计算水力学基础

〔英〕考蒂塔斯 著
郝中堂 杨德铨 译

JISUAN SHUILIXUE JICHU

水利电力出版社

计算水力学基础

〔英〕考蒂塔斯 著

郝中堂　杨德铨 译

水利电力出版社

Koutitas, C. G.
Elements of Computational Hydraulics
Peutech Press Limited

计算水力学基础

[英]考蒂塔斯 著
郝中堂 杨德铨 译
责任编辑 徐 华

*

水利电力出版社出版
(北京三里河路6号)
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 5.5印张 119千字
1987年月5第一版 1987年5月北京第一次印刷
印数0001—3400册 定价1.35元
书号 15143·6250

DU39/24

内 容 提 要

本书是一本按入门书水平编写的计算水力学。目的是帮助工程师将水力学知识和计算程序设计经验结合起来，有效地利用计算机求解水力学问题。

本书主要包括：数值分析的基本概念；插值法、数值积分、富里哀级数展开和代数方程组的数值求解；有限差分法及其在水力学中常见微分方程上的应用；管流、明渠流、地下渗流、扩散和弥散问题数学模型的数值处理；以及有限单元法及其应用。书中每章都有应用实例，并附有完整的FORTRAN语言计算程序。

本书可供有关专业的工程技术人员和大专院校师生参考。

前　言

本书主要供土木工程高年级大学生和对这方面有兴趣的工程师使用。要很好理解本书的内容须具有包括一些数值分析原理在内的应用数学基本知识、水力学初步知识和FORTRAN程序设计方面的经验。

本书是一本按入门书水平编写的，目的是帮助工程师将水力学知识和计算程序设计经验结合起来，有效地利用计算机求解水力学问题。

不要以为本书包括了研究和实用所需的各方面知识，处理较复杂的问题，还需要进一步学习数值分析、水力学和计算机程序设计。但是希望读者会设法对数字计算机所提供的巨大可能性有一些了解。

本书内容是按下列次序介绍的。首先介绍数值分析的一些基本概念。接着，全面阐述插值法、数值积分、富里哀级数的数值展开和代数方程组的数值求解。然后介绍有限差分法及其在水力学中的一些基本微分方程上的应用。

其余各章是关于水力学最基本的问题——管流、明渠流、地下渗流以及扩散和弥散问题数学模型的数值处理。最后一章介绍正引起当代工程学界很大注意的一种数值方法——有限元单法，有关此法的介绍是用初级方式通过该法在简单问题上的反复应用来完成的。

各章中的应用实例都附有完整的FORTRAN语言计算程序。应用实例和相应的程序都是简单的，目的在于使本书保持在入门的水平上。至于优化和扩展书中的程序，则是有待读者进一步研究和实践。

C.G.考蒂塔斯

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章 数值分析基础

第一节 引 言

讲授理论水力学和应用水力学的目的，在于使工程师具备正确设计和建造水力工程所必须的知识。为使水力工程的建筑物达到最优设计水准，尤其是当所研究、设计的问题需借助或完全运用数学模型来完成时，对其有关物理现象的理解和定量描述必须有专门的计算方法。

随着所研究的问题和所从事的工作越来越复杂，以致用手算或用简单的计算器显得太费时，甚至不可能完成时，这些计算方法的应用就变得日益广泛。

水力学计算问题的特点是种类繁多，且大多数能归入一般的连续介质力学一类问题中。

电子数字计算机使用机会的迅速增长和微型计算机的新近引进，使得水力学也和其它工程部门一样，有可能应用计算机。当然，计算机并不是所有计算难题的灵丹妙药，只有具备完整的数值分析和程序设计知识，并能将其综合应用于所处理的数学问题，才能有效地应用它。

第二节 定义——一般概念

现今，对于一个适于用计算机进行研究的物理现象，最简易的研究方法是将它构成一个数学模型再求它的解，数学模型是由定量地反映诸如力的平衡、能量和质量的守恒等基本物理原理的数学表达式所组成的，在所有情况下，这些数学表达式都须根据所要求解的问题的特性作相应的修改和简

化，如边界条件、介质参数值的量级等。

为了数值求解描述物理现象的数学模型，需要形成并使用算法。一个算法可以定义为一个计算方法，或更简单地看成一种规则的集合，这种规则用来规定通过一个数据集合 $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, \cdots a_n)$ 寻求作为问题的解答的集合 $\boldsymbol{x}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的数值计算顺序和方式。

一个算法过程可用下式简要地表示

$$\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{a}) \tag{1-1}$$

从数学的观点出发，首先要确定利用 $\boldsymbol{a}$ 的函数 f 给出 $\boldsymbol{x}$ 的计算方法是否适定，一个适定的算法，必须满足下列条件：

（1）对于一个给定的 $\boldsymbol{a}$ 都存在一个解（例如，若一个算法用来解一个方程组，通过逐次的迭代而不能收敛，则该算法被看作是不适定的）。

（2）这种算法对于一个给定的 $\boldsymbol{a}$ 必定得出唯一的解 $\boldsymbol{x}$。

（3）解 $\boldsymbol{x}$ 和数据 $\boldsymbol{a}$ 之间的联系必须满足著名的利普希茨（Lipschitz）关系式，若 $|\delta_a|\leqq\eta$，则

$$|\delta_x|\leqq M|\delta_a| \tag{1-2}$$

式中 M 为一个有界的自然数，$M=M(\boldsymbol{a}, \eta)$。

上述第三准则应用于椭圆问题，无需证明就可以说，作为一个边值问题，它是适定的，而作为初值问题，它是不适定的。

大多数数值分析论文中的计算方法，与水力学有关的最常见的方法有插值法、数值积分、有限富里哀级数分析、代数方程组的数值解和微分方程（用有限差分或有限单元法）的数值解。

下面先着重说明算法，然后再介绍水力学中最常见的微

分方程积分的一些数值方法。

第三节　数值逼近和插值法

设一函数$f(x)$，数列x_i和相应的函数值$f_i(i=1, \cdots n)$为已知，插值法的定义是$x \neq x_i$时的f值的近似计算法。这种成对的数列x_i，f_i既可由实验室试验产生，也可由用来描述一架测试仪器或一张诺谟图的用法的表格给出。当被包含在f_i值（例如实验室试验值）中的误差超过限度时，则通过f-x平面上所有点的曲线是不光滑的，通常是用一种加权法归纳出一条曲线来近似地表示这些乱云状的点。常用的是最小二乘法，使这些试验点和光滑曲线之间的方差为极小。

最小二乘逼近法用下例说明。

例题 1-1　某明渠，断面上不同水深的流速数列用半对数比尺给出，设z为离渠底的距离(m)，u是流速(cm/s)，数据如表1-1。

表 1-1

$x=\ln z$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f=u$	20	30	40	50	50	60
$x=\ln z$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	
$f=u$	70	80	90	95	100	

在明渠均匀紊流中具有足够精度的流速分布公式为

$$u=\frac{u^*}{K}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad (1-3)$$

式中K为卡门常数，$K=0.4$，z_0为糙度（渠底不平整的量度），u^*为摩阻流速，是底部切应力τ_0的函数

$$u^*=\sqrt{\tau_0/\rho} \tag{1-4}$$

求离渠底3.5m处的流速是多少？

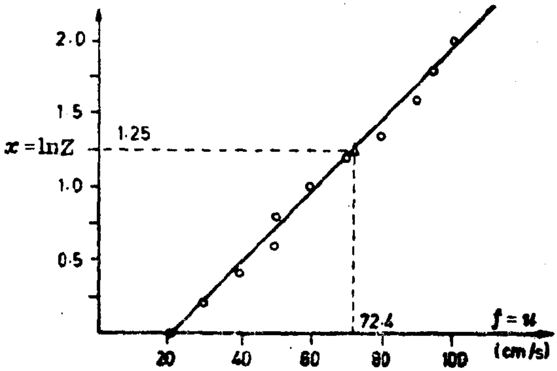

图 1-1

根据已知点的分布图1-1，及式（1-3），逼近已知数据的最合适的曲线是一条直线，其数学表达式为

$$f=\alpha x+\beta \tag{1-5}$$

计算α和β的最小二乘法是使偏差$f-f_i$的平方和为极小，即

$$R=\sum_{i=1}^{n}(f-f_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta-f_i)^2=\min \tag{1-6}$$

式（1-6）的极小解可由导数等于0而求得

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}=0 \tag{1-7}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta}=0 \tag{1-8}$$

从而导出α和β的下列表达式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\alpha=\frac{n\Sigma x_i f_i-\Sigma x_i \Sigma f_i}{n\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2} \qquad (1-9)$$

$$\beta=\frac{\Sigma x_i^2 \Sigma f_i-\Sigma x_i \Sigma x_i f_i}{n\Sigma x_i^2-(\Sigma x_i)^2} \qquad (1-10)$$

对于给定的n（数对的个数，$n=11$）和给定的数对x_i，f_i，计算α，β可用如下的FORTRAN程序：

```
C       LEAST SQUARE CURVE FITTING
        DIMENSION X(100), F(100)
        READ (5.5) N, (X(I), F(I), I=1, N)
    5   FORMAT (I4/(10F7.0))
        SUM1=0.
        SUM2=0.
        SUM3=0.
        SUM4=0.
        DO7I=1, N
        SUM1=SUM1+X(I)
        SUM2=SUM2+F(I)
        SUM3=SUM3+X(I)**2
    7   SUM4=SUM4+X(I)*F(I)
        A=(SUM4*N-SUM1*SUM2)/(N*SUM3-
      1 SUM1**2)
        B=(SUM3*SUM2-SUM1*SUM4)/(N*SUM3-
      1 SUM1**2)
        WRITE(6.8)A, B
    8   FORMAT(2F10.4)
        STOP
        END
```

对于表1-1给出的x_i，f_i值，算得$\alpha=40.45$，$\beta=21.28$，当$x=\ln z=\ln(3.5)=1.25$，得到$f=u=72.4$cm/s。

当f_i中不含有误差时，点x的函数值f的计算（即插值）法，按坐标x_i的间距h是否相同分为两种。对于等间距h（$h=\Delta x=x_{i+1}-x_i$，对于所有i），可用牛顿公式（用其向前或向后差分式）。设向前差分算子用符号△表示

$$\triangle f(x)=f(x+h)-f(x) \tag{1-11}$$

向后差分算子用符号▽

$$\nabla f(x)=f(x)-f(x-h) \tag{1-12}$$

而转换算子用符号E

$$Ef(x)=f(x+h) \tag{1-13}$$

这里

$$E^k f(x)=f(x+kh)$$

于是有下面的符号方程

$$\triangle^k=(E-1)^k \tag{1-14}$$

牛顿公式可由台劳（Taylor）级数展开而导出，设$f(x+ah)$和$f(x-ah)$为所要求的值，$0\leqslant a\leqslant 1$，则牛顿公式为：

向前差分式

$$f(x+ah)=\left(1+a\triangle+\frac{a(a-1)}{2!}\triangle^2+\cdots\right)\times f(x)+R \tag{1-15}$$

向后差分式

$$f(x-ah)=\left(1+\nabla+\frac{a(a-1)}{2!}\nabla^2+\cdots\right)\times f(x)+R \tag{1-16}$$

由于台劳级数中断而产生截断误差R与最后计入项的阶数有关，若n项被保留，则

$$R \propto h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \qquad x_0 < \xi < x_n \qquad (1\text{-}17)$$

式中带括号的上标$(n+1)$代表导数的阶数。

牛顿公式被应用于例题1-2。

表 1-2

x	f	Δ	Δ^2	Δ^3
0	0			
1	3	3	2	
2	8	5	14	12
3	27	19	18	4
4	64	37	24	6
5	125	61		

例题 1-2 已知$h=\triangle x=1$的数对x_i、f_i如表1-2，现欲求$f(x=2.5)$。从数对x_i，f_i可算得差分$\triangle$，$\triangle^2$，$\triangle^3$ …，均列入表1-2，应用式（1-15），取$x=2.0$，$a=0.5$，且$n=3$（最大可能），给出$f(2.5)$的值

$$f(2.5)=8+0.5\times19+\frac{0.5\times(0.5-1)}{2}\times18$$
$$+\frac{0.5\times(0.5-1)(0.5-2)}{2\times3}\times6$$
$$=15.63$$

函数的图示见图1-2。

一个更通用的、适用于对x_i和x_{i+1}的间距不加限制的方法是拉格朗日（Lagrange）多项式。对于n个给定的数对（x_i，f_i），欲构成一个通过$f-x$平面上所有点的$(n-1)$次多项式，多项式的一般形式为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x-x_k) \qquad (1\text{-}18)$$

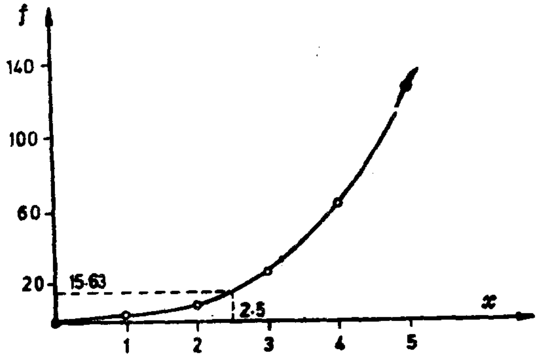

图 1-2

式中$\prod$表示（$x-x_k$）项的累乘，系数a_i根据$\varphi(x_i)=f_i$（对于所有i）求得，求法如下

$$a_i=\frac{f_i}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(x_i-x_k)} \tag{1-19}$$

此法通过下例说明。

例题 1-3 将式（1-18）和式（1-19）编成程序，计算例1-2中的六个数对（x_i，f_i）给出的$f(2.5)$的值。取$n=6$，构成5次多项式，计算$f(2.5)$值的程序如下：

```
C     LAGRANGE POLYNOMIALS
C     INTERPOLATION
      DIMENSION X(100),F(100),A(100)
      READ (5,5) N,(X(I),F(I),I=1,N)
    5 FORMAT (I4/(10F7.0))
      READ (5,8) XC
    8 FORMAT (F7.0)
      DO 6I=1,N
```

```
      P=1
      DO 3.K=1,N
      IF (K-I) 13,3,13
13    P=P*(X(I)-X(K))
 3    CONTINUE
      A(I)=F(I)/P
 6    CO NTINUE
      FF=0.
      DO 16 I=1,N
      PP=1.
      DO 7 K=1,N
      IF(K-I)15,7,15
15    PP=PP*(XC-X(K))
 7    CONTINUE
      FF=FF+A(I)*PP
16    CONTINUE
      WRITE(6,19)XC,FF
19    FORMAT(2F10.4)
      STOP
      END
```

对于XC=2.5，求得FF=15.43。

第四节 数 值 积 分

数值积分的定义是积分的近似数值计算法

$$I=\int_{x_0}^{x_1-x_0+a} f(x)dx \qquad (1\text{-}20)$$

现有的几个数值积分计算法可由牛顿公式导出，其形式取决于级数所保留的项数。

假定$f(x)$用$\varphi(a)$来逼近，例如

$$\varphi(a)=(1+a\triangle)f_0 \tag{1-21}$$

则积分式变为

$$\begin{aligned}
I&=\int_{x_0}^{x_1} f dx = h\int_0^1 \varphi(a)da\\
&=h\int_0^1 (1+a\triangle)f_0 da = h\left(a+a^2\frac{\triangle}{2}\right)f_0\Big|_0^1\\
&=\left(f_0+\left(\frac{f_1-f_0}{2}\right)\times 1\right)h\\
&=\left(\frac{f_1+f_0}{2}\right)h
\end{aligned} \tag{1-22}$$

显然，这就是梯形规则。

著名的待定系数法可看作数值积分方法的综合，数值积分的所有经典公式都可作为这种方法的特定情况导出。此法用下式来逼近积分

$$I=\sum_{k=1}^{n-1} H_k f(x_k) \text{●} \tag{1-23}$$

如终点被包含在数列x_k中，则公式称为闭式，否则称为开式。待定系数H_k的个数决定多项式的最高次数，使得用式（1-23）进行积分不致有误差。实际上，决定H_k的过程就是通过式（1-23）右边和0，1，2，……，$n-1$次多项式的积分相等来构成。举下式为例

● 原文为$\sum_{k=1}^{n} H_k f(x_k)$，与后面的例子不符。——译者注

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com