《系统科学丛书》出版说明

当今人类社会已经由“机器时代”跨入“系统时代”。系统科学是新时代占主导地位的科学，它是范围广、渗透性强的综合性学科。现实世界错综复杂、千变万化，但是，只要站在系统科学高度就能透过其复杂的表象，抓住其主要特征，研究其相互关系，找出其共同规律，探求事物的本质。

为了适应科学发展的形势，加强出书的计划性和系统性，在有关专家的大力支持下，我社决定出版《系统科学丛书》。本丛书的选题围绕系统科学的基础理论、方法及其工程应用，主要收录有关学术专著、研究生教材或参考书，是侧重理论性和方法论的高层次系列书。相信本丛书的出版不仅会对从事系统科学、控制论、信息论、运筹学、系统工程等学科的专业人员、研究生、高年级大学生有所帮助，而且也便于其它领域的科技工作者拓宽思路、有所借鉴，从而促进边缘学科、交叉学科的发展。东南大学出版社愿为繁荣系统科学尽绵薄之力，努力扶植学术著作的出版，欢迎国内外专家学者踊跃投稿。

本丛书将陆续出版，各册相互独立，自成体系，编号以出版先后为序。

东南大学出版社

1988.12.20

前　言

《线性多变量系统理论》是自动控制专业研究生的必修课程，也是现代控制理论、网络理论、通讯理论以及一般系统理论的基础。从五十年代末至今的三十年来，有关这一领域的研究和应用已经取得了相当丰硕的成果，大致可分为经典理论(1960年前)、状态空间理论(1960—1970年)、现代频域理论(1970—1978年)、多项式矩阵理论(1970—1980年)以及发展至今的稳定分式表示理论(1976年至今)五个主要部分。

编写本教材的目的是力求既概略而又较系统地反映这些成果。书中介绍线性多变量控制的基本问题包括：线性多变量系统的各种数学描述、结构特性、各种基本设计方法所涉及的主要理论问题及其已有的解答和进一步研究的方向等等。编者希望本书能帮助读者较系统地获得对线性多变量控制的一个概貌，并以此为起点去探索更深入的理论和实践问题。

本课程参考学时数为80学时。全书共分十章：第一章是数学预备知识；第二章介绍系统的传递矩阵描述和状态空间描述；第三章讨论线性动态方程的两种结构特性：可控和可观测；第四章介绍系统的多项式矩阵理论，以使状态变量研究中的许多概念、算法和结论得到简化，并在状态变量法和传递函数法之间建立更完整的联系；第五章介绍状态反馈和状态观测器的理论和设计方法；第六章介绍逆系统的概念，它在控制理论及其相关领域的许多方面发挥着重要作用；第七章介绍多变量系统的现代频域设计方法；最后三章介绍系统的稳定分式表示理论，其中第八章是输出反馈和输入-输出反馈系统的设计，第九章H_∞设计方法作为第十章的准备，它是控制理论走向实用的关键一步，第十章介绍对不确定多变量系统的

分析和设计方法。作为大学高年级学生选修本课程时，可选读本书第一章的1-1、1-2、1-3节和二、三、四、五章。对于硕士研究生，除阅读全书外，还可结合书中的内容参阅所列文献。每章后面的习题帮助读者更好地理解各章内容。

本书第六、七章以及第一章第三节的部分内容由郑卫新编写，其余部分由胡克定编写，最后由胡克定对全书进行统稿。

本教材在编写和试用过程中自始至终都得到冯纯伯教授的关心和帮助，他细心审阅了全书，并提出许多宝贵意见，对此编者表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中难免存在缺点和错误，殷切希望读者批评指正。

编者

1989年12月

符号一览表

$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{P}$	黑体大写字母表示集合
A,B,P	一般大写字母表示矩阵
$\mathbf{u},\mathbf{y},\boldsymbol{\alpha}$	黑体小写字母表示向量
u,y,α	一般小写字母表示标量函数或标量
$A^*,\mathbf{x}^*$	矩阵A和向量$\mathbf{x}$的共轭转置
$\det A$或$\|A\|$	矩阵A的行列式
$\mathrm{diag}\ \{A_1,A_2\}$	以A_1、A_2为对角块的对角矩阵，A_1、A_2无须为方阵，无须同阶
$\rho(A)$，$\nu(A)$	矩阵A的秩和零度
$\bar{\sigma}(A)$，$\underline{\sigma}(A)$	矩阵A的最大、最小奇异值
$a \mid b$	a是b的一个因子或b能被a整除
$B(x,\varepsilon)$	以x为圆心，ε为半径的球体
$\mathscr{C}$，$\mathscr{R}$	复数域，实数域
C_+,C_{+e},C_-	复平面上三个区域：闭右半平面C_+；无穷远点和C_+之和为C_{+e}；开左半平面C_-
$\mathbf{D}$	通常的稳定域，是C_-的一个子集
$\mathbf{R},\mathbf{R}[s]$	含单位1的交换整区环和环$\mathbf{R}$上的多项式
$\mathbf{F},\mathbf{F}[s]$	$\mathbf{R}$上的分式域，系数在$\mathbf{F}$中的多项式
$\mathscr{R}[s],\mathscr{R}(s)$	实系数多项式和实系数有理分式
$\mathbf{S}$	$\mathscr{R}(s)$的子集，由真稳定有理函数组成
$\mathbf{S}_D$	稳定域在$\mathbf{D}$上的真稳定有理函数集合
$\mathbf{U}$	$\mathbf{S}$中单模元的集合
$M(\mathbf{S}),M(\mathbf{R})$	元素分别在$\mathbf{S}$中和$\mathbf{R}$中的矩阵
$M[\mathscr{R}(s)]$	元素为实系数有理分式的矩阵

$U(\mathbf{S}), U(\mathbf{R})$	元素分别在S和R中的单模态矩阵
$S(P)$	使对象P稳定的反馈补偿器的集合
$W(P,C)$	由对象P、反馈补偿器C组成的闭环传递矩阵
$\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_+$	整数和正整数集合
$\lVert\cdot\rVert_P, \lVert\cdot\rVert_\infty$	P范数和∞范数
$\sim$	等价关系，即仅相差单模元因子
$:=$	按定义等于
$\frac{d}{dt}A := \left\{\frac{d}{dt}a_{ij}\right\}$	
$L[A] := L[a_{ij}]$	算子L作用于A，即是作用于A的各元
$\dot{\mathbf{x}} := \frac{d}{dt}\mathbf{x}$	
$\alpha \in \mathbf{U}(\alpha \overline{\in} \mathbf{U})$	α是(不是)U中的一个元素
$\cup, \cap, \oplus$	二个集合的和、交以及直和，例如：$\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$，$\mathbf{X}_1 \cap \mathbf{X}_2$，$\mathbf{N}_1 \oplus \mathbf{N}_2$
$\supseteq(\subseteq)$	左面的集合包含(被包含于)右面的集合，例如：$\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}_2$，$\mathbf{U} \subseteq \mathbf{S}$
IOD, SSD, PMD	系统的输入输出描述，状态空间描述和多项式矩阵描述
FMD, r.c.f, l.c.f.	矩阵分式描述，右互质分式和左互质分式
l.c.m, g.c.d.	最小公倍数和最大公因子
p.i.d.	主理想整区

目　录

第一章　数学预备知识 …… 1
1-1　近世代数的一些结果 …… 1
1-1-1　环、域和理想 …… 1
1-1-2　分式环和域 …… 4
1-1-3　主理想整区 …… 5
1-1-4　欧几里得整区 …… 8
习题 1-1 …… 11
参考文献 …… 12
1-2　矩阵环 …… 12
1-2-1　矩阵和行列式 …… 12
1-2-2　规范型 …… 14
1-2-3　p.i.d. 上的互质因式分解 …… 24
习题1-2 …… 31
参考文献 …… 32
1-3　线性空间 …… 33
1-3-1　数域上的线性空间 …… 33
1-3-2　线性算子和线性代数方程 …… 38
1-3-3　奇异值分解与广义逆矩阵 …… 46
1-3-4　矩阵函数和最小多项式 …… 57
1-3-5　范数和内积，赋范空间 …… 62
习题1-3 …… 65
参考文献 …… 69
1-4　拓扑学初步 …… 70
1-4-1　拓扑空间 …… 70

1-4-2　拓扑环……………………………………………………………75
习题1-4 ……………………………………………………………………76
参考文献……………………………………………………………………77
第二章　系统的输入输出描述和状态空间描述……………………78
2-1　引言…………………………………………………………………78
2-2　输入输出描述(IOD)………………………………………………79
2-3　状态空间描述(SSD)………………………………………………85
2-3-1　状态的概念和动态方程 …………………………………………85
2-3-2　举例 ………………………………………………………………89
2-3-3　状态方程的解和模态分解 ………………………………………94
2-3-4　等价动态方程 ……………………………………………………101
2-4　二种描述的比较……………………………………………………103
2-5　组合系统……………………………………………………………105
2-5-1　组合系统的数学描述 ……………………………………………105
2-5-2　反馈组合系统的适态 ……………………………………………109
2-6　离散时间系统………………………………………………………116
习题2 ………………………………………………………………………118
参考文献……………………………………………………………………125
第三章　线性动态方程的结构分解…………………………………126
3-1　引言…………………………………………………………………126
3-2　行搜索算法…………………………………………………………126
3-3　线性动态方程的可控性，可控性指数……………………………132
3-4　对偶定理，线性动态方程的可观测性……………………………146
3-5　Jordan型动态方程的可控性与可观测性 …………………………152
3-6　线性时不变动态方程的结构分解…………………………………158
3-7　计算问题……………………………………………………………168
习题3 ………………………………………………………………………175
参考文献……………………………………………………………………179

第四章　系统的多项式矩阵理论 …… 181
4-1　引言 …… 181
4-2　多项式矩阵的一些结果 …… 182
4-3　列(行)既约多项式矩阵 …… 194
4-4　真有理矩阵分式的互质 …… 199
4-5　特征多项式和真有理矩阵的次数 …… 213
4-6　真有理矩阵的最小实现 …… 215
4-6-1　单变量情况 …… 215
4-6-2　基于右矩阵分式的控制器型实现 …… 222
4-6-3　基于左矩阵分式的观测器型实现 …… 238
4-7　系统的多项式矩阵描述（PMD） …… 243
4-8　系统三种描述的关系，系统等价 …… 250
4-9　多变量系统的极点和零点，传输零点和解耦零点 …… 261
习题4 …… 270
参考文献 …… 280
第五章　状态反馈和补偿器设计 …… 282
5-1　引言 …… 282
5-2　动态方程的规范型 …… 283
5-3　状态反馈的状态空间分析，模态能控 …… 293
5-3-1　单变量情况 …… 294
5-3-2　多变量情况，直接方法和控制器型方法 …… 299
5-4　状态反馈的传递函数分析 …… 309
5-4-1　单变量情况 …… 310
5-4-2　多变量情况，反馈增益矩阵的唯一性 …… 311
5-5　二次型调节器问题 …… 317
5-6　状态估计 …… 323
5-6-1　n 维观测器 …… 323
5-6-2　n-q 维观测器 …… 328

5-7　分离原理，补偿器设计…………………………………… 333
5-8　状态反馈解耦……………………………………………… 337
5-9　状态反馈后的能观测性，(A, B)不变子空间 ……… 343
5-10　常增益输出反馈的一些结果…………………………… 349
习题5 ………………………………………………………… 357
参考文献……………………………………………………… 362
第六章　多变量系统的逆………………………………… 365
6-1　引言……………………………………………………… 365
6-2　逆系统的定义…………………………………………… 366
6-3　Silverman构造算法……………………………………… 372
6-4　逆系统的性质…………………………………………… 385
6-5　可逆性…………………………………………………… 398
习题6 ………………………………………………………… 406
参考文献……………………………………………………… 408
第七章　多变量系统频域理论…………………………… 410
7-1　引言……………………………………………………… 410
7-2　多变量系统的性能指标和设计要求…………………… 412
7-2-1　稳定性 …………………………………………… 415
7-2-2　关联性 …………………………………………… 417
7-2-3　整体性 …………………………………………… 419
7-2-4　稳态精度 ………………………………………… 421
7-3　Nyquist阵列方法………………………………………… 422
7-3-1　基本设计思想 …………………………………… 422
7-3-2　增益空间 ………………………………………… 424
7-3-3　对角优势矩阵 …………………………………… 429
7-3-4　对角优势系统的Nyquist稳定判据 …………… 432
7-3-5　反馈增益矩阵F的设计 ………………………… 437
7-3-6　对角优势化 ……………………………………… 442

7-3-7 设计步骤与计算举例 …………………………………… 452
7-4 特征轨迹方法…………………………………… 462
7-4-1 基本原理 …………………………………… 462
7-4-2 特征轨迹 …………………………………… 465
7-4-3 系统性能分析 …………………………………… 469
7-4-4 几种常用控制器 …………………………………… 473
7-4-5 设计步骤与计算举例 …………………………………… 476
习题7 …………………………………… 484
参考文献…………………………………… 487
第八章 镇定…………………………………… 489
8-1 引言…………………………………… 489
8-2 真稳定有理函数 环S…………………………………… 494
8-3 S和M(S)上的欧几里得除法…………………………………… 499
8-4 闭环稳定性…………………………………… 507
8-5 所有镇定补偿器的参数化表示…………………………………… 514
8-6 严格镇定和同时镇定…………………………………… 518
8-7 可靠镇定…………………………………… 528
8-8 双参数补偿器…………………………………… 536
8-9 调节和解耦…………………………………… 543
习题8 …………………………………… 547
参考文献…………………………………… 549
第九章 H_∞设计方法…………………………………… 551
9-1 引言…………………………………… 551
9-2 HARDY空间的一些结果…………………………………… 554
9-3 最小敏感性：标量情况…………………………………… 560
9-4 最小敏感性：宽对象（FAT PLANT）情况……… 572
9-5 矩阵Nevanlinna-Pick算法 …………………………………… 581
9-6 最小敏感性：一般情况…………………………………… 591

参考文献…………………………………………………………… 598
第十章 鲁棒调节……………………………………………………… 600
10-1 引言………………………………………………………… 600
10-2 图象拓扑…………………………………………………… 602
10-3 图象度量…………………………………………………… 614
10-4 模型不确定性，鲁棒条件………………………………… 623
10-5 鲁棒调节，内模原理……………………………………… 639
10-5-1 单参数情况……………………………………………… 640
10-5-2 双参数情况……………………………………………… 648
10-5-3 鲁棒调节的状态空间实现……………………………… 655
10-6 最优调节…………………………………………………… 658
10-7 最小敏感性的解耦设计方法……………………………… 663
习题10………………………………………………………… 674
参考文献……………………………………………………… 674

第一章　数学预备知识

1-1　近世代数的一些结果

本节简单介绍环的基本性质，它们都是本书以后章节要用到的。至于对其更全面的论述可参阅有关文献。

1-1-1　环、域和理想

定义1.1.1　环是一个非空集合R，其中有叫做加法（+）和乘法(·)的两种运算，它们满足：

(i)（R，+)是交换群，亦即

$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a、b、c \in \mathbf{R}$

$a+b=b+a \quad \forall a、b、c \in \mathbf{R}$

存在零元素$0 \in \mathbf{R}$，使

$a+0=0+a=a \quad \forall a \in \mathbf{R}$

对任何$a \in \mathbf{R}$，存在相应的负元素$-a \in \mathbf{R}$，使$a+(-a)=0$。

(ii)（R，·)是半群，亦即

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad \forall a、b、c \in \mathbf{R}$

(iii)　乘法对加法满足分配律，亦即

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c \quad \forall a、b、c \in \mathbf{R}$

通常把$a\cdot b$记作ab，把$a+(-b)$记作$a-b$。

称环R是交换的，如果$ab=ba \quad \forall a、b \in \mathbf{R}$。若存在元素$1 \in \mathbf{R}$，使$1\cdot a=a\cdot 1=a \quad \forall a \in \mathbf{R}$，则称1为环R中的单位元。

例1.1.1 整数集合**Z**对于通常的加法和乘法，成为交换环，且有单位元1。偶数集合**E**对于通常的加法和乘法，成为交换环，但不具有单位元1。元素在**Z**中的2×2矩阵$\mathbf{Z}^{2\times 2}$是带单位1的非交换环。

称环**R**是整区，如果$a\cdot b=0\Rightarrow a=0$或$b=0$ $\forall a$、$b\in\mathbf{R}$。

例1.1.2 在例1.1.1中，**Z**和**E**都是整区，而$\mathbf{Z}^{2\times 2}$不是整区。环$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}=\mathbf{Z}/(6)$表示任一整数被6除得的余数，它是带单位1的交换环，但由于$2\cdot 3=0$故不是整区。

设**R**为带单位元1的环，我们称$x\in\mathbf{R}$为单模元，如果存在$y\in\mathbf{R}$，使$xy=yx=1$，这时称y是x的逆，并可记作x^{-1}，可以证明这样的y是唯一的。

例1.1.3 设$\mathbf{R}=c[0, 1]$为$[0, 1]$区间定义的实连续函数的合，**R**上的加法和乘法定义为

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$$

$$(xy)(t)=x(t)\cdot y(t) \qquad \forall t\in[0, 1], \ \forall x、y\in\mathbf{R}$$

则**R**是带单元1的交换环，但不是整区。例如，若

$$x(t)=\begin{cases}1-2t & t\in[0, 0.5]\\ 0 & t\in(0.5, 1]\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}0 & t\in[0, 0.5]\\ 2t-1 & t\in(0.5, 1]\end{cases}$$

则$xy=0$，尽管这时$x\neq 0$，$y\neq 0$。因此，函数$x\in\mathbf{R}$是**R**上的单模元，当且仅当$x(t)\neq 0\ \forall t\in[0, 1]$，即$x$在$[0, 1]$上不变符号。

定义1.1.2 域**F**是带单位元的交换环，只要满足以下两个附加条件：

(i) **F**至少包括两个元素；

(ii) **F**的每个非零元都是单模元。

例1.1.4 有理数、实数和复数是大家熟悉的域的例子。此外，实系数多项式分式组成了有理函数域$\mathscr{R}(s)$。

环R上的一个子集S称为R的子环，只要S本身也是环，即$0\in S$，且S中任意二个元素的和、差、积仍在S内。

定义1.1.3 环R上的一个子集I称为R的左理想，只要(i) I是R的加法群的子群；(ii)$a\in I$，$x\in R \Rightarrow xa\in I$。

以上定义中，(i)意味着$0\in I$，$x\pm y\in I$，(ii)意味着I对R是左不变的。同样，可以定义R的右理想，只要将(ii)改成(ii′)$a\in I, x\in R\Rightarrow ax\in I$。如果R是交换环，则R的左右理想同一，称为R的双边理想或简称理想。

例1.1.5 在环$R=Z^{2\times 2}$中，$I_1=\{M\in Z^{2\times 2}: m_{11}=m_{21}=0\}$是R的一个左理想；而$I_2=\{M\in Z^{2\times 2}: m_{12}=m_{22}=0\}$是R的一个右理想；对角矩阵$D=\{M\in Z^{2\times 2}: m_{11}=m_{22}=0\}$是R的一个子环，但它既不是左理想，也不是右理想；设a为一整数，则$M(a)=\{M\in Z^{2\times 2}: a|m_{ij}\ \ \forall i、j\}$是R中的一个理想。

设R为带单位元1的交换环，a是R中一个元素，则所有形如xa $\forall x\in R$的集合是R中的一个理想，我们称它为由a生成的主理想。

称交换环R中的一个理想是素理想，如果$a、b\in R$，$ab\in I\rightarrow a\in I$或$b\in I$，等价地，I是素理想$\Leftrightarrow$集$R-I$对乘法封闭。

例1.1.6 整数环Z中某个整数n的倍数集合(n)是由n生成的主理想。如果(n)是素理想，当且仅当若n是ab的因子，意味着$n|a$或$n|b$，而这又意味着n是素数。

通常并不把环R本身看成素理想，这因为虽然环R的所有元素都是1的倍数，但并不把1考虑成是素数(见例1.1.6)。因此，“I是R中的素理想”自然意味着I是R的真子集。

1-1-2 分式环和域

本节讨论的环都是带单位元1的交换环。

设**R**为环，称$a\in\mathbf{R}$是一个绝对非零因子，只要$ab=0\Rightarrow b=0$。任何环中都存在绝对非零因子，例如，环中的单模元。但是，除此之外还有其它的绝对非零因子，例如，在环$\mathbf{Z}^{n\times n}$中，矩阵M为绝对非零因子，当且仅当M的行列式非零。

考虑例(1.1.3)中的环$c[0, 1]$，设$x(\cdot)$为环中一元素，仅在有限点上为零，又若$y\in c[0, 1]$，且$xy=0$，则$x(t)y(t)\equiv0$意味着对有限点外的全体t都有$y(t)=0$，但是$y(\cdot)$是连续的，这就意味着$y(t)\equiv0$，或者说，y是环上的零元，因此，x是绝对非零因子。

若a为绝对非零因子，则$ab=ac\Rightarrow b=c$，即a可"相消"。显然，若**R**是整区，则**R**上任一非零元都是绝对非零因子。

称环**R**中的一个集合M为倍数系统，只要a、$b\in M\Rightarrow ab\in M$，亦即$M$中任一元的所有因子都在$M$之中。

命题1.1.1 环**R**中绝对非零因子的集合**N**是倍数系统。

证明 设a、$b\in\mathbf{N}$，$y\in\mathbf{R}$，且$aby=0$，则由于a、$b\in\mathbf{N}$，故$aby=0\Rightarrow by=0\Rightarrow y=0$，因此，$ab\in\mathbf{N}$。 □

设**R**为环，**M**是**R**中的倍数系统，带单位1，并且是**N**的子集（**N**定义于命题1.1.1）。现在构造一个环**L**，它包含**R**，并使**M**中每一元都是**L**中的单模元。

考虑集合$\mathbf{R}\times\mathbf{M}$中的二元关系～如下：$(a, b)\sim(c, d)\Leftrightarrow ad=bc$。可以证明这是一种等价关系，显然它是对称的和反身的。为了证明它的传递性，假定$(a, b)\sim(c, d)$和$(c, d)\sim(e, f)$，则$ad=bc$和$cf=de$成立。将前式乘f、后式乘b后，可得$adf=bcf=bde$，但$d\in\mathbf{M}$，且$\mathbf{M}\subseteq\mathbf{N}$，故$d\in\mathbf{N}$。在上式中将$d$消去后，就得到$af=be$，亦即$(a, b)\sim(e, f)$。

现在将$\mathbf{R}\times\mathbf{M}$在上述等价关系下归类，并记作$\mathbf{L}$，集合$\mathbf{L}$由分式$a/b$组成，若$ad=bc$，我们就把$a/b$和$c/d$归为一类。在$\mathbf{L}$的分式之间定义加法和乘法为

$$a/b+c/d=(ad+bc)/bd, \qquad a/b\cdot c/d=ac/bd \tag{1.1.1}$$

注意到，b，$d\in\mathbf{M}$，所以，$bd\in\mathbf{M}$，亦即式(1.1.1)定义的加法和乘法有意义。在这一加法和乘法定义下的$\mathbf{L}$成为一个环。此外，对任一$a\in\mathbf{R}\Rightarrow a/1\in\mathbf{L}\Rightarrow\mathbf{R}\subset\mathbf{L}$和$1\in\mathbf{L}$。最后，对任一$d\in\mathbf{M}\Rightarrow d/1\in\mathbf{L}$，并且，$d/1$是$\mathbf{L}$中的单模元，它的逆是$1/d$，因此，$\mathbf{M}$中的任一元都是$\mathbf{L}$中的单模元。环$\mathbf{L}$称为$\mathbf{R}$关于$\mathbf{M}$的分式环，记作$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}$。

由于$\mathbf{M}\subseteq\mathbf{N}$，所以$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}$有最多个数的单模元，特别若$\mathbf{R}$是整区，则$\mathbf{N}=\mathbf{R}-0$包括了$\mathbf{R}$的全部非零元。这时，环$\mathbf{F}=(\mathbf{R}-0)^{-1}\mathbf{R}$具有如下性质：$\mathbf{R}$中每一非零元素都是$\mathbf{F}$中的单模元，$\mathbf{F}$中的每一非零元也是自身的单模元，这时若$a/b\in\mathbf{F}$，且$a\neq0$，则$b/a$就是$a/b$在$\mathbf{F}$中的逆。因此，$\mathbf{F}$成为一个域，称为关于整区$\mathbf{R}$的分式域或商域。

例1.1.7 整数集合$\mathbf{Z}$是整区，关于$\mathbf{Z}$的分式域是有理数集合。

在环$\mathbf{Z}$中，$\mathbf{M}$是不被3整除的数集，则$\mathbf{M}$是倍数系统（因为3是素数），且$1\in\mathbf{M}$，分式环$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Z}$是有理数集合，其既约分式的分母不是3的倍数，这是有理数域的子环。

1-1-3 主理想整区

本节讨论的环都是带单位1的交换环。

定义1.1.4 称环$\mathbf{R}$为主理想环，如果$\mathbf{R}$中每个理想都是主理想。如果$\mathbf{R}$同时又是整区，则称$\mathbf{R}$为主理想整区(p.i.d.)。

注意：主理想$\mathbf{I}$由某元素a的全体倍数组成，即$\mathbf{I}=\{xa:x\in\mathbf{R}\}$，因此，主理想环中每个理想都由一个元素生成。