

试验优化技术

任露泉 主编



机械工业出版社

试验优化技术

机

71422

社

71112
7
31

试验优化技术

任露泉 主编



机械工业出版社

本书从技术观点，系统介绍试验优化技术的基本原理、常用方法及其现代发展。全书分两篇十六章。上篇试验设计技术，除正交设计、干扰控制与数据处理等常用技术外，还介绍SN比设计、均匀设计、广义设计及调优运算等新技术。下篇回归设计技术，除各种回归的正交设计、旋转设计、饱和设计、多项式设计、D-最优设计与混料设计外，还介绍多次变换设计、交互作用搜索设计以及回归方程的应用分析技术。本书载有多种行业的简单实例和通用的设计方案，便于自学和参照应用。

本书可供科研人员、设计人员、工程技术人员、管理人员、试验工作者以及大专院校师生参阅。

1988/20

试验优化技术

任露泉 主编

责任编辑：赵爱宁 周纯贤 高文龙

封面设计：田淑文

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

吉林工业大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本787×1092¹/₁₆·印张17¹/₂·字数427千字

1987年2月北京第一版·1987年2月长春第一次印刷

印数 00,001—5,000·定价：4.20元

统一书号：15033·6774H

前 言

试验优化是对实物试验与非实物试验进行优化设计与分析的一种通用的现代技术，是现代优化理论的一个重要方面。本书主要介绍试验优化的基本原理、常用方法以及国内外在科学研究、实际生产、系统设计、企业管理等方面的实际应用，同时叙述作者对试验优化某些方法在设计原理的完善与发展，主要设计参数的合理修正与精度分析、繁冗公式与复杂算法的实用简化以及新方法的原理探讨与应用研究等方面所作的一些工作。

随着科研生产的不断发展，试验优化技术的应用愈益广泛，已被人们认为是科技人员和管理人员的必备技术。国外不少单位已从行政上规定，所有的工程技术人员、销售人员和生产管理人员，都必须学习试验优化技术。国内许多高等院校也先后为本科生、研究生开设了试验优化课程；有的学校，已将试验设计列为本科生的必修课，将回归设计列为研究生的学位考试课。为了满足各方面读者的实际需要，本书从技术观点、应用观点，力求对每种方法的原理给予通俗的说明，并通过简单实例阐述各种方法的应用技术，但一般都略去理论的证明与公式的推导。读者只要理解公式的实际意义，便能顺利阅读本书。希望进一步了解数学原理的读者，可以阅读本书所附的有关参考文献。

全书共分两篇十六章。主要内容有试验设计技术与回归设计技术，它们是试验优化领域内两个相对独立的分支。第一篇中，一、二、三章是试验设计技术的基础，也是回归设计技术的应备知识，是初学者应首先掌握的；四至七章是正交试验设计技术的推广应用和现代发展。第二篇中，八、九、十章是回归设计的基本技术，其余各章则是回归设计技术的进一步完善与发展。读者可在掌握上述试验优化基本技术的基础上，根据实际需要有针对性地阅读有关章节。

本书由任麟泉主编，李月潭、吴玉岩参加编写。

本书由许金钊教授主审。

本书可以作为工科各专业本科生、研究生的教学参考书对于科学工作者、工程师和管理人员，寻求产品最优的设计条件与生产条件，寻求系统最佳的动态特性与稳定性，寻求各种线性与非线性数学模型，本书都有参考价值。

限于我们的实际经验和理论水平，书中缺点错误在所难免，诚望读者批评指正。

一九八六年六月

目 录

导论.....	1	§ 4—7 容差设计.....	86
		§ 4—8 动态特性设计.....	89
		第五章 广义试验设计.....	94
		§ 5—1 广义试验.....	94
		§ 5—2 故障判析.....	95
		§ 5—3 寿命试验.....	96
		§ 5—4 产品销售试验.....	97
		§ 5—5 数学试验设计.....	98
		§ 5—6 生产计划试验设计.....	101
		第六章 调优运算.....	104
		§ 6—1 调优运算的特点.....	104
		§ 6—2 二因素调优运算.....	104
		§ 6—3 三因素调优运算.....	109
		§ 6—4 多因素调优运算.....	111
		第七章 均匀设计.....	113
		§ 7—1 均匀性.....	113
		§ 7—2 均匀设计表.....	114
		§ 7—3 均匀试验设计.....	116
		§ 7—4 均匀设计结果分析.....	118
		第二篇 回归设计技术	
		第八章 单元线性回归正交设计.....	121
		§ 8—1 单元线性回归正交设计.....	121
		§ 8—2 显著性检验.....	123
		§ 8—3 单元线性回归的整体正交设计.....	126
		第九章 多元线性回归设计.....	130
		§ 9—1 多元线性回归模型.....	130
		§ 9—2 多元线性回归设计常用工具.....	131
		§ 9—3 多元线性回归正交设计.....	133
		§ 9—4 多元线性回归的统计检验.....	137
		§ 9—5 单纯形回归设计.....	139
		§ 9—6 最优回归方程.....	144
		第十章 二次回归组合设计.....	147
		§ 10—1 二次回归模型.....	147
		§ 10—2 组合设计.....	148
		§ 10—3 二次回归正交组合设计.....	150
导论.....	1		
第一篇 试验设计技术			
第一章 正交试验设计.....	5		
§ 1—1 基本概念.....	5		
§ 1—2 正交表.....	7		
§ 1—3 正交试验设计的基本方法.....	11		
§ 1—4 有交互作用的正交试验设计.....	15		
§ 1—5 直接应用混合正交表设计法.....	19		
§ 1—6 正交试验设计常用方法概述.....	21		
§ 1—7 改造正交表设计法.....	22		
§ 1—8 调整因素及水平设计法.....	27		
§ 1—9 拟因素设计法.....	30		
§ 1—10 试验结果分析中的几个实际问题.....	32		
第二章 试验干扰控制.....	36		
§ 2—1 试验干扰.....	36		
§ 2—2 试验设计的基本原则.....	37		
§ 2—3 单向干扰控制.....	39		
§ 2—4 两向干扰控制.....	43		
第三章 正交试验设计的方差分析.....	48		
§ 3—1 极差分析与方差分析.....	48		
§ 3—2 正交试验设计方差分析的基本方法.....	49		
§ 3—3 重复试验的方差分析.....	54		
§ 3—4 不等水平正交试验设计的方差分析.....	56		
§ 3—5 不饱和正交表的方差分析.....	62		
§ 3—6 误差分析与试验水平.....	64		
第四章 SN比试验设计.....	67		
§ 4—1 概述.....	67		
§ 4—2 SN比.....	70		
§ 4—3 SN比试验设计.....	73		
§ 4—4 三次设计.....	75		
§ 4—5 内外侧因素有关联时的参数设计.....	77		
§ 4—6 内外侧因素无关联时的参数设计.....	83		

§ 10—4	二次回归连贯设计	155	§ 14—5	饱和 D -最优设计	217
§ 10—5	二次旋转组合设计	157	§ 14—6	近似 D -最优设计	221
§ 10—6	二次正交旋转组合设计	161	第十五章	混料回归设计	227
§ 10—7	二次通用旋转组合设计	161	§ 15—1	混料试验	227
§ 10—8	二次旋转设计分析	162	§ 15—2	单形重心混料设计	228
第十一章	正交多项式回归设计	171	§ 15—3	有下界约束的混料设计	232
§ 11—1	概述	171	§ 15—4	极端顶点设计	235
§ 11—2	正交多项式	171	§ 15—5	D -最优极端顶点设计	237
§ 11—3	单元正交多项式回归设计	173	§ 15—6	混料的比率设计	240
§ 11—4	多元正交多项式回归设计	176	§ 15—7	控制点检验	241
§ 11—5	部分正交多项式回归设计	179	第十六章	回归方程的应用分析技术	243
第十二章	多次变换设计	188	§ 16—1	预测与控制	243
§ 12—1	多次变换	188	§ 16—2	一次回归正交设计的梯度法寻优	247
§ 12—2	单元二次变换设计	188	§ 16—3	回归方程的极值判别	250
§ 12—3	单元多次变换设计	189	§ 16—4	二次曲面的法式分析	252
§ 12—4	多元变换设计	194	§ 16—5	二次曲面的等值线分析	256
第十三章	交互作用的搜索设计	197	§ 16—6	二次曲面的主轴梯度分析	258
§ 13—1	问题的提出	197	附录		261
§ 13—2	套表搜索设计的基本程序	198	附录一	常用正交表	261
§ 13—3	线性套表搜索设计	199	附录二	随机数字表(部分)	267
§ 13—4	非线性套表搜索设计	201	附录三	t 分布的双侧分位数(t_{α})表	268
§ 13—5	序贯搜索设计	204	附录四	$F_{\alpha}(f_1, f_2)$ 表($\alpha=0.25, 0.1, 0.05, 0.01$)	269
第十四章	D -最优回归设计	207	附录五	正交多项式表($N=2-11$)	271
§ 14—1	概述	207	附录六	均匀设计表	272
§ 14—2	广义回归模型	207	参考文献		274
§ 14—3	D -优良性与 G -优良性	209			
§ 14—4	构造 D -最优设计的数值方法	216			

导 论

一、什么是试验优化

在现代社会中,实现过程和目标的最优化,已成为解决科学研究、工程设计、生产管理以及其他方面实际问题的一项重要原则。所谓最优化,简单地说,就是高效率地找出问题在一定条件下的最优解。试验优化就是在这种最优化思想指导下,通过广义试验(包括实物试验与非实物试验)进行最优设计的一种优化方法,也是应用数学的一个新兴分支。它从不同的优良性出发,合理设计试验方案,有效控制试验干扰,科学处理试验数据,全面进行优化分析,直接实现优化目标,已成为现代优化技术的一个重要方面。

长期以来在试验领域中,特别是对于多因素试验,传统的试验方法往往只能被动地处理试验数据,而对试验方案及试验过程的优化,常常显得无能为力。这不仅造成盲目地增加试验次数,而且往往不能提供充分可靠的信息,以致达不到预期的目的,造成人力、物力和时间的大量浪费。近代创立和发展起来的试验优化法,将优化思想和要求贯穿于试验的全过程,从此试验才真正走上科学的轨道,使试验领域发生了深刻的变化,也有力地促进了现代优化技术的发展。

现代优化技术主要分为三个方面:优化控制、优化设计与优化试验。目前,常用的优化技术有直觉优化、进化优化、试验优化、价值分析优化和数值计算优化。但实际上,这些优化方法不是属于直接优化,就是属于间接优化。试验优化是一种直接优化法。具体地说,设计试验方案时,不仅使方案具有一定的优良性,也使试验点大大减少,但少量实施的试验点却能获取丰富的试验信息,得出全面的结论;实施试验方案时,能有效地控制试验干扰,提高试验精度;处理试验结果时,通过简便的计算及分析,可以直接获得较多的优化成果。显然,试验优化既是全过程优化,又是多目标优化。对于多快好省地进行多因素试验,对于构造各种线性与非线性数学模型,对于科学研究中发现新规律、实际生产中探寻新工艺、产品开发中进行优质设计、管理科学中寻求最佳决策等,试验优化都是一种非常有效的数学工具。

一切设计、控制与决策,都必须首先从信息载体中获取有用的信息。我们现在正处于控制论时代,当信息成为价值手段,知识、信息和技术成为重要的生产力时,试验优化能够满足时代的需要。因为试验优化实际上是一门关于信息的量的科学,运用试验优化技术,可以既快又省地获取既多又好的信息,并能科学地分析和利用已获取的信息。

通常,试验是指实物试验。但对于试验优化,常常进行的是广义试验。凡是能获取信息的有效科学手段和方法,都可作为广义试验的试验方法。因此试验优化不仅是提高获取信息效率的一种现代技术,也是适用面很广的一种通用技术。

二、常用优良性

试验优化时,人们往往根据实际需要,进行不同优良性的设计,并运用合适的优化方法,完满地实现优化目标。常用的优良性有:

1. 正交性

在 p 维因素空间内, 如果试验方案 $e(N)$ 使所有 j 个因素的不同水平 x_{ij} 满足

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N x_{ij} = 0 & (j=1, 2, \dots, p) \\ \sum_{i=1}^N x_{ih} x_{ij} = 0 & h \neq j \end{cases}$$

就称该方案具有正交性。正交性主要表现于正交表 $L_n(b^e)$ 与 $L_n(b_1^{e_1} \times b_2^{e_2})$ 中, 也表现于正交多项式组中, 具体应用于各种正交设计。正交性能减少试验次数, 消除各种效应间的相关性, 使因素效应、交互作用效应以及回归系数的计算分析大大简化。正交性是试验优化中应用最广泛的一种优良性。

2. 均匀性

如果试验方案 $e(N)$, 使得 N 个试验点按一定的规律充分均匀地分布在试验范围内, 每个试验点都有一定的代表性, 就称该方案具有均匀性。均匀性是新开发的一种优良性, 它主要表现于均匀设计表 $U_n(b^e)$ 中, 具体应用于均匀试验设计。均匀性比正交性能更大量地减少试验次数, 但仍能得到反映试验体系主要特征的试验结果。

3. 饱和性

若试验方案 $e(N)$ 的无重复试验次数 N , 或者比试验因素及其交互作用的自由度之和多 1, 或者与欲求的回归方程的待估计参数个数相等, 则称该方案具有饱和性。饱和性主要应用于各种饱和设计, 它能最有效地发挥各个试验点的作用, 使每个试验点获取最多的有用信息, 大大减少试验次数, 缩短设计周期。

4. 旋转性

在 p 维因素空间中, 如果试验方案 $e(N)$ 使得试验指标回归值 \hat{y} 的预测方差 $D(\hat{y})$, 仅与试验点到试验中心距离 ρ 有关, 则称方案 $e(N)$ 具有旋转性。旋转性应用于各种回归旋转设计。旋转变性能保证 p 维因素空间中同一 p 维球面上各点的预测方差 $D(\hat{y})$ 相等, 这样就消除了 $D(\hat{y})$ 的方向性, 为进一步调优创造了条件。

5. D -优良性

在 p 维因素空间确定的区域内, 对于给定的回归模型, 若在一切实可能的方案中, 方案 $e(N)$ 信息矩阵的行列式值最大, 就称该方案为 D -最优设计。 D -最优设计使回归系数 $b(b_1, b_2, \dots, b_m)$ 的 m 维密集椭球体体积最小。实际上, 它与 G -最优设计等价, 是使回归系数的预测方差 $D(b)$ 最小的设计。显然, 回归值 \hat{y} 的预测方差 $D(\hat{y})$ 也最小。

在试验优化的实际应用中, 人们还常常希望某些优良性共集于同一设计, 如饱和正交设计, 正交旋转设计, 饱和 D -最优设计等。有时, 为了达到优化目标, 既可以连续多次运用某种优良性, 也可以根据实际需要, 在不同的优化阶段灵活选用不同的优良性。例如在因素变化的全域进行因素选优时, 可以选用正交性或饱和性, 而在因素选优基础上再进行方程优选时, 则可以选用旋转性或 D -优良性。

三、试验优化常用方法

目前, 在科研与生产的实际应用中, 试验优化主要是进行离散优化, 有时也进行序贯优化, 有时则必须综合应用离散优化和序贯优化。

所谓离散优化, 就是在试验区域内, 有目的有规律地散布一定量的试验点, 多方向同时寻找优化目标。如果优化目标是最优点, 则离散优化只是一种试验点优选法, 优选过程不是遵

循一定的寻优路径，而只是对给定条件下一切可能的试验点进行选优。因此离散优化不能真正实现全域优化，所谓最优只是近似的，最优点也只是较优点。但实际应用表明，离散优化完全能够满足一般科研和生产的实际需要。这种离散优化法有正交设计， SN 比设计，均匀设计等。如果优化目标是最优回归方程，则这种离散优化法就是回归设计。

在实现优化目标的整个过程中，所谓序贯优化是遵循一定优化路径逐渐寻找最优点的方法，它是单向寻优，后一阶段优化是在前一阶段优化的基础上进行的。通常情况下，序贯优化可以进行全域精确寻优。常用的序贯优化法有0.618法、Fibonacci法、单纯形法、梯度法、渐近分式法、连贯设计法等。

随着科学研究的深入，工农业生产的发展和计算机技术的广泛应用，试验优化的内容越来越丰富，设计方法也越来越多。例如仅正交试验设计与混料回归设计就分别有几十种方法。试验优化最常用的技术有试验设计与回归设计：

1. 试验设计

试验设计是离散优化的基本技术，它是从正交性、均匀性出发，利用拉丁方、正交表、均匀表等作为工具来设计试验方案、实施广义试验，直接寻找最优点。试验设计时，方案的编制与数据的处理常常表格化，这样应用分析非常方便。

试验设计作为相对独立的一门学科，既是应用数学的一个新分支，也是试验优化的一个重要组成部分。本世纪廿年代，英国学者 R. A. Fisher 运用均衡排列的拉丁方，解决了长期未能解决的试验条件的不均匀问题，提出了方差分析法，创立了“试验设计”(Design of Experiments)。在试验设计的发展道路上，如果说 Fisher 创立传统的试验设计是第一个里程碑，正交表的构造和开发是第二个里程碑，那么日本学者田口玄一开发的 SN 比试验设计则是第三个里程碑。它是试验设计的现代发展，为试验设计开拓了更加广阔的应用领域，为优质产品的设计和开发提供了非常有效的工具。

2. 回归设计

如果仅以最优回归方程为优化目标，多数回归设计方法都是离散优化，但在 D -最优回归设计与混料回归设计应用测度设计寻求最优方案时，则表现为序贯优化。如果最优化目标是最优组合条件，则回归设计一般表现为离散优化与序贯优化的综合。回归设计主要是从正交性、旋转性和 D -优良性出发，利用正交表、 H 阵、单纯形、中心组合法和正交多项式组以及计算机技术编制试验方案，直接求取各种线性和非线性回归方程。实际上，回归设计是现代建模的一种最优化技术。常用的回归设计法有多元线性正交设计、二次组合设计、正交多项式设计、 D -最优设计、混料设计等。

回归设计实际上产生于本世纪五十年代，它是综合回归分析与试验设计的现代发展而建立起来的试验优化领域的一个新分支，也是数理统计学科的一个新发展。它将方案设计、数据处理与回归方程的精度统一起来进行优化，已成为现代通用的一种试验优化技术。我们知道，试验设计很难用于系统连续优化，因为它不能给出连续模型。由于某些因素水平变化的非定量性和非连续性，即使利用试验数据线性结构模型或伪变量回归分析建立起预测方程，也只能近似选优。相反，回归设计则提供了便于系统连续优化和进一步精确选优的条件。由此，回归设计不但使工程技术、自然科学和社会科学乃至思维科学中具有相关关系的多因素问题，都有可能实现定量分析，而且有可能用最小的代价达到寻优的目的，不论那些问题是白色系统、灰色系统还是黑色系统。可以预料过去那些只能进行定性研究和处理的科

研和生产问题,可以期望用回归设计技术构造需要的数学模型,将其提高到定量分析的水平上来,加以更好地研究。

各种回归设计方法都必须对因素进行编码。所谓因素编码就是将自然因素通过编码公式变成编码因素的过程。自然因素是未经编码的试验因素,通常记为 z_1, z_2, \dots, z_p 。自然因素有些有量纲,有些无量纲,但都有具体的物理意义。由自然因素构成的空间称为自然空间,是实际试验方案的存在空间。编码因素是经过编码得到的因素,通常记为 x_1, x_2, \dots, x_p 。任何编码因素都是无量纲的。由编码因素构成的空间称为编码空间。回归设计时,方案的编制,回归系数的计算及回归方程的统计检验,即整个优化过程,都是在编码空间进行的。因此,因素编码是回归设计的关键环节。不同的回归设计,有不同的编码公式,而表示编码因素具体取值的编码,也因不同的编码公式而有所不同。

设计表格化、公式规范化、分析程式化,是回归设计技术的显著特点。设计表格化,是指试验方案的设计,回归系数的计算与检验都配列于同一表,即计算格式表。公式规范化是指对于不同的回归设计方法,回归系数的计算、各因素的线性项、非线性项及其交互项的偏差平方和的计算以及统计检验,大多有同样形式的公式。一般回归设计的优化过程是根据试验要求与专业知识,选择合适的回归设计方法,先编码,设计方案,配列计算格式表,再计算分析,最后进行统计检验,已经完全程式化。回归设计的上述特点,对于计算机编程,对于在科研和工农业生产中的实际应用都非常方便。

四、试验优化的应用

试验优化技术由于具有设计灵活、计算简便、试验次数少、优化成果多、可靠性高、适用面广等特点,因而发展迅速,应用广泛,已成为现代设计方法中一个先进的设计方法,成为多快好省地获取试验信息的现代通用技术,成为质量管理的一个科学工具,是现代优化技术和应用数学领域中最活跃、应用成果最显著的分支之一。

试验优化技术的推广应用,是一项在经济效益上十分领先的工作。据报道,日本推广应用试验设计的头十年即整个六十年代,应用正交表已超过100万次,对于创造利润和提高生产率起了巨大的作用。今天,试验设计技术已成为日本企业界人士、工程技术人员、研究人员和管理人员的必备技术,已被认为是工程师共同语言的一部分。据说在日本,一个工程师如果没有试验设计这方面的知识,就只能算半个工程师。目前,这门技术还在农业、医学、生物学和物理学等方面得到普及和应用。在试验设计技术推广应用的同时,回归设计技术也得到迅速的发展和广泛的应用,尤其是近廿年来,不仅在理论研究方面异常活跃,而且在机械制造、材料工程、自动控制 and 系统工程等许多领域都有应用,实际成果非常显著。

我国一些学者自五十年代就开始研究试验优化,在理论研究、设计方法与应用技巧方面,都有新的创见,对这一技术的发展和推广应用作出了一定的贡献。尤其是自七十年代以来,试验优化技术的实际应用越来越广,取得了非常可喜的成果。据粗略估计,仅正交试验设计的应用成果目前已超过万项,经济效益在若干亿元以上。但是与开展这一工作最发达的国家相比,与我国应该达到的应用规模相比,还有相当大的差距。试验设计技术的现代发展—— SN 比设计和三次设计技术以及各种回归设计技术的实际应用,七十年代末八十年代初在我国才刚刚开始。因此,大力推广应用试验优化技术,对于赶超世界先进水平,促进科研、生产和管理事业的迅速发展,不仅具有普遍的实际意义,也具有一定的迫切性。

第一篇 试验设计技术

第一章 正交试验设计

§ 1-1 基本概念

我们通过一个简单实例来说明试验设计的一些基本概念和有关术语。

例 1-1 试验考察用不同方式施用氮肥 (N) 和磷肥 (P) 对大豆亩产量 (y) 的影响。试验安排和试验结果如表 1-1。

一、试验指标

在一项试验中, 用来衡量试验效果的指标, 称为试验指标, 有时简称指标, 也称试验结果, 通常用 y 表示。它类似数学中的因变量或目标函数。

试验指标用数量表示的, 称为定量指标。

如速度、温度、压力、重量、尺寸、寿命、硬度、强度、产量、成本等。例 1-1 中, 大豆亩产量 y 就是一种定量指标。不能直接用数量表示的指标, 称为定性指标。产品的外观质量、色泽、气味, 例如金属、塑料等镀件的表面色泽、粗糙度, 充气轮胎外观质量标准等, 都可作为定性指标。定性指标可以转化为定量指标。在质量管理中, 一般把目标特性、质量特性作为试验指标。

二、试验因素

试验中, 凡对试验指标可能产生影响的原因, 都称为因素, 也称因子或元, 类似于数学中的自变量。需要在试验中考察研究的因素, 称为试验因素, 有时也称为因素, 通常用大写字母 A 、 B 、 C 、 \dots 等表示。本例中, 氮肥和磷肥都是试验因素, 它们可以分别用 A 、 B 表示。在试验中, 有些因素能严格控制, 称为可控因素; 有些因素难以控制, 称为不可控因素。试验因素是试验中的已知条件, 能严格控制, 所以是可控因素。通常把未被选作试验因素的可控因素和不可控因素都称为条件因素, 统称为试验条件。例 1-1 中, 除氮肥和磷肥外, 大豆品种、作业和管理质量、土壤水分、土壤松软程度以及其它环境条件等, 对大豆产量也有影响, 它们有的可控, 有的不易控制, 试验中均未被考察, 它们就构成了本例的试验条件。

还须指出的是, 试验设计中, 因素与试验指标间的关系, 虽然类似于数学中自变量与因变量之间的关系, 但并非确定的函数关系, 而呈相关关系。因此, 试验指标的处理, 必须运用数理统计的原理和方法。

三、因素水平

因素在试验中所处的各种状态, 或所取的不同值, 称为该因素的水平, 也简称为水平或位级, 通常用下标 1、2、3、 \dots 表示。

表 1-1 大豆施肥试验

y (kg)		P (kg)	
		$P_1=0$	$P_2=4$
N (kg)	$N_1=0$	200	225
	$N_2=6$	215	280

若一个因素选取 K 种状态或取 K 个值,就称该因素为 K 水平因素。在例1-1中, A 、 B 都是二水平因素, A_1 表示 A 因素的一水平,即氮肥为0 kg, B_2 表示 B 因素的二水平,即磷肥为4kg。

因素的水平,有的可以取得具体值,如本例 $A_2=6\text{kg}$;有的只能取大致范围或某个模糊概念,如软、硬、大、小、好、较好等;但也有无法用数值表征的,如履带的不同型式,轮胎花纹的不同种类,机器的不同操作方式,大豆的不同品种等。

四、处理组合

所有试验因素的水平组合所形成的试验点,称为处理组合,也称组合处理。三因素试验中, $A_1B_2C_3$ 是一个组合处理,它表示由 A 因素一水平、 B 因素二水平和 C 因素三水平组合而形成的一个试验点。本例为两个二水平因素的试验,显然,可组合成 A_1B_1 、 A_1B_2 、 A_2B_1 和 A_2B_2 四种组合处理,即四个试验点。

五、全面试验

对全部组合处理都进行试验,即全面试验。本例中,四个组合处理都进行了试验,所以是全面试验。显然,全面试验的组合处理数 L 应等于各因素水平数的乘积。设因素 A 、 B 、 C 对应的水平数为 a' 、 b' 、 c' ,则全面试验为 $L=a'b'c'$ 。

若有 e 个因素,且每个因素的水平数都等于 b ,则全面试验的数学表达式为:

$$L=b^e$$

可见,试验次数随因素及其水平数的增加,迅速增加。显然,对于多个因素,若实施全面试验,实际上是有困难的,有时甚至是不可能的。

六、部分实施

从全部组合处理中,选择一部分组合处理进行试验,称为部分实施,又称部分试验。部分试验与全面试验之比,称为几分之几部分实施。例如,三水平四因素的全面试验 $L=81$,若部分试验为9,则试验的部分实施为 $1/9$,又称此试验为九分之一部分实施。

试验设计所追求的目标之一,就是要用尽量小的部分实施来实现全面试验所要达到的目的。这样,就产生了两个突出的矛盾,一是全面试验的组合处理多,与希望实际上只进行少数试验的矛盾;二是实施少数试验,与要求获取全面试验信息的矛盾。利用正交试验设计,既可以对试验进行合理安排,挑选少数几个具有代表性的组合处理进行试验——以少代多,解决第一个矛盾;又可以对实施的少数个组合处理的试验结果进行科学的处理,做出正确的结论——以少求全,解决第二个矛盾。

七、因素试验

目前,一般的试验多是因素试验,其目的在于研究各因素及其间的交互作用的重要程度,即对试验指标的影响大小,并直接获得最优组合处理即最优工艺条件,最佳参数组合,或简捷地求得回归方程。

根据试验目的,因素试验分为验证性试验和探索性试验。验证性试验是指因素与试验指标间的关系已知,进行试验验证的试验;而探索性试验是指因素与试验指标间关系未知,进行试验探索的试验。

根据试验因素的数量,因素试验分为单因素试验和多因素试验。仅研究一个因素的试验即单因素试验;而在一项试验中同时研究两个以上的因素的试验即多因素试验。多因素试验通常用全面试验的数学表达式表示,如 2^2 试验,就表示本例二水平两因素试验: $4^2 \times 2^3$ 试

验,就表示两个四水平因素和三个二水平因素的五因素试验。

根据试验时间安排,因素试验分为同时试验和序贯试验。所谓同时试验就是几个组合处理同时实施的试验,它适于试验周期长的情况;所谓序贯试验就是下次试验需在上次试验基础上进行的试验,它适于试验周期短的情况。

对于因素间关系复杂的多因素试验,对于寻求新规律的探索性试验,对于力求缩短试验周期的同时试验,正交试验设计是一种行之有效的科学试验方法。

§1-2 正交表

一、均衡分布

正交表是试验设计的基本工具,它是根据均衡分布的思想,运用组合数学理论构造的一种数学表格。均衡分布思想是正交表的核心,虽然远在古代就有,但只是在近代与生产科研实际相结合,产生了拉丁方、正方表,才显示出它的巨大威力。

十八世纪的欧洲,腓特烈大王即普鲁士弗里德里希·威廉二世,要举行一次与往常不同的六列方队阅兵式。他要求每个方队的行和列都得由六种部队的六种军官组成,不得有重复和空缺。这样,在每个六列方队中,部队、军官、行和列全部排列均衡。群臣们冥思苦想,竟无一人能排出这种方队。后来,向当时著名的数学家欧拉请教,由此引起了数学家们的极大兴趣,致使各种拉丁方问世(参见图2-3)。拉丁方是正交表的基础,今天使用的正交表也正是拉丁方的发展。数学家们如此重视一个君王独出心裁的阅兵式,并不是为了组织什么花样方阵,而是为了研究具有普遍意义的新的数学思想,即均衡分布思想,这正是今天正交试验设计的数学思想基础。

表1-2 三阶纵横图

4	9	2
3	5	7
8	1	6

均衡分布思想在我国更早就有。据在后周(公元十世纪)时期撰写的“洛书”记载,传说夏禹治水时,洛水浮现的大乌龟背上有个隐图,其形为“九宫者,戴九履一,左三右七,二四为肩,六八为足,五居中央。”如表1-2。实际上这是世界上最早的三阶纵横图。表中,无论是行上、列上,还是在对角线上,所有数字之和都等于15。这比拉丁方的均衡性更强。后人对各阶纵横图作了更为广泛的研究,并发现了其一般规律。古代的中国,不仅在数学领域,而且在科学技术领域,都处于当时世界的领先地位。

本世纪二十年代,英国统计学家 *R. A. Fisher* 运用均衡排列的拉丁方,解决了农业试验时的不均匀试验条件,获得成功,并创立了“试验设计”这一新兴学科,使均衡分布的数学思想在科研生产实际中获得了广泛的应用。

二、正交表

$L_4(2^3)$ 是一张最简单的正交表,它表示一个具体的数学表格,如表1-3所示。表中各个具体数字的含意,说明如下:

通常等水平正交表写成 $L_n(b^c)$, 其中 L 是 *Latin* 的第一个字母,表示正交表; n 表示正交表的行数,或部分试验的组合处理数,即用该正交表安排试验时,应实施的试验次数; b 表示正交表同一列中出现的不同数字个数,或因素的水平数,不同的数字表示因素的不同水平,若一个正交表有 b 个水平,就称该正交表为 b 水平正交表; c 表示正交表的列数,

或正交表最多能安排的因素数。正交表的一列可以安排一个因素，这表明，当用该正交表进行试验设计时，安排的因素数可以小于或等于 c ，但决不能大于 c 。 $L_n(b^c)$ 括号内的 b^c ，表示 c 个 b 水平因素全面试验时的组合处理数。由于有时安排的试验因素个数小于 c ，因此， a/b^c 为最小部分实施。

显然， $L_4(2^3)$ 正交表是二水平表，有四行三列，用它安排试验时，最多能安排三个因素，部分试验为4次，全面试验为8次，所以最小部分实施为 $1/2$ 。就是说，用 $L_4(2^3)$ 正交表安排三个二水平因素试验时，可以比全面试验少做一半组合处理。

非等水平正交表一般表示为 $L_n(b_1^{c_1} \times b_2^{c_2})$ ， $L_n(b_1^{c_1} \times b_2^{c_2} \times b_3^{c_3})$ ($b_1 \neq b_2 \neq b_3$)，它们各代表一个具体的数学表格。以上非等水平正交表又称为混合型正交表，各字母的具体含意基本与等水平表相同。但必须指出，当用非等水平正交表如 $L_n(b_1^{c_1} \times b_2^{c_2})$ ，进行试验设计时，则安排的因素数应不大于 $c_1 + c_2$ ，且 b_1 水平的因素数应不大于 c_1 ， b_2 水平因素数应不大于 c_2 。其最小部分实施为 $a/(b_1^{c_1} \times b_2^{c_2})$ 。

任何一个正交表 L_n 与其代表的具体表格，都是相对应的， L_n 简明易记，便于分析，表格主要用于试验方案的具体安排和试验结果的计算分析。

三、常用正交表的分类及特点

1. 标准表 (仅列到五水平)

二水平： $L_4(2^3)$ 、 $L_8(2^7)$ 、 $L_{16}(2^{15})$ 、...

三水平： $L_9(3^4)$ 、 $L_{27}(3^{13})$ 、 $L_{81}(3^{40})$ 、...

四水平： $L_{16}(4^5)$ 、 $L_{64}(4^{21})$ 、 $L_{256}(4^{85})$ 、...

五水平： $L_{25}(5^6)$ 、 $L_{125}(5^{31})$ 、 $L_{625}(5^{156})$ 、...

凡是标准表，水平数都相等，且水平数只能取素数或素数幂。利用标准表可以考察因素间的交互作用。

对于同一水平标准表，任意两个相邻表，具有如下的关系：

$$\begin{cases} a_{i+1} = ba_i \\ c_{i+1} = a_i + c_i \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (1-1)$$

标准表的构造特点是：

$$\begin{cases} a_i = b^{2^i} \\ c_i = \frac{a_i - 1}{b - 1} = \frac{b^{2^i} - 1}{b - 1} \quad (i=0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1-2)$$

显然，只要水平 b 确定，第 i 张标准表就随之确定。可见， b 是构造标准表的重要参数。对于任何水平的标准表，当 $i=0$ 时，都确定一最小号的正交表，最小号正交表的试验号都是水平数的平方，且列数都比水平数多一。

2. 非标准表

二水平表： $L_{12}(2^{11})$ 、 $L_{20}(2^{19})$ 、 $L_{24}(2^{23})$ 、 $L_{28}(2^{27})$ 、...

其它水平表： $L_{18}(3^7)$ 、 $L_{32}(4^9)$ 、 $L_{50}(5^{11})$ 、...

表1-3 $L_4(2^3)$

列号 试验号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

非标准表是为缩小标准表试验号的间隔而提出的，它虽然是等水平表，但却不能考察因素间的交互作用。

二水平非标准表的构造特点是：

$$\begin{cases} a = ib^2 \\ c = a - 1 = ib^2 - 1 \end{cases} \quad (1-3)$$

其中， $i > 3$ ，且为非2的幂次方的自然数。式(1-3)表明，除了二水平标准表的试验号外，所有能被4整除的正整数，都是二水平非标准表的试验号，而任一非标准二水平表的列数 c 总比其试验号少一。

3. 混合型正交表（仅列到 $c=32$ ）

$L_8(4 \times 2^4)$;

$L_{12}(3 \times 2^4)$, $L_{12}(6 \times 2^2)$;

$L_{16}(4 \times 2^{12})$, $L_{16}(4^2 \times 2^9)$, $L_{16}(4^3 \times 2^6)$, $L_{16}(4^4 \times 2^3)$, $L_{16}(8 \times 2^8)$;

$L_{18}(2 \times 3^7)$, $L_{18}(6 \times 3^6)$;

$L_{20}(5 \times 2^8)$, $L_{20}(10 \times 2^2)$;

$L_{24}(3 \times 2^{16})$, $L_{24}(12 \times 2^{12})$, $L_{24}(3 \times 4 \times 2^4)$, $L_{24}(6 \times 4 \times 2^3)$;

$L_{32}(2 \times 4^9)$, $L_{32}(8 \times 4^8)$;

.....

混合型正交表大致可分为两种情况：一是着重考察的因素须多取水平的，例如， $L_8(4 \times 2^4)$ 为着重考察一个因素的， $L_{24}(3 \times 4 \times 2^4)$ 为着重考察两个因素的；二是某一因素不能多取水平的，如 $L_{18}(2 \times 3^7)$ 。显然，混合型正交表可以包含多个水平不等的因素。一般情况下，它们不能考察交互作用，但其中一些由标准表通过并列法改造的表，如 $L_8(4 \times 2^4)$ 由 $L_8(2^7)$ 并列得到， $L_{16}(4 \times 2^{12})$ 、 $L_{16}(4^2 \times 2^9)$ 、 $L_{16}(4^3 \times 2^6)$ 和 $L_{16}(4^4 \times 2^3)$ 皆由 $L_{16}(2^{15})$ 并列得到，可以考察交互作用，但必须回复到原标准表上进行。

混合型正交表除由并列法改造者外，一般无一定规律可循。混合型正交表也是应用广泛的一类正交表。

四、正交表的基本性质

1. 正交性

正交表的正交性就是均衡分布的数学思想在正交表中的实际体现。正交性的主要内容是：

(1) 在任何一列中各水平都出现，且出现的次数相等；

(2) 任意两列之间各种不同水平的所有可能组合都出现，且出现的次数相等。

我们具体考察 $L_8(2^7)$ 正交表的正交性。由附于书后的 $L_8(2^7)$ 正交表可以看到，表中每列的不同数字1, 2都出现，而且所有列中数字1, 2都分别重复出现了4次。这种重复称为隐藏重复。正是这种隐藏重复，增强了试验结果的可比性。从该表中还可看出，第1、2两列间各水平所有可能的组合为11、12、21、22共四种。这就是该两列因素全面试验的组合处理。它们都出现了，且都分别出现了两次。显然，任意两列间的情况都是如此。

上述正交性的两条内容，是判断一个正交表是否具有正交性的必要条件。由上分析，可以判定， $L_8(2^7)$ 正交表具有正交性。

由正交表的正交性可以看出：

- (1) 正交表的各列地位是平等的，表中各列之间可以相互置换，称为列间置换；
- (2) 正交表各行之间也可相互置换，称行间置换；
- (3) 正交表中同一列的水平数字也可以相互置换，称水平置换。

上述三种置换即正交表的三种初等变换。经过初等变换所能得到的一切正交表，称为原正交表的同构表或等价表。实际应用时，可以根据不同的试验要求，把一个表变成与之等价的其他特殊形式的表，这给使用者带来很大的方便。

2. 代表性

代表性的含义之一，在于正交表正交性中，(1)任一列的各水平都出现，使得部分试验中包含所有因素的所有水平；(2)任意二列间的所有组合都出现，使得任意二因素间都是全面试验。因此，部分试验中，所有因素的所有水平信息及两两因素间的所有组合信息，无一遗漏。这样，虽然正交表安排的只是部分试验，但却能够了解到全面试验的情况，在这个意义上，部分试验可以代表全面试验。

另一方面，由于正交表的正交性，部分试验的试验点必然均衡地分布在全面试验的试验点中。图1-1是用正交表 $L_4(2^3)$ 安排二水平三因素试验的试验点空间分布示意图。图中①、②、③、④即正交表 $L_4(2^3)$ 中的试验点。图1-1中括号内的三位数字是试验点的组合情况，如(111)即由A、B、C三个因素的一水平组合形成的试验点。很明显，四个试验点均衡地

表 1-4

试验号	因素 (1) A	(2) B	(3) C
1	(1)A ₁	(1)B ₁	(1)C ₁
2	(1)A ₁	(2)B ₂	(2)C ₂
3	(2)A ₂	(1)B ₁	(2)C ₂
4	(2)A ₂	(2)B ₂	(1)C ₁

注：表中第一行括号内数字表示正交表列号，
其余括号内数字表示正交表各列的水平数字。

排在6个面，12条棱上，不偏不倚，具有很强的代表性。因此，部分试验的优化结果与全面试验的优化结果，应有一致的趋势。

3. 综合可比性

由于在正交表的正交性中，(1)任一列各水平出现的次数都相等，(2)任二列间所有可能的组合出现的次数都相等，因此就使得任一因素各水平的试验条件相同。这就保证了在每列因素各个水平的效果中，最大限度地排除了其他因素的干扰，从而可以综合比较该因素不同水平对试验指标的影响，这种性质即称综合可比性。

若在正交表 $L_4(2^3)$ 的1、2、3三列中分别安排A、B、C三个两水平因素，进行正交试验，如表1-4所示。所谓A₁的试验条件，是指出现A₁的1号和2号试验中，因素B和C的各水平出现的情况，本例中，B₁、B₂和C₁、C₂各出现一次；同样，A₂的试验条件是指出现A₂的3号和4号试验中，因素B和C各水平出现的情况，本例中，B₁、B₂和C₁、C₂也都各出现一次。可见，A₁、A₂具有相同的试验条件，也就是说，单考察A₁和A₂对试验指标的影响时，因素B和C对试验指标的影响是相同的，因此就可以比较A₁、A₂对试验指标的影

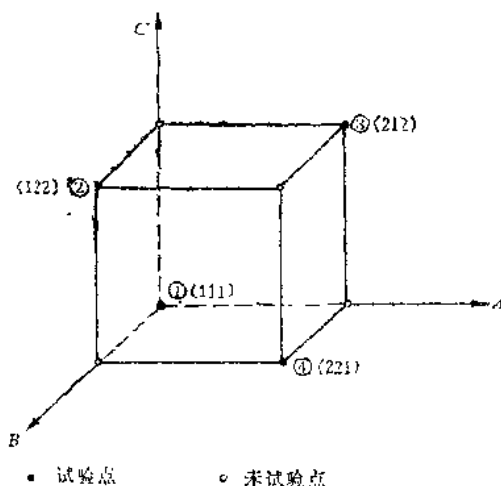


图 1-1 $L_4(2^3)$ 安排三因素试验

响大小。这种综合可比性是正交试验设计进行结果分析的理论基础。

正交表的三个基本性质中，正交性即均衡性是核心，是基础，代表性和综合可比性是正交性的必然结果，从而使正交性得以具体应用。正交表集其三个性质于一体，成为正交试验设计的有效工具，因而，实际应用越来越广。

§ 1—3 正交试验设计的基本方法

基本方法是指那些适于解决各因素的水平数都相等、因素间的交互作用均可忽略的试验问题的方法。这样就可以选用标准表和非标准表进行试验设计。这是实际试验问题中最简单、最基本的情况。

正交试验设计（通常简称正交设计）的基本程序是设计试验方案和处理试验结果两大步。设计试验方案时，主要步骤可以归纳为：

- (1) 明确试验目的，确定试验指标；
- (2) 确定需要考察的因素，选取适当的水平；
- (3) 选用合适的正交表；
- (4) 进行表头设计；
- (5) 编制试验方案。

处理试验结果的方法有多种，当用极差法时，主要是计算及判断。

现用具体例子说明如下。

例 1—2 某工厂为改革轴承座圈的退火工艺，提高产品硬度的合格率，拟做一项多因素试验。

一、试验方案的设计

1. 确定试验指标

试验指标是由试验目的确定的。一个试验目的，至少需要一个试验指标。因此试验设计前，必须明确试验目的，对试验所要解决的问题，要有全面而深刻的理解。试验指标的具体确定，需要周密的考虑。一项试验的目的，有时需要不止一个试验指标，而有时在同一项试验中，却由于有几个不同的试验目的，相应地就需要多个试验指标，这要根据专业知识和试验要求，具体分析实际试验，合理确定试验指标。

就本例而言，试验目的就是要寻求一个最佳的退火工艺，使轴承座圈的硬度合格率最高。很明显，产品硬度合格率的高低，决定于退火工艺的好坏。因此，可用产品硬度合格率作为本试验的试验指标，并且是一个定量指标。

试验指标一经确定，就应当把衡量和评定试验指标的原则、标准，测定试验指标的方法及所用的仪器等确定下来。这本身就是一项细致而复杂的研究工作。

2. 确定试验因素并选取适当水平

选试验因素时，首先要根据专业知识，以往研究的结论和试验的经验，尽可能全面地考察影响试验指标的诸因素，然后根据试验要求和尽量少选因素的一般原则，选定试验因素。

在实际确定试验因素时，应主要选取对试验指标影响大的因素，尚未完全掌握其规律的因素和未曾被考察研究过的因素；那些对试验指标影响小的因素，对试验指标的影响规律已完全掌握的因素，应尽量少选或不选，但要作为可控的条件因素参加试验。试验要求考察的