

· 工科数学教学参考丛书(二) ·

工程数学 常见题型分析

四川工业学院数学教研室 编

电子科技大学出版社

7B11
571

393825

工科数学教学参考丛书

工程数学常见题型分析

四川工业学院数学教研室 编

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书是《工科数学教学参考丛书》的第二册，书中简明地列出了工程数学(线性代数与概率统计)的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念与公式的理解，提高解决问题的技能。本书也可供教师讲授工程数学习题课时参考。

工 程 数 学 常 见 题 型 分 析

四川工业学院数学教研室 编

*

电子科技大学出版社出版

(成都建设北路二段四号) 邮编 610054

四川省仁寿县印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 183 千字
版次 1996年5月第一版 印次 1996年5月第一次印刷

印数 1—6000册

ISBN 7-81043-490-X/O·43

全书共2册 总价 17.30元

本册定价 7.50元

前 言

作为工科院校重点课程建设内容之一，我们编写了这套《工科数学教学参考丛书》，本书是丛书中的第二册。撰写时按工科《工程数学教学大纲》的要求，简明地列出了所含“线性代数”和“概率统计”两大部分的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生对所学概念的理解和提高解决问题的技能。本书也可供教师讲授工程数学习题课时参阅。

书中的选例以工科院校考试的中等难度的题目为主，未选入超出通常考试要求的过难、过繁的例子，以使学生易于阅读与掌握。对于各院校考试中使用较少的客观性试题（如是非题、选择题等）本书也未选入。鉴于各校在工程数学教学内容的选取上稍有差异，若初学者遇到极个别未曾学过的题型或例子，可暂时跳过它而不会影响对其他题型的阅读与理解。

本书的编写得到了学院和基础科学部领导的热忱指导与支持，在此表示感谢！书中线性代数部分由何明星（第一、二章）、伊良忠（第三、四章）、陈绍扬（第五章）撰写；数理统计部分由张文忠（第一、二章）、鲁家琳（第三、四章）、蒲俊（第五、六章）撰写；全书由主编张文忠统稿，由张浩审定。绘图蔺大正。

愿本书的出版能为工程数学教学质量的提高起到有益的作用。限于编者水平，如有不妥之处，敬请识者指正。

四川工业学院基础科学部

数学教研室 1996. 3

目 录

上篇 线性代数

第一章 n 阶行列式	(1)
题型一 行列式的计算	(1)
(一) 行列式定义的运用	(1)
(二) 用三角形法计算行列式	(2)
(三) 用降阶法计算行列式	(6)
(四) 用升阶法计算行列式	(7)
(五) 用和、差、乘积法计算行列式	(8)
(六) 用递推、归纳法计算行列式	(12)
题型二 克莱姆法则的运用	(15)
(一) 用克莱姆法则解方程组	(15)
(二) 用克莱姆法则讨论方程组的解	(16)
第二章 矩阵及其运算	(18)
题型一 矩阵的运算	(18)
(一) 矩阵的乘法	(18)
(二) 矩阵的逆矩阵的计算	(23)
题型二 解矩阵方程	(26)
题型三 矩阵与线性变换的关系	(29)
第三章 向量组的线性相关性与矩阵的秩	(32)
题型一 向量组的线性相关性	(32)
(一) 讨论向量组的线性相关性	(32)
(二) 关于向量组相关性的证明	(37)

题型二 求向量组(矩阵)的秩及向量组的极大无关组	
.....	(39)
(一) 用行列式求秩及极大无关组	(39)
(二) 利用初等变换求秩及极大无关组	(41)
(三) 综合	(42)
第四章 线性方程组	(47)
题型一 用克莱姆法则解线性方程组	(47)
题型二 用初等变换解线性方程组	(49)
(一) 求基础解系	(49)
(二) 求方程组的通解	(51)
(三) 综合	(54)
第五章 相似矩阵及二次型	(59)
题型一 正交向量组与正交矩阵	(59)
(一) 正交向量组	(59)
(二) 正交矩阵	(61)
题型二 方阵的特征值与特征向量	(62)
(一) 求方阵的特征值与特征向量	(62)
(二) 求方阵的多项式的特征值	(63)
(三) 由方阵的特征值及特征向量求方阵	(65)
(四) 方阵的特征向量的讨论	(68)
(五) 正交阵的特征值	(69)
题型三 相似矩阵	(70)
(一) 相似矩阵的性质	(70)
(二) 化实对称阵为对角阵	(72)
题型四 二次型	(76)
(一) 二次型的矩阵及二次型的秩	(76)
(二) 用正交变换化二次型为标准型	(77)

题型五	正定二次型及正定实对称阵	(81)
(一)	正定性的判定	(81)
(二)	正定阵的性质	(83)
(三)	分块正定阵	(85)

下篇 概率统计

第一章	随机事件与概率	(89)
题型一	随机事件的表示与运算	(89)
题型二	古典概型	(91)
题型三	利用概率的性质计算	(95)
题型四	几何概型	(98)
题型五	条件概率与乘法公式	(100)
题型六	全概公式与逆概公式的运用	(104)
题型七	独立试验序列概型	(106)
第二章	随机变量与概率分布	(109)
题型一	离散型随机变量	(109)
(一)	离散型随机变量的概率分布的性质与判定	(109)
(二)	求离散型随机变量的概率分布与分布函数	(110)
(三)	泊松分布数值表的应用	(113)
题型二	连续型随机变量	(113)
(一)	连续型随机变量的密度函数	(113)
(二)	连续型随机变量的分布函数	(117)
(三)	正态分布数值表的应用	(121)
题型三	随机变量函数的分布	(123)
(一)	求离散型随机变量函数的分布	(123)
(二)	求连续型随机变量函数的分布	(125)

第三章 随机变量的数字特征	(129)
题型一 随机变量的数学期望与方差	(129)
(一) 离散型随机变量的期望与方差	(129)
(二) 连续型随机变量的期望与方差	(132)
题型二 随机变量函数的期望	(134)
(一) 离散型随机变量函数的期望	(134)
(二) 连续型随机变量函数的期望	(136)
第四章 随机向量	(139)
题型一 随机向量的联合分布与边缘分布	(139)
(一) 离散型随机向量的联合分布与边缘分布	(139)
(二) 连续型随机向量的联合分布与边缘分布	(142)
题型二 两个随机变量的函数的分布	(145)
(一) 离散型随机变量的函数的分布	(145)
(二) 连续型随机变量的函数的分布	(146)
题型三 随机向量的数字特征	(154)
(一) 已知联合分布求数学期望和方差	(154)
(二) 随机变量函数的数学期望	(157)
(三) 利用联合分布求协方差和相关系数	(158)
(四) 利用期望和方差的性质求数字特征	(160)
题型四 其他	(164)
第五章 统计估值	(167)
题型一 基本概念题	(167)
题型二 作频率直方图	(171)
题型三 样本参数满足给定条件的概率	(171)
题型四 求期望与方差的点估计	(174)
题型五 极大似然估计	(178)
题型六 求期望的置信区间	(180)

题型七 求方差的置信区间·····	(186)
第六章 假设检验 ·····	(191)
题型一 一个正态总体期望的假设检验·····	(191)
(一) U 检验法 ·····	(191)
(二) t 检验法 ·····	(198)
题型二 一个正态总体方差的假设检验·····	(206)
(一) 未知期望 μ , 检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ·····	(206)
(二) 未知期望 μ , 检验假设 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ·····	(208)
题型三 两个正态总体期望的假设检验·····	(211)
题型四 两个正态总体方差的假设检验·····	(213)
(一) 未知 μ_1, μ_2 , 检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ·····	(213)
(二) 未知 μ_1, μ_2 , 检验假设 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ ·····	(215)
附录·····	(218)
附表 1 正态分布数值表 ·····	(218)
附表 2 t 分布临界值表 ·····	(218)
附表 3 χ^2 分布临界值表 ·····	(219)
附表 4 F 分布临界值表 ($\alpha=0.05$) ·····	(220)
附表 5 F 分布临界值表 ($\alpha=0.025$) ·····	(222)
附表 6 F 分布临界值表 ($\alpha=0.01$) ·····	(224)

第一章 n 阶行列式

题型一 行列式的计算

(一) 行列式定义的运用

例 1 问 n 取怎样的数, n 阶行列式次对角线上 n 个元素乘积的项才带有正号 (在行列式中, 从右上角到左下角的直线称次对角线)?

解 因 n 阶行列式次对角线上 n 个元素乘积的项为 $(-1)^t a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$, 其中 t 为排列 $n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ 的逆序数, 故

$$t = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

欲使 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 为正, 只需 $\frac{n(n-1)}{2} = 2k$ ($k=1, 2, \cdots$), 故 $n=4k$ 或 $4k-3$.

例 2 由行列式的定义证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

证 不计正负号, 行列式的一般项为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$, 列标 j_3, j_4, j_5

j_1, j_2 只能在 1、2、3、4、5 中取不同的值，故 j_3, j_4, j_5 三个下标中至少有一个要取 3、4、5 中之一数，从而任一项至少要包含一个零因子，故得证。

例 3 设

$$f(x) = \begin{vmatrix} 3x+2 & x+7 & 5 & 6 \\ 6 & 2x+1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4x+3 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 5x+2 \end{vmatrix}$$

求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数。

解 由行列式定义知，行列式 x^4 的项一定在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 之中，又包含 x^3 的项一定在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 中，又 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 的系数为 -1 ，故 x^4 的系数为 $3 \times 2 \times 4 \times 5 = 120$

而 x^3 的系数为

$$\begin{aligned} & 3 \times 2 \times 4 \times 2 + 3 \times 2 \times 5 \times 3 + 3 \times 4 \times 5 \times 1 \\ & + 2 \times 4 \times 5 \times 2 - 6 \times 1 \times 4 \times 5 \\ & = 48 + 90 + 60 + 80 - 120 = 158 \end{aligned}$$

(二) 用三角形法计算行列式

例 1 计算

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_2 + r_1 \times 2 \\ r_3 + r_1 \times (-3) \\ r_4 + r_1 \times (-2) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -16 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_3 + r_2 \times 2 \\ r_4 + r_2 \times 2 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} r_4 + r_3 \times \left(-\frac{17}{16}\right) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{73}{8} \end{vmatrix}$$

$$= -(-13) \times 16 \times \frac{73}{8} = 1898$$

例 2 计算

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_k \neq x, k = 1, 2, \dots, n)$$

解 第一行乘以 (-1) 分别加到其余各行得

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & \cdots & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n - x \end{vmatrix}$$

从第 1 列, 第 2 列, \cdots , 第 n 列分别提取 $a_1 - x$, $a_2 - x$, \cdots , $a_n - x$, 得

$$D = (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ a_1 - x & a_2 - x & a_3 - x & \cdots & a_n - x \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

因 $\frac{a_1}{a_1 - x} = 1 + \frac{x}{a_1 - x}$, 把所有各列加到第一列, 得

$$D = (a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)$$

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{x}{a_1 - x} + \cdots + \frac{x}{a_n - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \cdots + \frac{1}{a_n - x} \right)$$

注 一般不规则的行列式, 可应用行列式的性质把它化为三角形行列式, 这时行列式的值等于主对角线元素的乘积.

例3 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 第2, 3, ..., n列分别加到第1列, 得

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

第1行乘以(-1)分别加到第2, 3, ..., n-1行

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

第1, 2, 3, ..., n-2列加到第n-1列, 得

$$D = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot n^{n-2} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1}
\end{aligned}$$

注 用三角形法计算行列式时可结合行列式按（行）列展开性质进行.

(三) 用降阶法计算行列式

例 计算

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

解 按第 5 列展开

$$D = -4 \begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \times \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \times 33 \times 5 - 3 \times 5 = -675$$

注 本题降阶时使用了分块三角形矩阵的行列式性质

$$\begin{vmatrix} A_m & 0 \\ C & B_n \end{vmatrix} = |A_m| \cdot |B_n|, \text{ 它是一种降低行列式阶数的有效方法.}$$

(四)* 用升阶法计算行列式

例 计算

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

解 把 D 加边升阶

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

把第一列的 $(-a_1)$ 倍、 $(-a_2)$ 倍、 $(-a_3)$ 倍、 $(-a_4)$ 倍分别加到第 2 列、第 3 列、第 4 列、第 5 列, 得

* 如未学过该节内容的读者, 可不看此题型。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 1 & x_1 - a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_2 - a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x_3 - a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_4 - a_4 \end{vmatrix}$$

按第 1 列展开, 得

$$\begin{aligned} D &= (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3)(x_4 - a_4) \\ &\quad + a_1(x_2 - a_2)(x_3 - a_3)(x_4 - a_4) \\ &\quad + a_2(x_1 - a_1)(x_3 - a_3)(x_4 - a_4) \\ &\quad + a_3(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_4 - a_4) \\ &\quad + a_4(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)(x_3 - a_3) \end{aligned}$$

注 加边升阶法的一般方法是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

这里关键的是适当选取 b_1, b_2, \dots, b_n 以便于计算右边的行列式.

(五) 用和、差、乘积法计算行列式

例 1 计算

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + 1 & a_2 + 1 & a_3 + 1 & 1 \\ b_1 + 1 & b_2 + 1 & b_3 + 1 & 1 \\ c_1 + 1 & c_2 + 1 & c_3 + 1 & 1 \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

解 置 $a = (a - b) + b$, 则