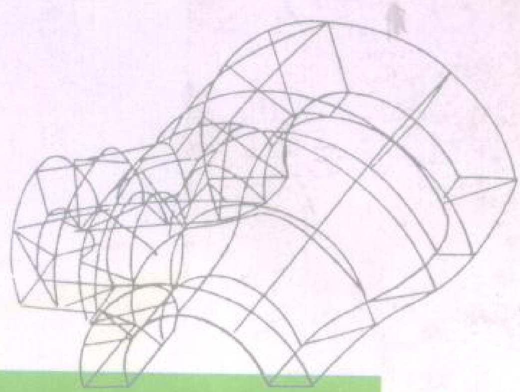
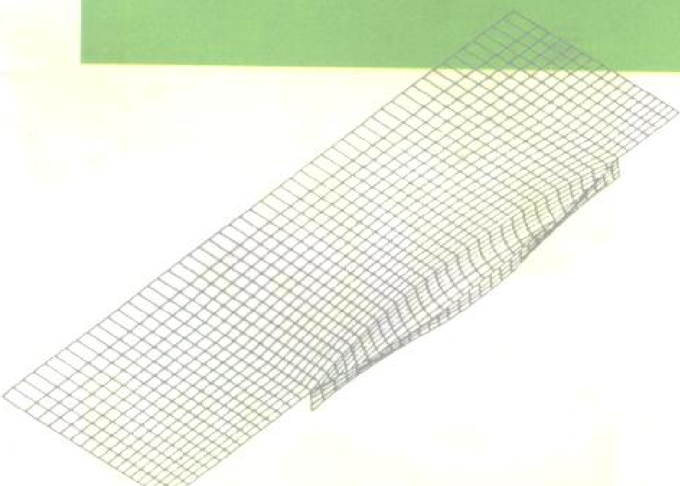
边界元法进展及通用程序



边界元法进展及通用程序

嵇　醒　臧跃龙　程玉民　著



同济大学出版社

边界元法进展及通用程序

嵇　醒　臧跃龙　程玉民　著

同济大学出版社

内容提要

本书阐述边界元法的研究和应用，着重介绍作者的研究成果。第一章为绪论；第二章和第三章是弹性静力学和弹性动力学，对边界元法原理、方法和技巧作了透彻的论述，这是本书的基础；第四章对弹性动力学提出了一种新的傅氏本征变换-边界元法；第五章和第六章研究了弹塑性有限变形的边界元法，这是一个几何-物理双非线性问题；第七章至第九章分别研究了刚体和流体耦合运动、船舶稳态流场和兴波问题的边界元法，从中可以看到边界元法对这类问题的特殊有效性和遇到的特殊问题；第十章扼要介绍了固体力学边界元法通用程序 BESMAP，边界元法通用程序是国内外普遍重视并尚在发展的领域，是边界元法走向工程应用的关键。书末附有完整的三维弹性静力学边界元法程序。

本书可作为固体力学、计算力学和计算数学及相关专业硕士或博士研究生教材，并可供大学相关专业师生、工程技术人员和研究人员参考。

责任编辑　李炳钊
封面设计　陈益平

边界元法进展及通用程序

嵇　醒　臧跃龙　程玉民　著
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号 邮编 200092）
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张 12 字数：340 千字
1997 年 4 月第 1 版　　1997 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—1000　　定价：10.50 元
ISBN7-5608-1744-2/O·150

前　言

计算力学已成为工程应用和力学研究的强有力的工具，它以现代计算机的巨大解算能力来避免用数学寻找解析解的困难，这种困难常常是无法克服的。

边界元法作为计算力学数值方法之一，它与有限元法和有限差分法相比，各有优缺点，因此可根据问题的条件而选用。对于工程应用和力学研究而言，对边界元法的了解越深入，则越能正确和有效地发挥它的功用。

虽然从原理上看，边界元法只是利用基本解建立边界积分方程，然后利用边界离散技术就行了，但是在具体应用边界元法去解决一个新问题时，仍会遇到特殊的困难需要克服。

本书内容涉及面广，从弹性静力学到弹性动力学，从弹塑性有限变形问题到船舶稳态流场和兴波问题，从应用于个别问题程序研制到固体力学边界元分析通用程序的开发。针对各章中问题的难点探求方法的创新，由此揭示发展边界元法的思路和规律，以提高用边界元法解决新问题的能力。

本书的各章内容均来自作者及其合作者自 1983 年以来的研究成果，这些成果主要是在 4 篇硕士论文和 3 篇博士论文中完成的。本书第一章是绪论，包含作者在边界元法研究中所取得的认识；第二章和第三章是弹性静力学和弹性动力学，是本书的基础性内容，作为边界元法的入门而与其他边界元法教材相衔接，为此，力求在原理、方法和技巧上作透彻的阐述；第四章对弹性动力学提出一种新的傅氏本征变换-边界元法；第五章和第六章研究了弹塑性有限变形的边界元法，这在当时是一个十分困难的几何-物理双非线性问题；第七、八、九章研究了刚体和流体耦合运动、船舶稳态流场和船舶兴波问题的边界元法，从中可以看到边界元法对这类

问题的特殊有效性;第十章作为本书的一个特点,扼要介绍了固体力学边界元法通用程序 BESMAP,边界元法通用程序是国内外普遍重视并尚在发展的领域,是边界元法走向工程应用的关键。

边界元法的精度、效率和适应性是普遍关注的问题,本书对此作了必要的讨论,在各章中也尽量揭示边界元法的优点并加以充分利用。

限于作者水平,书中难免有缺点和不妥之处,敬请指正。

嵇 醒 1996.9.28

目　录

第一章　绪论

§1.1　弹性力学与数值方法

线性弹性力学问题归结为在给定的边界条件下，求解一组线性偏微分方程组。在理论上，这种边值问题有唯一确定的解，但一般难以求得解析解。除弹性力学平面问题的复变函数解法属于正演解法外，其余弹性力学问题都只能用逆解法或半逆解法。逆解法和半逆解法的成功率很低，不能满足工程的需要。

以前，在得不到解析解的时候，人们或者采用差分法，按差分格式离散以获得数值解；或者按问题的特点，选取试函数，采用里兹法或伽辽金法等近似方法来获得近似解。这些近似法总有这样或那样的缺点而不能令人满意。

50年代初，有限元法一经问世，就显示出它的巨大的优越性，迅速被众多的科学家和工程师们所接受。有限元法把差分法的离散改造成更为灵活的有限元离散，把里兹法的试函数近似换成插值函数近似，以弹性力学变分原理作为推导的根据，并充分利用电子计算机的计算能力，从而开拓了现代数值方法的广阔领域。

有限元法简单直观，易于掌握，而且适用范围广，计算效率好，数值精度也较高。人们已用它来求解各种力学和非力学问题、线性和非线性问题，均能取得好的成效。有限元法特别适合于求解大型复杂结构的静力学和动力学问题。有限元法还允许把求出各种问题的程序纳入到一个程序系统以形成通用程序包。现在功能齐全的大型通用程序包已经商品化，在科学研究和工程应用中起到了愈来愈大的作用。但是，有限元法和有限差分法一样，需在整个求解域上进行离散，对于形状复杂的三维体，有限元的网格剖分，仍然不是一件轻松的事情。

边界元法是继有限元法之后的一种别具特色的新的数值方法，它是将描述弹性力学问题的偏微分方程边值问题化为边界积分方程并吸收有限元法的离散化技术而发展起来的。将弹性力学问题归结为求解一组边界积分方程，若在边界上已知3个位移分量和三个面力分量中的三个分量，则由边界积分方程可以确定其余三个未知分量，而任意内点的位移和应力可由6个边界分量通过边界积分来确定，这就是边界积分方程方法。边界积分方程有奇异性，解析求解极为困难。有限元法所取得的成就吸引人们对边界积分方程在边界上划分单元进行离散，然后由全部边界节点的3个已知边界量求出全部边界节点的另外3个边界量，这就是边界元法的由来。边界元法中包含有有限元法的思想，它把有限元法的按求解域划分单元离散的概念移植到边界积分方程方法中，但边界元法不是有限元法的改进或发展，边界元法与有限元法存在着质的差异。

有限元法要在整个求解域上进行离散，边界元法只在求解域的边界上进行离散。有限元法是完全的或全域的数值方法，而边界元法在域内采用了弹性力学基本解和 Somigliana 积分，数值计算只在边界上进行，它属于半解析半数值方法。不难看到，边界元法具有有限元法所没有的优点。人们对边界元法的兴趣和信心不断增强，研究的范围不断扩大。人们也已用它来求解各种力学和非力学问题、线性和非线性问题，取得了很好的成效。

在弹性力学中，边界积分方程、变分原理和基本微分方程是等价的。这三条途径在理论上都可以用来寻求弹性力学的唯一解，然而已有的弹性力学解析解几乎全部是用基本微分方程来求解的。对于数值解，则情况有所不同。由基本微分方程出发导致有限差分法，由变分原理出发导致有限元法，由边界积分方程出发导致边界元法。这三种数值方法中，有限元法和边界元法现在占主导地位。

在弹性力学中，和基本微分方程等价的变分原理不是唯一的，有各种变分原理并存着。人们可以用一种变分原理去建立一种对

应的有限元法,从而演化为有限元法的多样性,如位移法有限元、应力法有限元和混合法有限元等等。近年来,胡海昌提出了一类新的边界积分方程,用它可以建立一种新的边界元法,从而边界元法也不只是一种。

有限差分法、有限元法和边界元法都是数值方法,都可归属于正演数值解法。但是,利用它们得不到解析解,只能得到离散的数值解,这是它们的最大弱点,可是它们能利用计算机程序保证得到足够准确的结果。它们在工程应用中的作用是无法估量的。弹性力学从来没有像现在这样通过有限元法和边界元法能与工程直接沟通。

§1.2 边界积分方程方法

边界元法的研究始于五六十年代。Rizzo 于 1967 年提出对弹性力学边界积分方程按边界离散的思想,是弹性力学边界元法研究的开端,而边界积分方程方法的形成却要追溯到弹性力学建立的初期。

19 世纪中叶,Kelvin(1848)求解了集中力作用于无限大物体内的一点上的问题。Kelvin 解是弹性力学的基本特解。在一般体积力作用下的特解可以用 Kelvin 解按叠加法而得到。Betti(1872)提出了互等定理。这个定理揭示了两组弹性力学解答之间的联系,即第一组力在第二组位移上的功等于第二组力在第一组位移上的功。这个定理和 Kelvin 解的结合却产生了意想不到的结果。Somigliana(1885)看到了这一点,对待求解和 Kelvin 解采用了 Betti 互等定理得到了用边界位移和面力表示内点位移的边界积分公式,从而为边界积分方程的建立作好了理论的准备。从 Somigliana 积分到边界积分方程只有一步之遥,却整整花去了半个世纪,因为必须等到积分方程的数学理论充分建立以后,人们才能跨越这一步。

Somigliana 积分用含有 3 个边界位移分量和 3 个面力分量的

边界积分来表示内点的位移。这个公式不能直接利用,因为在弹性力学问题中必须也只能给定这6个边界量中的3个。但是,如果把这个内点移到边界,则Somigliana积分就可以化成所需的边界积分方程。这组边界积分方程可以用来确定未知的3个边界量,这就是边界积分方程方法。用边界积分方程方法来求解弹性力学问题,并不比用基本微分方程来得容易,所以在边界元法建立之前,边界积分方程方法几乎没有什么实际的用处。

Brebbia(1978)用加权余量法来推导边界积分方程。他指出加权余量法是最普遍的数值方法,有限差分法、有限元法和边界积分方程——边界元法,都可以从加权余量法推导出来,区别在于取了不同的权函数。如果以Kelvin解作为权函数,从加权余量法中导出的将是边界积分方程——边界元法。用加权余量法推导边界积分方程——边界元法是一种广泛而简捷的方法,但如果想知道形成边界元法的历史进程,则还需作本节前段的说明。

§1.3 边界元法概述

尽管有限元法所取得的成就与日俱增,但有限元法还不是十全十美的。改进有限元法的努力一直在进行着,但有限元法的某些不足是无法克服的。例如有限元法需全域离散,导致问题的自由度和原始信息量大;对无限域只能人为地取成有限域;有限元法的离散技术本身也存在着缺陷,它把本来是连续的介质用仅在节点处连接的有限单元的集合来模拟,这样不仅带进了离散的误差,而且在单元之间连续的要求较高时,有限单元的构造也很困难;对有限元法的精度和可靠性也常常会提出疑问,因为对同一问题采用不同的程序计算时可能会得出不同的结果。

有限元法的不足看来只能用边界元法来弥补。边界元法仅在边界上离散,使数值计算的维数降低一维,从而减少了问题的自由度和原始信息量。边界元法采用无限域的基本解,用边界元法求解无限域问题可称是天衣无缝。边界元法的离散误差只产生在

边界上,边界元法中部分采用数值法,部分采用解析式,它的准确度和可靠性已公认是高于有限元法。边界元法在弹性力学中扎的根比有限元法还要深一些。

边界元法的研究开始于五六十年代,经过对弹性力学和塑性力学问题的初步尝试后,没有能够得到满意的计算结果。边界积分方程和从有限元法借鉴来的边界离散技术两者不是一试就灵的。较为完整的、可以实际应用的边界元法是70年代才建立起来的。英国南安普敦大学 Watson 和 Lachat 的两篇博士论文最后奠定了边界元法数值技术的基础。Lachat(1975)在三维弹性静力学问题的边界元法中,彻底解决了边界积分方程中含有的奇异积分的精度问题。他用刚体位移法和退化单元法各消除积分中的一次奇异性,剩下的不带奇异性的积分,只要用普通的高斯(Gauss)数值积分法就可以获得足够的精确度,从而使边界元法固有的精度得以显露出来。他的这一研究也启示人们,对边界积分方程中的积分的奇异性需要采用消除的方法。应用普通高斯积分去求奇异积分是不会成功的。从此边界元法走上了顺利发展的道路。

80年代可称是边界元法蓬勃发展和丰收的年代。

§1.4 边界元法的发展

从积分方程方法用于工程结构分析至今已有约40年的历史,纵观这40年来边界积分方程——边界元法的发展和今后的发展预测可分如下几个时期:

一、萌芽与奠基期(1950~1978)

50年代初期,Muskhelishvili(1953)将积分方程方法用于结构力学分析,Kellogg(1953)用积分方程方法求解 Laplace 问题,这便是边界元法的前身。

现代边界积分方程方法与 Fredholm 的工作有着直接的关系,他讨论了建立在离散技术上的求解方法。关于间接边界元法的概

念是 Jaswon，Hess，Symm 和 Massonnet 等形成的。关于直接边界元法，曾出现在 Kupradze 的著作中，但更多的早期工作是 Rizzo 和 Cruse 用边界积分方程方法求解经典的弹性力问题和弹性动力学问题。

在这一时期，Richard Shaw 对波的传播问题的边界积分方程方法进行了广泛的研究。1960 年，他完成了博士学位论文，并在其后发表了两篇重要论文，提出了有任意形状障碍的声波脉冲的瞬态散射问题的边界积分方程方法。另外，他还对弹性动力学间接边界积分公式、三维散射问题、流固耦合问题、特征值问题、扩散问题和渐近膨胀解等进行了研究。

1963 年，Jaswon 和 Ponter 讨论了扭转问题的积分方程方法，第一次利用了边界值和法向导数的积分关系。同年，Jaswon 对 Laplace 方程由势理论建立了边界积分方程的数值方法，为间接边界元法的提出作出了重要贡献。其后，Jaswon 等人建立了平面弹性静力学的边界积分方程，提出了数值求解的有效途径，并首次用边界积分方程方法求解了板弯曲问题。

1966 年，Symm 建立了保角映射下的边界积分方程。1969 年他发展了边界积分方程在势问题包括热传导分析方面的应用。

1967 年，Rizzo 运用 Betti-Somigliana 公式建立了弹性静力学问题的边界积分公式，指出了边界位移和面力的函数关系。虽然这些公式的数学理论源于 Kapradze 的著作，但是 Rizzo 以一种简明的形式提出了与当今边界元法有着密切联系的公式。其后，Cruse，Rizzzo 和 Shippy 对这些边界积分公式进行了数值求解。

边界元法实施的困难之一是积分奇异性的处理。Symm 在 70 年代对二维势问题的边界积分方程中的积分奇异性问题进行了研究，并发展了计算软件。

1973 年，Brebbia、Watson 等将边界积分方程应用于应力分析问题。1975 年，Lachat 完成了他的博士论文，第一次使用高次单元求解三维弹性静力学问题，彻底解决了边界积分方程中的奇异积分问题，大大提高了计算精度，为边界元法的发展作出了非常重要的