等温膨胀时，分别从热源 T_1 与 T_2 中吸取热量 Q'_1 与 Q'_2 。先对这给定的气体作这样的一个热机循环，这气体从 T_1 中取得热量 Q'_1 ，而输送 T_2 热量 Q'_2 ，气体对外界作净功 $w' = Q'_1 + Q'_2$ 。以这些功作用到常比热完全气体上，使作一个相反方向的 Carnot 可逆循环，这样，这气体就从 T_2 中取得热量 Q_2 而输送给 T_1 热量 Q_1 。经过这样两个 Carnot 循环以后，两种气体都回复了原状，而从热源 T_1 中取走的热量为 $Q'_1 - Q_1$ ，热源 T_2 得到的热量为 $Q'_2 - Q_2$ 。从以上两个循环过程所做的功，可得

$$\begin{aligned} -w &= w', \\ Q'_1 + Q'_2 &= Q_1 + Q_2, \end{aligned}$$

或

$$Q'_1 - Q_1 = Q'_2 - Q_2.$$

气体 A 循环的效率为 $\eta_A = 1 + \frac{Q'_2}{Q'_1} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{Q'_1}$ ，常比热完全气体

的效率为 $\eta_0 = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1}$ 。

设 $\eta_A > \eta_0$ ，则 $Q'_1 < Q_1$ 。那么两个循环的结果为，只是高温热源 T_1 得到了热量 $Q_1 - Q'_1 > 0$ ，而低温热源 T_2 失掉了热量 $Q_2 - Q'_2 = Q_1 - Q'_1 > 0$ ，也就是有热量 $Q_1 - Q'_1$ 从低温物体流到高温物体。这与热力学第二定律相矛盾，所以 $\eta_A \leq \eta_0$ 。

从这些讨论，可以得到以下两个结论。

(1) 对于任意气体 A 所组成的可逆或不可逆热机循环，它的

效率不大于 η_0 , 即 $\eta_A \leq \eta_0$. 在以上讨论过程中, 并没有用到气体 A 热机的可逆性.

(2) 所有工作于两个一定的温度之间的可逆热机, 其效率是相等的. 因为在证明 $\eta_A \leq \eta_0$ 时, 只用到常比热完全气体 Carnot 循环的可逆性. 如果有两种气体 A 与 B , 它们的效率各为 η_A, η_B , 因为 A 机可逆, $\eta_B \leq \eta_A$, 又因 B 机也可逆, $\eta_A \leq \eta_B$, 所以 $\eta_A = \eta_B = \eta_0$.

从 $\eta_A = \eta_0$, 即 $1 + \frac{Q_2'}{Q_1'} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, 得到对于任意气体的 Carnot 可逆循环也有

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

设一任意气体 A 作任意的可逆循环, 任意可逆循环可以分成许多细小的 Carnot 可逆循环, 这样得到的循环有

$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = \oint \frac{dQ}{T} + \varepsilon = 0,$$

所以对一般气体的可逆循环, 都有性质

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (4)$$

因此可知 $dQ = de + pdV$ 有积分因子 $\frac{1}{T}$, 定义这样一个状态函数

$$S - S_0 = \int_{p_0, V_0}^{p, V} \frac{de + pdV}{T} = \int_{p_0, V_0}^{p, V} \frac{dQ}{T},$$

它称之为熵, 这函数与从 (p_0, V_0) 变到 (p, V) 的过程是无关的, 它只依赖于气体的热力学状态. (注意: 对于可逆过程, $\frac{dQ}{T}$

为全微分; 对于不可逆过程, $\frac{dQ}{T}$ 不是全微分.)

引进了熵的概念以后, 热力学第一定律, 在没有内摩擦现象下

的微分形式可写成

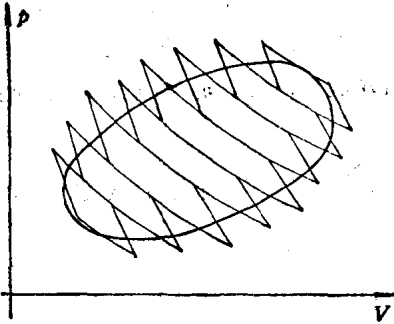
$$TdS = de + pdv.$$

设单位质量物质的体积为 v ，单位质量物质的内能与熵，分

别记作 e 与 S ，则以上微分形式可写成

$$TdS = de + pdv. \quad (5)$$

这个微分式是熵的定义，与过程是无关的，也就是热力学第一、第二定律的联合结论。



从热力学第二定律中

图 1.5 任意可逆循环分解为 Carnot 可逆循环 引进的热力学状态函数熵，能够对不可逆过程进行的方向作出判断。有了熵的定义以后，热力学第二定律可以表述为

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \quad (6)$$

当自然界一个孤立物体由一个热力学平衡态，经任何热力学过程，到达另一个平衡态时，它的熵不减少。如果过程是可逆的，则熵的数值不变。如果过程是不可逆的，则熵的数值增加。这称为熵增加原理。

现在考虑一个任意的不可逆过程，其物质系统从初始状态 P_0 变到最终状态 P 。假设一个任意的可逆过程，正好能使物质系统，从最终状态回到初始状态，这样组成一个不可逆循环。对这一循环有

$$\int_{(P_0)}^{(P)*} \frac{dQ}{T} + \int_{(P)}^{(P_0)} \frac{dQ}{T} < 0,$$

其中有 * 号的积分，表示对应于不可逆过程。因为 $\int_{(P)}^{(P_0)*} \frac{dQ}{T} =$

$S_0 - S$ ，则对任意不可逆过程

$$\int_{(P_0)}^{(P)} \frac{dQ}{T} < S - S_0. \quad (7)$$

假如不可逆过程是绝热的, 则 $dQ = 0$ 。以上不等式变为 $S - S_0 > 0$, 即经过一个不可逆的绝热过程, 熵增加了, 它也可以表示为

$$dS > 0. \quad (8)$$

1.3 热力学状态函数

在前面的讨论中, 提到了物理参数压力 p , 比容 $\tau \left(= \frac{1}{\rho} \right)$, 密度 ρ , 温度 T 以及另两个物质的状态函数内能 e 与熵 S 。这些都可以用来描写物体所处的热力学状态, 它们不是完全互相独立的, 其中有两个是独立变量, 而其他参数都可以用这两变量来决定。假如已知了物质的压力 p 和密度 ρ , 则其他的参数 τ, T, e, S 都可以由 p 和 ρ 来决定。所以对于给定的物体 (可以看作一个热力学系统), 参数 τ, T, e, S 对于 p, ρ 的函数关系也就给定了。这些函数关系, 不是完全互相独立的, 它们之间是有一定的联系的。这些函数关系与独立变量的选取是有关的。

如果选 τ 与 S 为独立变量, 设已知内能 e 依赖于 τ, S 的函数关系为 $e = g(\tau, S)$, 从热力学定律可知

$$de = T dS - p d\tau,$$

那么, 就得到

$$\left(\frac{\partial e}{\partial S} \right)_{\tau} = T, \quad \left(\frac{\partial e}{\partial \tau} \right)_{S} = -p, \quad (9)$$

这样就知道了 T 与 p 对 τ, S 的函数关系。从 $T(\tau, S), p(\tau, S)$ 中消掉 S , 就得到物体的状态方程

$$f(p, \tau, T) = 0.$$

如果最初只知道 $T(\tau, S)$, 那么

$$e = \int_{S_0}^S T(\tau, S) dS + e_0(\tau),$$

$$p = - \int_{S_0}^S \frac{\partial T(\tau, S)}{\partial \tau} dS + e'_0(\tau).$$

这样在 $e(\tau, S)$ 与 $p(\tau, S)$ 的表达式中, 都还有一个未知函数