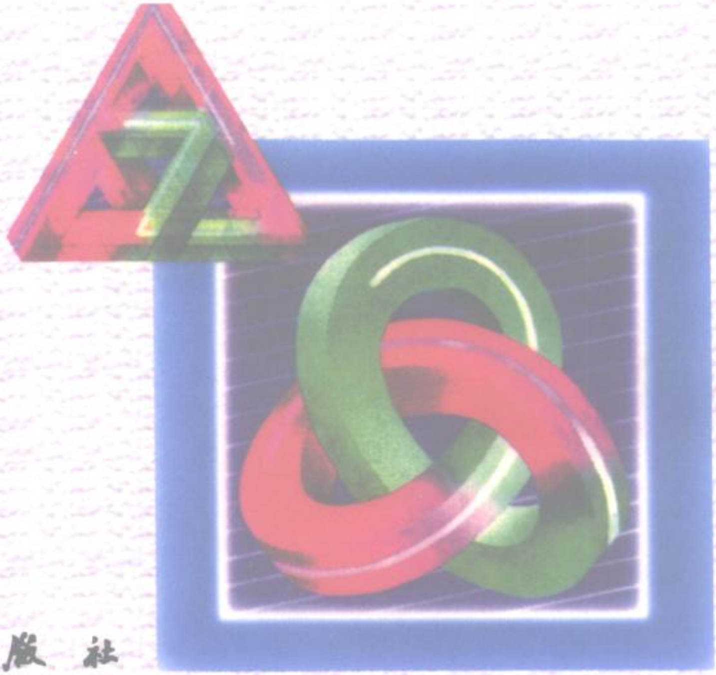
现代数学基础丛书

数学规划导论

徐增堃　著



科学出版社

现代数学基础丛书

数学规划导论

徐增堃 著

浙江师范大学首批重点建设教材项目
浙江师范大学科研出版基金资助项目
浙江省重点扶植学科基金资助

科学出版社

2000

EA02 105

内 容 简 介

本书分线性规划与非线性规划两部分．线性规划部分主要包括单纯形法、对偶理论和摄动理论．非线性规划部分主要包括最优性条件、对偶理论和鞍点理论，以及约束和无约束最优化中的一些重要方法．本书注重用最基本的理论和工具推导数学规划中的重要结果，同时力图反映本学科的某些科研发展动向．

本书适合于高等院校的学生、教师、研究生作参考书、教材或自学用书．本书还可供有关的科学工作者参考．

图书在版编目(CIP)数据

数学规划导论/徐增堃著．-北京：科学出版社，2000.6

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-008200-1

Ⅰ．数… Ⅱ．徐… Ⅲ．数学规划 Ⅳ．O221

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 74211 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

2000年6月第一版　开本：850×1168　1/32

2000年6月第一次印刷　印张：7

印数：1—3 000　字数：180 000

定价：15.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

前　言

本书是为略知数学规划或对之不甚知晓但数学基础较好的人所编写的，取材难免会受到作者的偏好的影响．尽管如此，在编写的过程中还是比较注意到材料的基础性、系统性和连贯性；注意吸收当今的，特别是作者自己的研究成果和学习心得；注意指出产生结果的本质所在以及各章节之间的相互联系；同时还注意到有关理论的应用性；希望用较小的篇幅来包含尽可能多的思想和内容，以使读者对进一步的学习和研究产生兴趣或有所启迪．

徐增堃

目　　录

第一部分　线性规划

第一章　基本概念和基本性质

§1.1　引言

线性规划的中心论题是求线性函数在线性等式或不等式约束下达最小或最大值的问题.

试看一个简单的例子.

例 1.1　某厂生产甲、乙两种同类产品：

单位产品需量 \ 产品 \ 原料	甲	乙	原料可供应量
第一种原料	1	1	3500
第二种原料	1	0	1500
第三种原料	5	2	10000
单位产品利润	5	3	

问如何安排生产使总利润最多？

设生产甲、乙各为 x_1, x_2 件，则

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 5x_1+3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2\leqslant 3500 \\
& x_1 \leqslant 1500 \\
& 5x_1+2x_2\leqslant 10000 \\
& x_1\ ,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中"s. t."为英文"subject to"的缩写，表示"受限制于".

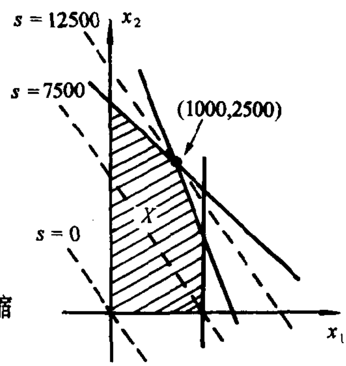


图 1.1

从图 1.1 中可以看出(其中阴影

部分表示变量的取值范围，虚线是 $s=5x_1+3x_2$ 的等高线)，s 的值从零连续变化增加到 12500. 因此，顶点(1000，2500)是最优解，最大利润 $s=12500$.

线性规划最基本的性质是在顶点达到极值. 通过代数的方法描述高维空间"有关图形"的顶点，然后使用经济的方法求出达到极值的顶点，这是线性规划的重要内容.

1947 年，G. B. Dantzig 提出了解线性规划的单纯形法，线性规划这门学科开始形成并迅速发展. 这主要是由于实践中的大量优化问题可以归结为线性规划. 另一方面也由于它的方法的有效性.

关于线性规划的综合材料，可参见文献[4,11,24,25].

§1.2 线性规划的基本概念

1. 标准型

线性规划的标准型如下：

$$
\text{(LP)}\qquad
\begin{aligned}
\min\ & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
& \cdots\qquad \cdots\qquad \cdots\qquad \cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\
& x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0
\end{aligned}
$$

用紧凑的矩阵、向量记号，(LP)就是

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^Tx \\
\text{s.t.}\ & Ax=b \\
& x\geqslant 0
\end{aligned}
$$

其中 c 和 x 为 n 维列向量，b 为 m 维列向量，A 为 $m\times n$ 阶阵，$x\geqslant 0$ 表示 x 的每个分量均非负.

记 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，其中 a_j 表 A 的第 j 列，则(LP)亦可表为

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b \\
&\qquad x_j \geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

在讨论中，我们视方便选用以上任一种形式，并称 $c^T x$ 为目标函数，称 $Ax=b, x\geqslant 0$ 为约束，称

$$
X = \{x : Ax = b, x \geqslant 0\} \tag{1.1}
$$

为(LP)的可行集. 由此，问题还可以描述为

$$
\min_{x\in X} c^T x
$$

对于标准型，若无特别声明，则约定以下假设成立：

(i) $m<n$；

(ii) A 的秩为 m；

(iii) $b\geqslant 0$.

2. 转化的标准型

我们能够指出，任何一种线性规划问题皆可等价地转化为标准型. 因此，在一般的讨论中我们只考虑标准型. 以下只列出一些常见的情况.

情况一

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&\text{s.t.}\ Ax\leqslant b \\
&\qquad x\geqslant 0
\end{aligned}
$$

引进松弛变量 $y=(y_1,\cdots,y_m)^T$，可得等价的

$$
\begin{aligned}
&\min\ c^T x \\
&\text{s.t.}\ Ax+Iy=b \\
&\qquad x\geqslant 0, y\geqslant 0
\end{aligned}
$$

对应于标准型的阵为 (A, I_m)，对应的目标函数系数为 $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{n+m}$，变量为 $m+n$ 个.

情况二 若情况一中有 $Ax\geqslant b$，其余不变，则有

$$\begin{aligned}&\min\ c^T x\\&\text{s.t.}\ Ax-Iy=b\\&\qquad x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{aligned}$$

上面的 y 称为剩余变量.

情况三 如果在某个线性规划问题中,对一部分变量不要求非负约束外,它是用标准形式给出的.例如不限 $x_1\geqslant 0$,此时的 x_1 称为自由变量.可以记

$$x_1=u_1-v_1,\ u_1,v_1\geqslant 0$$

并且相应于(LP),目标函数 $c^T x$ 及等式约束中的 x_1 均以 u_1-v_1 代入,非负约束成为 $u_1\geqslant 0,v_1\geqslant 0,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0$,变量个数为 $n+1$.

情况四 目标函数求极大的情况

$$\begin{aligned}&\max\ c^T x\\&\text{s.t.}\ Ax=b\\&\qquad x\geqslant 0\end{aligned}$$

可以化为等价的

$$\begin{aligned}&\min\ -c^T x\\&\text{s.t.}\ Ax=b\\&\qquad x\geqslant 0\end{aligned}$$

例 1.2 例 1.1 中的规划可利用情况一、四化为等价的

$$\begin{aligned}&\min\ -5x_1-3x_2\\&\text{s.t.}\quad \begin{array}{lllll}x_1+x_2+x_3&&&=3500\\x_1&+x_4&&=1500\\5x_1+2x_2&&+x_5&=10000\end{array}\\&\qquad x_i\geqslant 0,\ i=1,2,3,4,5\end{aligned}$$

3. 基本可行解

前节中,我们考察到线性规划的最优解在顶点处达到.为从代数的角度来研究它,我们引入下述概念.

考虑方程组

$$Ax=b \tag{1.2}$$

其中 A 是秩为 m 的 $m\times n$ 阶阵. 令 B 表由 A 的列组成的任意 $m\times m$阶非异子阵，对应的 x 的分量记为 x_B. 即有下标 $j_1,j_2,\cdots,j_m$，$1\leqslant j_i\leqslant n$，使 $B=(a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_m})$非异，且记 $x_B=(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_m})$. 则可由 $Bx_B=b$ 唯一地解出 $x_B=B^{-1}b$.

定义 1.3 令 B 表示由 A 的列所组成的任意 $m\times m$ 阶非异子阵，令不与 B 对应的 $n-m$ 个 x 的分量都为零. 这样得到的方程组(1.2)的解，称为该方程组关于基 B 的基本解. 对应于 B 的各列的 x 的分量称为基本变量，其余的分量称为非基本变量.

现在，我们在(1.2)中加入非负约束，得

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

定义 1.4 称满足(1.3)的解为该约束的可行解. 当可行解 x 关于 $Ax=b$ 又是基本解，则称它为基本可行解. 对给定的基本可行解 x，若它有 m 个分量大于零，则称 x 为非退化的基本可行解. 否则称为退化的基本可行解. 基本可行解所对应的基称为可行基.

显然，对应于基 B 的基本解为基本可行解的充要条件为

$$B^{-1}b\geqslant 0$$

基本可行解是线性规划中最重要的概念. 现在，我们能够指出，基本可行解与对应的约束(1.3)组成的图形的顶点是等价的. 为此，

定义 1.5 称 R^n 中一个子集 Ω 为凸集，若对$\forall\ x,y\in\Omega$，$\forall\ \theta$: $0<\theta<1$，都有

$$\theta x+(1-\theta)y\in\Omega$$

形象地说，凸集中任意两点间的连线都在该集之中. 容易由定义验证，线性规划之可行集(1.1)为凸集.

定义 1.6 凸集 Ω 中的点 x 称为 Ω 的顶点(或称极点)，如果不存在 Ω 中的两个相异的点 y 和 z，使得对于某个 θ: $0<\theta<1$ 有 $x=\theta y+(1-\theta)z$.

定理 1.7(顶点和基本可行解的等价性) x 为 $X=\{x: Ax=b, x\geqslant 0\}$的顶点的充要条件是 x 为(1.3)的一个基本可行解.

证 不妨设 $x=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$ 是(1.3)的一个基本可行解.对应的基为首 m 列.于是

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m = b$$

其中 $a_1,\cdots,a_m$ 是线性无关的.假定有 $y,z\in X$,使得对某个 θ 有

$$x = \theta y + (1-\theta)z,\ 0<\theta<1$$

由于 y,z 的所有分量均非负,立得 y 和 z 的后 $n-m$ 个分量都为零.此时对应地有

$$y_1a_1+y_2a_2+\cdots+y_ma_m=b$$

$$z_1a_1+z_2a_2+\cdots+z_ma_m=b$$

由 $a_1,\cdots,a_m$ 的线性无关性,只有 $x=y=z$.故 x 为 X 的顶点.

反之,设 x 为 X 的一个顶点.设 x 的非零分量为首 k 个分量.于是

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = b \tag{1.4}$$

其中 $x_i>0,i=1,\cdots,k$.我们只须证 $a_1,\cdots,a_k$ 线性无关即可.事实上,若 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是线性无关的,则在 $k=m$ 时 x 是非退化的基本可行解;在 $k<m$ 时,因 A 之秩为 m,则可从 A 的余下的 $n-k$ 个列中找出 $m-k$ 个列,使之与 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 一起组成一个基,令 x 的相应的 $m-k$ 个分量为零,这样得到一个退化的基本可行解.

今假定 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是线性相关的,于是存在不全为零的 y_i,$i=1,\cdots,k$,使得

$$y_1a_1 + y_2a_2 + \cdots + y_ka_k = 0 \tag{1.5}$$

记 $y=(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0)^T\in R^n$,则由(1.4)和(1.5)知有 $A(x\pm\varepsilon y)=b,\forall\ \varepsilon$;又,可选得 $\varepsilon\neq0$ 使

$$x+\varepsilon y\geqslant 0 \quad 且 \quad x-\varepsilon y\geqslant 0$$

总之就有 $x\pm\varepsilon y\in X$.于是从

$$x = \frac{1}{2}(x+\varepsilon y) + \frac{1}{2}(x-\varepsilon y)$$

知 x 不是 X 的顶点,这与原设矛盾.这个矛盾说明了 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是线性无关的.证毕.

例 1.8 写出例 1.2 的约束,并画出关于基本可行解的对应

的图，我们发现它与图 1.1 相重合.

$$
\begin{aligned}
x_1+\ x_2+x_3 \qquad\qquad &=3500 \\
x_1 \qquad\qquad +x_4 \qquad &=1500 \\
5x_1+2x_2 \qquad\qquad +x_5 &=10000 \\
x_i\geqslant 0, i=1,2,3,4,5 &
\end{aligned}
$$

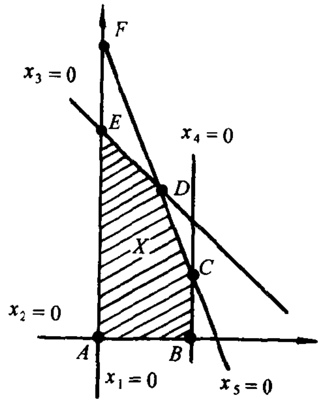


图 1.2

图 1.2 中的每条边对应于一个为零变量，而顶点是某两个变量同时为零所得. 计算得

$A=(0,0,3500,1500,10000)$

$B=(1500,0,2000,0,2500)$

$C=(1500,1250,750,0,0)$

$D=(1000,2500,0,500,0)$ $\quad$ $E=(0,3500,0,1500,3000)$

它们都是非退化的基本可行解. 注意，还有一些基本解图中未标出，它们是不可行的.

§1.3 线性规划的基本定理

以下，我们只考虑标准型

$$
\text{(LP)} \qquad \begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.t.}\ \ Ax=b \\ &\qquad\quad x\geqslant 0 \end{aligned}
$$

定义 1.9 目标函数在约束的假定下达到极小的可行解称最优解. 若这个解还是基本解，则称之为最优基本可行解.

定理 1.10（线性规划的基本定理） 对于线性规划的标准型(LP)，其中 A 为 $m\times n$ 阵，秩为 m，有

(i) 若存在一个可行解，则必存在一个基本可行解；

(ii) 若存在一个最优解，则必存在一个最优基本可行解.

证 证明是构造性的. 假定 x 是可行(或最优)解. 设 x 有 k 个分量大于零，不妨设首 k 个. 于是有

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ka_k = b \tag{1.6}$$

若 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是线性无关的，则根据(1.4)以下的一段论述知结论已得；故下设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 线性相关. 于是又有

$$y_1a_1 + y_2a_2 + \cdots + y_ka_k = 0 \tag{1.7}$$

其中 $y_i,i=1,\cdots,k$ 是不全为零的一组数，不妨设其中有一为正.

(i) 设 x 为可行解. 由(1.7)减去(1.6)的 ε 倍得

$$(x_1 - \varepsilon y_1)a_1 + \cdots + (x_k - \varepsilon y_k)a_k = b \tag{1.8}$$

令 $y=(y_1,\cdots,y_k,0,\cdots,0)^T$，由(1.8)推知 $x-\varepsilon y$ 满足方程 $Ax=b$. 为保持可行性，令

$$\varepsilon = \min\{x_i/y_i : i = 1,\cdots,k \text{ 且 } y_i > 0\} \tag{1.9}$$

这样，$x-\varepsilon y$ 中至多只有 $k-1$ 个分量不为零. 必要时重复这一过程，最后得到的可行解其正分量所对应的 A 中的列线性无关.

(ii) 设 x 为最优解. 在(i)的证明的基础上补证目标函数值不变即可. 即证

$$c^T(x - \varepsilon y) = c^Tx \quad \text{或} \quad c^Ty = 0$$

由于 $x_i>0,i=1,\cdots,k$，故对足够小的 $|\varepsilon|\neq 0$ 有 $x\pm\varepsilon y\geqslant 0$，从而可知 $x\pm\varepsilon y$ 对(LP)可行. 再据 x 的最优性得到

$$c^T(x-\varepsilon y)\geqslant c^Tx \Rightarrow \varepsilon c^Ty\leqslant 0$$
$$c^T(x+\varepsilon y)\geqslant c^Tx \Rightarrow \varepsilon c^Ty\geqslant 0$$

从而推及 $c^Ty=0$. 证毕.

基本定理告诉我们：若已知(LP)有最优解，则寻找其最优解只要在基本可行解中寻找即可. 易知基本可行解的个数至多为 C_n^m，这就导致求解线性规划的穷举法. 我们用下面的例子说明.

例 1.11 考虑例 1.2，易知其可行集是非空的有界闭集，故其有最优解. 根据基本定理，将基本可行解分别代入其目标函数中：例 1.8 的 A,B,C,D,E 中以 D 所对应的目标值为最小，故 D 为最优解. 回复到例 1.1，$x=(1000,2500)$是它的最优解.

对于一个给定的线性规划问题，理论上我们已能求出一个最

优解，如果最优解存在的话．下一个定理本质上给出了全部最优解．证明可参见文献[24]，但叙述已经修正．

定理 1.12（全部最优解的给出） 设标准型线性规划(LP)的所有最优基本可行解为

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(p)}$$

并设(LP)的最优解集有界，则 x 为(LP)的最优解的充要条件是它可以表成上面一组解的凸组合．即

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^{(i)}, \quad \lambda_i \geqslant 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

§1.4 实际应用的例子

线性规划可以用来解决科学研究、工程设计、活动安排、军事指挥、经济规划、经营管理等方面提出的大量问题．此处仅举两例说明．

例 1.13（饮食问题） 一个大的军队的饮食可能会提出这样的问题：假定市场上可以买到几种不同的食品，第 j 种食品的单价为 c_j，$j=1,\cdots,n$．另外有 m 种营养成分，设每天必须供应第 i 种营养成分至少为 b_i 单位，$i=1,\cdots,m$．再假定第 j 种食品每单位含有第 i 种营养为 a_{ij} 个单位．问如何在满足基本营养的条件下购买食品耗资最少？

设 x_j 为第 j 种食品购买的单位数，则

$$\begin{aligned}
\min\ & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
& \text{（购买食品耗资最少）} \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& \text{（应满足基本的营养供给）} \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \\
& \text{（购买食品数均为非负）}
\end{aligned}$$

用矩阵及向量的形式来写(其中 A,b,c,x 自明)，即

$$\begin{aligned}&\min\ c^T x\\&\text{s.t. } Ax \geqslant b\\&\qquad x \geqslant 0\end{aligned}$$

例1.14(运输问题)　某种产品设有 m 个产地，产量分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$；有销地 n 个，销量分别为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$. 设将产品从第 i 个产地运到第 j 个销地的单位运输成本为 c_{ij}，对应的运输量为 $x_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$. 问如何在满足销量的情况下设计运输方案使运费最低?

$$\min\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

(所花的总运费最少)

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,\cdots,m$$

(各地发出的量等于产量)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,\cdots,n$$

(满足各销地的需要)

$$x_{ij} \geqslant 0,\ i = 1,\cdots,m;j = 1,\cdots,n$$

(运出或收到的量均非负)

读者不难看出这是标准型线性规划. 另外，根据模型的具体构造有

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{1.10}$$

即发出的总量与收到的总量相同.

习　题

1. 化下述问题为标准型并求解.