

高等学校教学用书

金属的力学性质

(修订版)

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

高等学校教学用书

金属的力学性质

(修订版)

何肇基 主编

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店总店科技发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张13 3/4 字数329千字

1982年11月第一版 1989年5月第二版

1989年5月第三次印刷

印数12,341~14,440册

ISBN 7-5024-0476-7

TG·71(课)定价2.75元

再 版 前 言

本书是按照冶金工业部1987~1990教材编写出版规划而进行修订的。根据多年来的教学实践和读者的反映,修订时精简了教材中少量次要的章节和段落,更新了部分内容以引入更多成熟的学科成就,对个别章节进行了改写,全书的总字数有所压缩。但这本教材仍然以阐明金属材料在力或力与其他外界因素联合作用下所表现出的行为作为基本内容,并且把重点放在对金属力学性质的物理概念和规律性方面的阐述上,原书的整体布局基本不变。

原书编写成员分别承担各自编写章节的修改任务,即第一、二、六、七、八、九章—何肇基,第三、四章—彭心平,第五章—李承基,第十章—宋沂生。宋沂生同志任主审,何肇基最后集中整理。

希望读者在教学和阅读过程中直率地指出本教材中的错误和不足,这是全体编写成员由衷的希望。

编 者

1988年8月

第一版前言

本书是根据冶金工业部1977年教材工作会议上制订的教学计划及“金属力学性质”课程的教学大纲编写的。它主要是阐明金属材料在力或力与其他外界条件联合作用下所表现出的行为及性态的变化。

本书的重点是放在金属力学性质的物理概念和规律性方面。考虑到部分读者未曾学习过弹性力学，因此在本书第一章扼要介绍一些有关应力和应变状态的概念，这些概念不见得是本书需要直接引用的内容，但对于从事力学冶金工作的读者，掌握这些知识是有必要的。第二章到第六章是讨论金属材料在单纯的力或能的作用下所产生的变化，第七章到第九章则是叙述环境条件与力（能）联合作用下金属材料的力学性质。本书最后两章比较详细地叙述了金属的强度、强化和断裂行为的基本原理，侧重于从冶金和断裂机制来分析问题。

本书是由武汉钢铁学院及北京钢铁学院合作编写的，各章具体执笔的同志是：第一、二、三、七、八、九、十章——何肇基，第四、五章——彭心平、曹念孙，第六章——李承基，第十一章——宋沂生。宋沂生同志指导本书的编写并做最后的审定，何肇基同志担任全书的总成。武汉钢铁学院、昆明工学院及北京钢铁学院等单位的同志参加本书的讨论及审查，北京钢铁学院金相教研室全体老师对本书的编写工作给予了大力协助，作者对此表示衷心的感谢。书中有个别图和段落是借用兄弟院校教材的，未来得及征得同意，请原谅。

阅读本书的学生应先具备一定的金属学和工程力学方面的基本知识。我们力图做到把金属的宏观机械性能和微观的金属组织结构有机地联系起来，我们还尽可能的把力学冶金学科中比较成熟的新成就介绍给同学。但是参加编写工作的全体同志并不具备力学冶金方面的专门知识，我们仅仅是把这次编写工作看成是一次认真学习的好机会，仓促成书，缺点及错误在所难免，谨望读者不吝指正。

编 者

1981年12月

目 录

序	1
1 金属的弹性行为	3
1.1 应力状态	3
1.2 应变状态	4
1.3 广义虎克定律	7
1.4 弹性的物理本质	9
1.5 金属的弹性模量	11
1.6 弹性反常现象	14
1.7 金属的滞弹性	17
2 金属的塑性变形	21
2.1 拉伸试验曲线	21
2.2 屈服现象	21
2.3 拉伸均匀变形和颈缩	26
2.4 塑性状态下的应力-应变关系	28
2.5 应力状态对材料力学行为的影响	30
2.6 应力集中	32
2.7 材料的硬度	35
2.8 应力(应变)诱发相变	36
3 金属的冲击韧性	40
3.1 在冲击负荷作用下金属变形和断裂的特点	40
3.2 一次冲击试验	41
3.3 多次重复冲击试验	47
4 金属的断裂韧性	51
4.1 引言	51
4.2 断裂韧度的基本原理	52
4.3 J 积分概念	61
4.4 裂纹尖端张开位移	62
4.5 断裂韧度指标的工程应用	64
4.6 断裂韧度与材料组织结构的关系	67
5 金属的机械疲劳	71
5.1 金属疲劳的经验规律	71
5.2 疲劳裂纹的萌生、扩展及断裂	75
5.3 影响疲劳寿命的主要因素	81
5.4 接触疲劳	90
6 金属的高温强度	94

6.1	高温环境下材料面临的问题	94
6.2	高温力学性能试验方法	95
6.3	金属的蠕变	97
6.4	金属的高温强度	104
6.5	超塑性	106
7	金属的应力腐蚀	110
7.1	概述	110
7.2	阳极反应敏感型应力腐蚀	112
7.3	氢脆型应力腐蚀	118
8	金属的强化	127
8.1	纯金属单晶体的强度	127
8.2	晶界强化	132
8.3	固溶强化	138
8.4	分散强化	142
8.5	应变强化	148
8.6	有序强化	153
8.7	点缺陷强化	156
8.8	马氏体强化	162
9	晶须、非晶态金属及纤维增强复合材料的性质	166
9.1	晶须的强度	166
9.2	非晶态金属的强度	168
9.3	纤维增强复合材料的抗变形能力	172
10	金属的断裂	178
10.1	引言	178
10.2	理论断裂强度	178
10.3	Griffith的裂口理论	180
10.4	裂纹在承受应力情况下的位错模拟	184
10.5	Griffith方程与拉伸断裂	189
10.6	断口形貌与断裂机理	192
10.7	本质脆性和塑性	202
10.8	塑性-脆性转化	204
10.9	裂纹形核	207
10.10	塑性-脆性转化理论	209

序

近三十年来, 由于工程技术及自然科学发展的需要, 在冶金学的领域中出现了一个新的学科分枝——力学冶金, 它是研究在力或力和其他外界因素联合作用下, 金属的行为和性态及其变化的一门科学。

力学冶金包含着相当广泛的研究内容, 它既需要研究金属在力的作用下表现出的种种规律性, 以指导金属的变形和加工的具体实践; 同时, 它还要研究金属材料在各种机械性能试验过程中所发生的行为, 说明由此而获得的机械性能指标的物理意义, 并对其实用范围进行鉴定; 更重要的是必须把金属表现的力学行为和冶金学联系起来, 探讨有关变形和断裂的微观机理, 用以解释各种变形、强化、断裂的宏观现象, 研究冶金因素对这些过程的影响及其实质; 最后在金属的内在状态和外界条件与力学行为之间建立起有机的联系。通过对这些规律性和物理本质的探讨, 给金属材料的加工、使用和研制以理论指导。也就是说, 在掌握这门学科原理的基础上, 掌握各种金属材料能够承受而不致失效的临界受载范围, 了解在不同的应力状态下使用时选择金属材料的基本原则, 为如何以最低的能耗、最大的效率来进行金属加工提供理论根据; 对新的合金材料的设计、冶金质量的改善, 从力学性能的角度提出合理的建议, 等等。因此, 这是一门与生产实际结合很密切的科学。同时, 由于内容相当广泛, 它需要从其他有关的学科中吸取大量成熟的理论和实验规律来充实。这门学科和力学、金属学与金属物理、金属材料学等学科的联系是相当紧密的。

这门学科是从下面几个观点出发来开展研究的:

1. 宏观强度理论——把研究的对象假定为连续的、均质的、在多数情形下是各向同性的介质, 从物体的宏观应力和应变关系出发, 以有限的材料常数为基础, 建立起物体受载后的数学方程, 最终导出材料强度和变形的数学关系。属于这个领域内容的包括连续介质的弹性理论、塑性理论等。

2. 微观强度理论——以金属是由原子通过金属键结合而成的晶体这样的前提出发, 利用晶体结构理论、晶体缺陷理论等来解释材料的力学性质, 确定机械行为与材料内部组织之间的相互关系, 对改善金属的力学性质提出方向性的意见。这种理论是在金属学和金属物理的研究成果上进一步发展起来的。

3. 断裂力学理论——是最近三十年间迅速兴起的一门新兴学科, 它是宏观强度理论向微观区域延伸的一个新分支, 主要研究材料的破断行为。它和前者的区别是引入了物体内部存在不连续性的假定, 研究对象的体积可缩小到亚微观区域, 但是研究的方法基本上仍属于宏观力学的范畴, 不过已有借助于微观强度理论进行分析的尝试。

宏观和微观强度理论无论是在研究的前提上还是在研究的方法上都有很大的差别, 它们要解决的任务也并不相同, 力学冶金的任务之一就是要把它们各自研究的成果统一成有机的、完整的科学规律, 建成独立的学科体系。这是一个很困难并且远未完成的任务, 我们现在还只能根据不同的需要分别选择合适的理论来解决不同的实际问题。一般说来, 物体中仍然保持连续介质特性的物理点的最大线尺寸为 $10\sim 100\text{nm}$, 而其性能可以用宏观试验结果来表示的物理点的最小尺寸是 $0.1\sim 1\text{mm}$, 宏观强度理论研究的是大体积范围内 (cm

级以上)材料表现的性能,其中最主要的是弹性和塑性,断裂力学可以深入到 10^{-2} mm的亚微观区域用以讨论裂纹扩张的特性,但是在研究与金属的组织、结构有关的力学性质方面,诸如解释滑移、屈服、强化、断裂等现象的本质时,我们就不能再把对象考虑成均匀的介质,而必须通过晶体结构理论、位错理论、相变理论等,从流变与断裂的原子运动过程来说明材料的性态和冶金因素的作用。

和金属的其他物理性能一样,在力学性质中,有一些是受组织的变化影响不大的,这些性质是由组成物体的各物理点共同变化而引起的,称为组织不敏感的性质。例如在弹性变形中,物体的变形实际上取决于所有微小体积的共同变形,而与组织关系不大。另外一类是对组织敏感的性质,这些性质往往取决于所有物理点中最弱的部分。比如说,在疲劳断裂时,裂纹总是在材料内部最薄弱的部位首先形核,同样也是沿着最薄弱的组织向前扩展的,所以疲劳强度就有很大的组织敏感性。外界条件和内在状态的变化对这类性质的影响相当显著,在工程中广为应用的机械性能指标中,大部分是属于组织敏感的,因此对这类性质的研究也倍受注意。显然,用宏观强度理论来研究这些对组织敏感的性质是不会有效果的,因为这种理论研究的对象是连续、均匀的介质,它没有考虑材料内部细节的变化和从而引起性质的波动,这样就难于对各种冶金因素影响的效果作深入的分析了。因此,在力学冶金中更侧重于使用微观强度理论来讨论和研究问题。

在一定的意义上说,力学冶金仍然是一门实验科学,它的进步和成熟同金属学、金属物理、力学等学科实验的进步是分不开的。比如说,电子显微镜就是很重要的实验工具,它的发展为金属的变形和断裂行为的直观研究提供了极大的方便,对建立金属的组织状态和力学性质的关系给予很有力的支持,并为金属的位错理论提供了多方面的实验证明。今后,力学冶金这门学科仍然期待着从显微技术、射线技术、物理性能测试技术和力学性能试验技术的新成就来丰富其内容、验证其理论、发展和充实自己。

力学冶金领域的内容是不能以一本基础教材全部囊括的,即令我们把内容限制在基本的力学冶金原理方面,仍然有大量的内容不得不割舍,例如磨损、腐蚀疲劳等就没有列入,而且有些内容的叙述不得不采取比较简单和直观的方式;对力学性质规律性的分析多数只停留在定性的阐述上,很少进行定量的推导;至于力学性能试验方面的内容,则在《金属力学性能试验》(何肇基编,冶金工业出版社,1988)中做详细介绍,请读者参考。

1 金属的弹性行为

1.1 应力状态

应力是一种面力。当力沿着截面是均匀分布的时候，应力就是单位截面积上的面力；如果力的分布不均匀，则应力被定义为力对所作用的面面积的导数

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = \frac{dR}{dF} \quad (1-1)$$

ΔR 是在面积为 ΔF 的小块面上的作用力。

在均匀受力状态的常规力学试验中（例如拉伸、压缩试验），常以载荷 P 除以试样原始横截面积 F_0 。所得的比值定义为作用在试样上的应力 S

$$S = \frac{P}{F_0} \quad (1-2)$$

用这种方法表示的应力称为工程应力。但真应力 σ 的概念更能如实反映物体的受力状况，真应力是试样受载过程中任一瞬间单位截面上受到的内力

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad (1-3)$$

F 是试样在载荷 P 作用时的横截面积。

显然，这只是应力的最简单表示方法。在一般情况下，应力不仅仅是有方向和大小的量，同时还与所受截面的位向有关。通过同一点的不同截面上应力矢量并不是相同的，只有首先把截面的位向确定后，我们才能用一个矢量来表示其上任何一点的应力。所谓一点的应力状态，是指能够描述过该点的任何截面上的应力状态的一组应力，这显然不是只用一个应力矢量就能够规定下来的。

在受力的物体内部取一个微小的六面体，沿着它的三条棱边建立直角坐标系，在这个单元体的每个面上都作用有一个应力矢量，如果单元体的体积足够小，就可以认为这个六面体上的应力是均匀分布的。同时，因为物体内部各点的内力是平衡的，因此每一个面上的应力与其相对的面上的应力是等值反向的。把这些应力矢量分别称为 P_x 、 P_y 、 P_z （ P_x 指作用在以 x 为法线方向的面上的应力，余同），其中每一个应力又能分解成一个法向力和两个切向力。

$$[P] = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

这就是表达物体内部给定点应力状态的应力张量。

在上述的六个切应力分量中，根据单元体的力矩平衡的条件，可以证明在互相垂直的两个面上，垂直于公共棱边的切应力是互等的。

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

就是说，与矩阵的对角线对称的分量是相等的。这一来，独立的变量只有六个了。

对于任何一点的应力状态，已经发现至少存在一个正交坐标系，使作用在六面体上的只有正应力，没有切应力。这一系统的坐标轴、力作用的平面和对应的正应力分别称作应力主轴、主平面和主应力。写成

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

因此，一点的应力状态既可以用三个正应力和三个切应力来表示，也可以用三个主应力连同应力主轴的方向余弦来描述。

若主应力已知，就能够确定任何位向的平面上的正应力和切应力了，设该平面相对于以三个应力主轴为坐标系的方向余弦是 l_1 、 l_2 、 l_3 ，则在该平面上的正应力是

$$\sigma = l_1^2 \sigma_1 + l_2^2 \sigma_2 + l_3^2 \sigma_3 \quad (1-6)$$

切应力为

$$\tau = [l_1^2 \sigma_1^2 + l_2^2 \sigma_2^2 + l_3^2 \sigma_3^2 - (l_1^2 \sigma_1 + l_2^2 \sigma_2 + l_3^2 \sigma_3)^2]^{1/2} \quad (1-7)$$

若该平面是平分各主平面夹角的截面，即在 l_1 、 l_2 、 l_3 三个元素中有一个元素为零，其余两个等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。那么，这些平面上的切应力就是主切应力，大小是

$$\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3), \quad \tau_3 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1-8)$$

如果 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，则 τ_2 就是绝对值最大的切应力，它作用在平分 σ_1 与 σ_3 的平面上，方向垂直 σ_2 。

在作变形分析的时候，常常把某点的应力状态看成是两个应力状态的叠加。其中第一种状态使物体受到均匀拉伸（压缩）作用，引起体积的变化而不改变物体的形状，它称作应力的水压分量，是应力状态中的均匀正应力部分。第二种叫作应力偏量，使物体发生形状的变化，却不影响其体积，它的大小由总应力扣除水压分量之后确定。

[总应力] = [应力的水压分量] + [应力偏量]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ & \sigma_0 & 0 \\ & & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

其中 $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ ，称为平均应力或水静应力。

1.2 应变状态

考虑一根杆状物体，沿着轴的方向加载，设长度从 l_0 变至 l ，则下面的计算值 e 被定义为工程应变

$$e = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (1-10)$$

但实际上，当载荷 P 给出一个增量 dP 时，物体的长度就会在 l 的基础上变为 $l + dl$ 。于是应变的微分量是

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l}$$

这根杆自 l_0 变化到 l 后, 总的应变量为

$$\varepsilon = \int_0^\varepsilon d\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (1-11)$$

ε 称为真应变。与工程应变不同, 真应变能比较确切地反映材料的应变程度, 这从下面的例子可以看出来。

如果把这根杆从 l_0 拉长到 $2l_0$, 然后再压缩到原来的长度。显然, 这两次应变变量是相同的, 只是变形的方向相反而已。然而经过计算, 工程应变和真应变的结果却不一样

$$\text{拉伸时} \quad e_1 = \frac{2l_0 - l_0}{l_0} = 1; \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{2l_0}{l_0} = \ln 2$$

$$\text{再压缩时} \quad e_2 = \frac{l_0 - 2l_0}{2l_0} = -\frac{1}{2}; \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{l_0}{2l_0} = -\ln 2$$

真应变还有一个工程应变不存在的性质, 即它具有可加性。以这个例子来说, 当杆经两次变形最后回到原来的长度时, 它的总变形量应该是零, 这和以原始长度和最终长度来计算出的结果应是一致的。

$$\varepsilon = \ln \frac{l_0}{l_0} = 0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

但工程应变并不能满足这种可加性要求

$$e = \frac{l_0 - l_0}{l_0} = 0 \neq e_1 + e_2$$

可见真应变能更真实地反映材料的变形行为。

工程应变和真应变的关系是

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln (1 + e) \quad (1-12)$$

由于 $\ln(1+e) = e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 \dots$, 所以形变量越大, ε 与 e 数值的差距也越大。但在小变形量时, 两者是近似相等的。在工程结构的设计中, 多数把构件的变形限制在弹性范围之内, 这时 ε 和 e 的微小差别可以不必考虑, 此时使用工程应变进行计算却更为方便。但在研究金属多道次轧制、拉拔等压力加工行为时, 是要用真应变的概念进行分析的。

以上所述的应变指标, 只能用来表示最简单受力状态下的均匀变形行为。和点的应力状态相似, 点的应变状态同样需要以张量来表示。设物体内一点 $P(x, y, z)$ 由于变形位移至 $P'(x', y', z')$, 这时, 沿着三个轴方向的位移函数是

$$u = x' - x; \quad v = y' - y; \quad w = z' - z$$

u 、 v 、 w 都是点坐标的函数。

正应变描述物体长度方向上的变化, 沿着轴方向的正应变等于位移函数对距离的导数

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-13)$$

切应变是指两个正交线段之间直角的相对变化。例如 x 和 y 方向所夹的直角发生变形后，切应变以 γ_{xy} 表示

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \text{同理} \quad \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

要完整地反映一点的应变状态，同样需要9个应变分量，（其中三对切应变是互等的）。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

和应力状态相似，点的应变状态中也存在三个互相垂直的方向，在以它为法线的面上没有切应变。这样的方向称为应变主轴，对应的面是主应变面。沿应变主轴方向的正应变是主应变，以 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 表示。对于各向同性体，主应变和主应力的方向是重合的。以主应变方向为轴的单元体上只有纯粹的拉伸或压缩变形，变形后各个直角不变。此外，主切应变为

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1; \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (1-16)$$

当 $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ 时， γ_2 为最大切应变。

可以把物体的变形分解成体积变化与形状变化两部分，一点的应变状态也就看作是应变的水压分量和应变偏量之和。水压分量是体积变化那一部分应变，应变偏量则与形状的变化有关。

$$\begin{aligned} & [\text{总应变}] = [\text{应变的水压分量}] + [\text{应变偏量}] \\ & \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon_0 & 0 \\ & & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (1-17) \end{aligned}$$

式中 $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ ，是平均应变。

如果要计算变形前后体积的相对变化，取边长为 dx 、 dy 、 dz 的单元体来考虑，其体积应变是

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)dxdydz - dxdydz}{dxdydz} \\ &= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 \end{aligned}$$

应变较小时，略去高次项后

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1-18)$$

可见体积的相对变化等于平均应变的三倍。

1.3 广义虎克定律

设 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 分别是作用在某弹性体上的正应力分量和切应力分量，由此产生的正应变和切应变相应为 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 与 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} ，则任何一个应变分量与各应力分量之间都具有线性关系，即

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{13}\sigma_z + s_{14}\tau_{xy} + s_{15}\tau_{yz} + s_{16}\tau_{zx} \\ \varepsilon_y &= s_{21}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{23}\sigma_z + s_{24}\tau_{xy} + s_{25}\tau_{yz} + s_{26}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z &= s_{31}\sigma_x + s_{32}\sigma_y + s_{33}\sigma_z + s_{34}\tau_{xy} + s_{35}\tau_{yz} + s_{36}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= s_{41}\sigma_x + s_{42}\sigma_y + s_{43}\sigma_z + s_{44}\tau_{xy} + s_{45}\tau_{yz} + s_{46}\tau_{zx} \\ \gamma_{yz} &= s_{51}\sigma_x + s_{52}\sigma_y + s_{53}\sigma_z + s_{54}\tau_{xy} + s_{55}\tau_{yz} + s_{56}\tau_{zx} \\ \gamma_{zx} &= s_{61}\sigma_x + s_{62}\sigma_y + s_{63}\sigma_z + s_{64}\tau_{xy} + s_{65}\tau_{yz} + s_{66}\tau_{zx}\end{aligned}\quad (1-19)$$

这就是适用于各向异性线弹性材料的广义虎克定律。式中的 s_{ij} 是应变分量与应力分量之间的比例系数，称为弹性柔度，共有36个。但是由于弹性变形的可逆性，可以证明存在着 $s_{ij}=s_{ji}$ 的关系，因此即使在最普遍的各向异性的条件下，也只有21个弹性柔度是独立的。只要掌握了一种材料的这些系数值，就能建立起施加在物体上的应力和对应的应变之间的关系了。

对于晶体，由于存在对称性，独立常数的数目还能进一步减少。比如我们常见的对称性最高的是立方晶系的单晶体，它只有三个独立的弹性常数

$$\begin{array}{ccccccc}s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & s_{44} & 0 & 0 \\ & & & & s_{44} & 0 \\ & & & & & s_{44}\end{array}\quad (1-20)$$

各向同性体中还存在一个关系式 $s_{44}=2(s_{11}-s_{12})$ ，因此只有两个非零的独立的常数 s_{11} 和 s_{12} 。若令

$$E = \frac{1}{s_{11}} \quad (1-21)$$

$$\nu = -\frac{s_{12}}{s_{11}} \quad (1-22)$$

$$\mu = \frac{1}{2(s_{11}-s_{12})} \quad (1-23)$$

则虎克定律可以改写成工程上广泛应用的形式：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{\mu} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{\mu} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

方程 (1-24) 只用于各向同性线弹性体上，它有好些不同的表达形式，例如可以变换成下面的写法

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2\mu(\varepsilon_x - \varepsilon_0) \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2\mu(\varepsilon_y - \varepsilon_0) \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2\mu(\varepsilon_z - \varepsilon_0) \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

这是广义虎克定律的另一种形式。

此外，我们把按下列公式计算出来的应力称为广义应力（应力强度）

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \\ \text{而 } \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 3(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)/2} \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

称作广义应变（应变强度），若把式 (2-25) 及 $E=2\mu(1+\nu)$ 代入这两公式，将最后得到

$$\sigma_i = E\varepsilon_i \quad (1-27)$$

这是用广义应力和广义应变表示的虎克定律，是描述弹性状态下应力与应变关系的最简单形式：在弹性范围内，单元体的广义应力正比于广义应变。

E 、 μ 和 ν 就是正弹性模量、切变弹性模量和泊桑系数。这些参数连同体积弹性模量 K 一起，构成了描述各向同性材料弹性行为的基本指标。体积弹性模量是当物体受到流体静压力时，压强 p 与体积应变 Δ 之间的比例系数

$$p = K\Delta \quad (1-28)$$

不过，由于各向同性体只有两个独立的弹性系数，所以 E 、 μ 、 ν 、 K 指标之间还以下的两个关系式联系着

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1-29)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1-30)$$

上述指标是机器和构件在设计过程中必不可少的参量，例如力学中经常使用的“刚度”就是由此派生出来的一个概念，因为

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma = \frac{P}{EF}$$

故

$$EF = \frac{P}{\varepsilon} \quad (1-31)$$

式中 F 为试样承载截面积； P 为外加载荷； ε 为受载后构件的应变。 EF 被称为刚度，它表示构件产生单位弹性变形所需载荷的大小。在设计中外载荷一旦被确定后，若要减少构件的弹性变形，可以通过选择高模量的材料或加大构件横截面面积的方法来解决。

既然弹性变形并不会引起结构的破坏，那么刚度有什么意义呢？

刚度是衡量构件稳定性的指标之一，刚度小的构件受载后会产生较大的弹性变形。过量的弹性变形有可能使构件呈现不稳定状态，对于薄壁构件和细长杆件，这类情况更可能发生。设计上经常会遇到这样的情况：用一种材料制造某种构件，按照强度校核是绰绰有余了，然而由于材料的弹性模量不够，构件受力后会产生过量弹性变形甚至达到失稳的程度，在这样的情况下，我们宁可选用强度性能低一些但弹性模量较高的材料来制造。例如用于制造飞机结构的铝合金，目前的强度水平大体在抗拉强度 650 MN/m^2 以下，这时构件的弹性变形可以保持在允许范围以内（1% 以下），但若为了进一步减轻飞机自身的重量而选取强度更高的铝合金来制造的话，构件的截面积减少了，刚度就会不够。因此弹性模量和强度一样，都是设计过程中必需考虑到的材料重要性能之一。

机床上很多零件也是按刚度设计的，因为弹性变形过大会影响到被加工零件的尺寸，例如镗床上的镗杆如果刚度不足，镗杆本身的弹性变形会使镗出的孔直径偏小，并且不准确。

为了选择空间飞行器用的材料，使结构既有高的刚性又有较轻的重量，有时候使用“比弹性模量”的概念来作为衡量材料的一个标准。

$$\text{比弹性模量} = \frac{\text{弹性模量}}{\text{密度}}$$

几种常用结构材料的比弹性模量数值如下：

金 属	铜	钼	铁	钛	铝	铍	氧化铝	碳化硅
比弹性模量 ($\times 10^8 \text{ cm}$)	1.3	2.7	2.6	2.7	2.7	16.8	10.5	17.5

可以看出，大多数金属结构材料的比弹性模量相差不远，只有铍显示出突出的长处，而一些难熔化合物的数值则比较高。这是近年来这类材料在空间技术中有广泛应用的一个原因。

1.4 弹性的物理本质

金属的弹性行为起源于其内部晶体点阵中原子相互间具有抵抗分离、压缩或剪切移动

的本能。

当金属凝聚成为固体时，原子之间相互靠拢，这时同时产生了原子间的吸引力与排斥力。对于以金属键结合为主的固体，粗浅地说，吸引力是金属正离子与公有电子间库仑引力作用的结果，这是一种内聚力，由此而产生的能量是势能。公有电子的运动却引起排斥力，因为在电子运动过程中被金属原子“表面”反射回来时运动方向的改变会引起惯性力，它类似于在理想气体中气体分子的压力，是动能造成的作用力。两种力（能量）的大小是随原子间的距离而变化的，当金属中任何一个原子和近邻的原子间的交互作用力达到平衡的时候，金属就处于最低的能量状态。

在外力作用下，物体产生变形，其内部的原子间距也相应改变。这样，原有平衡状态的破坏就导致与外力相抗衡的内力的出现。在所加的外力尚不足以使固体内部产生质的变化的前提下（如物体内部位错不可逆的运动，裂纹的形成和扩展等），一旦外力撤除后，物体内部的原子就能自动恢复到平衡距离，重新达到最低的能量状态，于是物体也回复到原来的形状了，这就是弹性变形的根源。从本质上说，弹性力就是物体为了反抗内部原子偏离平衡位置所产生的内力。

正弹性模量或切变弹性模量可以用来表征物体抵抗弹性变形的能力。假设某个完整晶体受到一个切应力 τ 的作用，因而沿两晶面之间产生了切应变。如图1-1所示，当平行的两个晶面受力发生相对位移的时候，其中任何一个原子都受到与外力方向相反的弹性力的作用，原子偏离其平衡位置愈远，弹性力就愈大。最大的弹性力出现在偏离的距离约等于 $b/4$ 的位置上，也就是最大的弹性变形点，超过了这个位置之后，由于进入了其他原子的作用范围，位移的原子受到的弹性力逐渐减少，这时候，如果外力去除，位移的原子是不能回到原有位置上来的。作为近似，假定平均到每个原子上的切变弹性能 W 的大小与原子偏离距离 x 之间具有类似余弦曲线的函数关系

$$W = -W_0 \cos \frac{2\pi}{b} x$$

在没有应力作用时，原子处于该曲线的能谷的正常位置上。与弹性能曲线相对应的作用力的曲线是

$$R = \frac{\partial W}{\partial x} = R_0 \sin \frac{2\pi}{b} x$$

R 可看成是原子由于偏离平衡位置而产生的作用力，也可以看作是为了使物体产生应变而施加的外力。

按定义，剪切弹性模量 μ 是外加切应力随切应变的变化率，因此它是与点阵原子间作用力的导数是成正比的

$$\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} \propto \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \mu_0 \cos \frac{2\pi}{b} x \quad (1-32)$$

所以金属的弹性模量与金属内部结合键的强度是很有关系的，它是反映原子间结合力（结合能量）的一个参量。具体地说，弹性模量将随原子间结合力曲线的一阶导数或原子间结合能量曲线的二阶导数正比例地变化。

但是如果使用上述三角函数的形式来描述微观原子间结合力（能量）变化的趋势的话，就会出现一些与客观事实不相符合的地方。第一，在图1-1中，原子偏离距离为 $b/4$ 时

达到最大的弹性变形，倘使在应力方向上点阵周期长度 b 和面间距 a 相等，则弹性变形的最大值为25%，但是常用的金属材料发生弹性变形的范围最多不超过1%。即使是具有很高弹性极限的晶须，其拉伸伸长率也只有百分之几。第二，图1-1所表示的原子间结合力和原子偏离距离的关系曲线并不是直线，弹性模量也不是常数，但宏观的弹性体中最通用的经验公式却是应力和应变具有正比关系的虎克定律，弹性模量在整个弹性变形范围中被认为是恒定的。

使用什么样的数学形式才能更恰当地表达原子间结合力（能量）随原子间距离变化的关系？这还需要更深入的分析，不过上述矛盾现象的出现是因为实际晶体中存在着缺陷造成的。

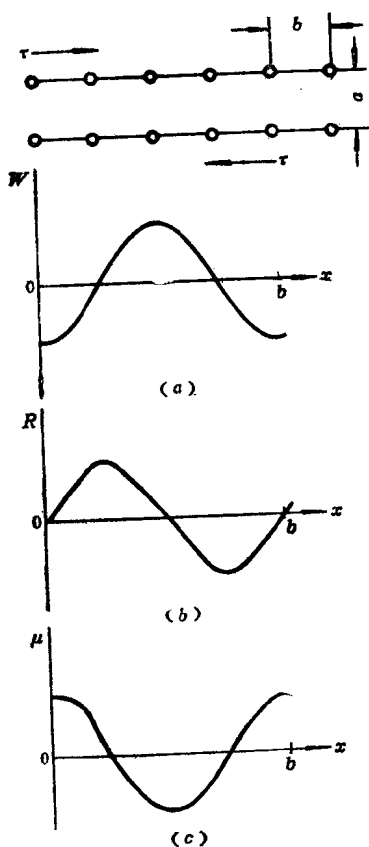


图 1-1 晶体中原子间结合能量、结合力和弹性模量变化曲线示意图

(a) 原子间结合能量曲线；(b) 原子间结合力曲线；
(c) 弹性模量变化曲线

一方面，实际金属晶体中都含有位错，位错的易动性是金属具有良好的塑性的根源，在远未达到理论分析的最大的弹性变形之前，位错早就在应力的作用下大量增殖和运动了。另一方面，在脆性材料中，内部和表面的缺陷常常引起低应力破坏。这样，实际晶体的弹性变形范围和理论上在完整晶体中分析的结论是有很大大差距的。也正因为如此，虎克定律实际上是一个近似的定律，在较大的弹性变形范围中是不适用的。见图1-2，随着弹性变形逐渐增大，铁晶须的应力-应变关系就与直线开始

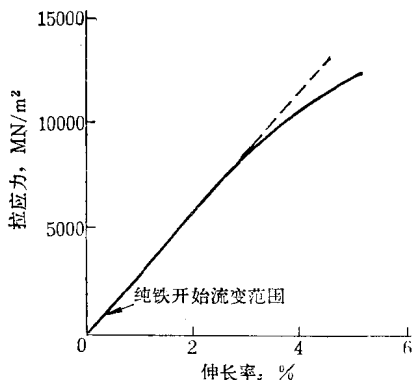


图 1-2 直径1.6 μ m的铁晶须弹性变形曲线

偏离。不过正因为实际晶体的弹性变形范围很小，所以在实用上虎克定律是能满足一般工程要求的精确度的。

1.5 金属的弹性模量

如上述，在某种程度上弹性模量可以用来度量晶体中原子间结合力（能量）的大小，因此它和其他表征原子间结合能量的参量的变化趋向应是一致的。在物理学上我们曾经使