·工科数学教学参考丛书(二)·

工程数学
常见题型分析

四川工业学院数学教研室 编

电子科技大学出版社

工科数学教学参考丛书

工程数学常见题型分析

四川工业学院数学教研室　编

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书是《工科数学教学参考丛书》的第二册，书中简明地列出了工程数学（线性代数与概率统计）的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念与公式的理解，提高解决问题的技能。本书也可供教师讲授工程数学习题课时参考。

工程数学常见题型分析

四川工业学院数学教研室 编

*

电子科技大学出版社出版

（成都建设北路二段四号） 邮编 610054

四川省仁寿县印刷厂印刷

新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 183 千字

版次 1996 年 5 月第一版 印次 1996 年 5 月第一次印刷

印数 1—6000 册

ISBN 7-81043-490-X/O·43

全书共 2 册 总价 17.30 元

本册定价 7.50 元

前　　言

作为工科院校重点课程建设内容之一，我们编写了这套《工科数学教学参考丛书》，本书是丛书中的第二册。撰写时按工科《工程数学教学大纲》的要求，简明地列出了所含“线性代数”和“概率统计”两大部分的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念的理解和提高解决问题的技能。本书也可供教师讲授工程数学习题课时参阅。

书中的选例以工科院校考试的中等难度的题目为主，未选入超出通常考试要求的过难、过繁的例子，以使学生易于阅读与掌握。对于各院校考试中使用较少的客观性试题（如是非题、选择题等）本书也未选入。鉴于各校在工程数学教学内容的选取上稍有差异，若初学者遇到极个别未曾学过的题型或例子，可暂时跳过它而不会影响对其他题型的阅读与理解。

本书的编写得到了学院和基础科学部领导的热忱指导与支持，在此表示感谢！书中线性代数部分由何明星（第一、二章）、伊良忠（第三、四章）、陈绍炀（第五章）撰写；数理统计部分由张文忠（第一、二章）、鲁家琳（第三、四章）、蒲　俊（第五、六章）撰写；全书由主编张文忠统稿，由张　浩审定。绘图蔺大正。

愿本书的出版能为工程数学教学质量的提高起到有益的作用。限于编者水平，如有不妥之处，敬请识者指正。

四川工业学院基础科学部

数学教研室　1996．3

目　　录

上篇　线性代数

下篇　概率统计

第一章　n阶行列式

题型一　行列式的计算

（一）　行列式定义的运用

例1　问n取怎样的数，n阶行列式次对角线上n个元素乘积的项才带有正号（在行列式中，从右上角到左下角的直线称次对角线）？

解　因n阶行列式次对角线上n个元素乘积的项为$(-1)^t a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$，其中$t$为排列$n\ (n-1)\ \cdots\ 2\cdot 1$的逆序数，故

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

欲使$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$为正，只需$\frac{n(n-1)}{2}=2k\ (k=1,2,\cdots)$，故$n=4k$或$4k-3$.

例2　由行列式的定义证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

证　不计正负号，行列式的一般项为$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，列标$j_3$、

j_4、j_5 只能在 1、2、3、4、5 中取不同的值，故 j_3，j_4，j_5 三个下标中至少有一个要取 3、4、5 中之一数，从而任一项至少要包含一个零因子，故得证.

例 3 设

$$f(x)=\begin{vmatrix} 3x+2 & x+7 & 5 & 6 \\ 6 & 2x+1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4x+3 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 5x+2 \end{vmatrix}$$

求 $f(x)$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 由行列式定义知，行列式 x^4 的项一定在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 之中，又包含 x^3 的项一定在 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 与 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 中，又 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 的系数为 -1，故 x^4 的系数为 $3\times2\times4\times5=120$

而 x^3 的系数为

$$\begin{aligned}&3\times2\times4\times2+3\times2\times5\times3+3\times4\times5\times1\\&+2\times4\times5\times2-6\times1\times4\times5\\=&48+90+60+80-120=158\end{aligned}$$

（二） 用三角形法计算行列式

例 1 计算

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 + r_1 \times (-2)]{\substack{r_2 + r_1 \times 2 \\ r_3 + r_1 \times (-3)}} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -16 \\ 0 & 26 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_3 + r_2 \times 2 \\ r_4 + r_2 \times 2}} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + r_3 \times \left(-\frac{17}{16}\right)} \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{73}{8} \end{vmatrix}$$

$$= -(-13) \times 16 \times \frac{73}{8} = 1898$$

例 2 计算

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (a_k \neq x,\ k = 1, 2, \cdots, n)$$

解 第一行乘以（−1）分别加到其余各行得

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

从第 1 列，第 2 列，…，第 n 列分别提取 a_1-x，a_2-x，…，a_n-x，得

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

因 $\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$，把所有各列加到第一列，得

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1+\frac{x}{a_1-x}+\cdots+\frac{x}{a_n-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right)$$

注 一般不规则的行列式，可应用行列式的性质把它化为三角形行列式，这时行列式的值等于主对角线元素的乘积.

例3 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 第2，3，… n列分别加到第1列，得

$$D=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

第1行乘以（-1）分别加到第2，3，…，$n-1$行

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

第1，2，3，…，$n-2$列加到第$n-1$列，得

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \cdot n^{n-2}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1}$$

注 用三角形法计算行列式时可结合行列式按（行）列展开性质进行.

（三） 用降阶法计算行列式

例 计算

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ -5 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

解 按第 5 列展开

$$D = -4 \begin{vmatrix} -5 & -3 & 2 & -3 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \times \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \times 33 \times 5 - 3 \times 5 = -675$$

注 本题降阶时使用了分块三角形矩阵的行列式性质 $\begin{vmatrix} A_m & 0 \\ C & B_n \end{vmatrix} = |A_m| \cdot |B_n|$. 它是一种降低行列式阶数的有效方法.

(四)* 用升阶法计算行列式

例 计算

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

解 把 D 加边升阶

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

把第一列的 $(-a_1)$ 倍、$(-a_2)$ 倍、$(-a_3)$ 倍、$(-a_4)$ 倍分别加到第 2 列、第 3 列、第 4 列、第 5 列，得

---

* 如未学过该节内容的读者，可不看此题型.

$$D=\begin{vmatrix}1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4\\ 1 & x_1-a_1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & x_2-a_2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & x_3-a_3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & x_4-a_4\end{vmatrix}$$

按第1列展开，得

$$\begin{aligned}D=&(x_1-a_1)(x_2-a_2)(x_3-a_3)(x_4-a_4)\\&+a_1(x_2-a_2)(x_3-a_3)(x_4-a_4)\\&+a_2(x_1-a_1)(x_3-a_3)(x_4-a_4)\\&+a_3(x_1-a_1)(x_2-a_2)(x_4-a_4)\\&+a_4(x_1-a_1)(x_2-a_2)(x_3-a_3)\end{aligned}$$

注 加边升阶法的一般方法是

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

这里关键的是适当选取 b_1，b_2，$\cdots$，b_n 以便于计算右边的行列式.

（五） 用和、差、乘积法计算行列式

例1 计算

$$D=\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & 1\\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & 1\\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1 & 1\\ b & b & b & a\end{vmatrix}$$

解 置 $a=(a-b)+b$，则