非线性网络与系统

[美] R.克勒 著
马大强 王家庆 译

人 民 教 育 出 版 社

内 容 简 介

本书是作者在美国佛罗里达大学为研究生讲课的基础上写成的，可供我国研究生、青年教师及工程科研人员参考。

本书包括七章，其内容为图论、网络函数、多项式与正弦波、功率公式、线性化与稳定性、相平面、李亚普诺夫方法。

在翻译出版过程中，对原书个别错误作了订正。

RICHARD CLAY

NONLINEAR NETWORKS AND SYSTEMS

1971, John Wiley & Sons

非线性网络与系统

[美] R.克勒 著

马大强 王家庆 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10 字数 240,000

1980年6月第1版 1981年2月第1次印刷

印数 00,001—8,000

书号 15012·0255 定价 1.00 元

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 图 论

1852 年，英国学者弗兰西斯·哥斯利(Francis Gothrie)，发现了一个有趣的定理，告诉了他哥哥的老师——当时伦敦大学学院教授奥古斯托斯·德·摩根(Augustus de Morgan)。这位教授没能证明这个定理，又转而请教著名的爱尔兰数学家威廉·罗万·哈密顿爵士(Sir William Rowan Hamilton)。哈密顿同样无法证明。直到今天，已经时过 100 多年，这个问题依然没有解决①。它也许已经成为现代数学中最著名的猜想了吧。

这个定理可表述为：任何平面地图，均可用不多于四种颜色着色。给地图着色指的是：相邻国家必须着以不同的颜色。该定理已经对不多于 35 个国家的所有地图都获得了证实。倘有例外，那情形一定是相当复杂的。

在探索这个定理的证明的过程中，数学家对地图作了一些典型的抽象表示。其中之一是以点表示国家，当国与国之间具有公共边界时，则以一条线连接相应的点。这样得到的图形就称之为图(graph)。因而，图可定义为：一组点及按指定方式连接其中某些点的一组线的集合。除地图着色问题外，其他一些不同领域中的研究工作，诸如分子结构、形式逻辑、开关电路、博奕论及军事后勤学(logistics)等等，也推动了图论的进展。因而，它已经成为数学学科中高度发展的一个分支。关于这方面的一些专著，作为本章的参考书目列举于后。

图也可以是由物理器件组成的网络的抽象，它描述网络的几

① 此问题已解决，见"美国数学学会通报"，82 卷，3 期，第 711—712 页，1976 年 9 月或"科学"，193 卷，第 564—565 页，1976，美国。——译者注。

1109330

何结构或骨架。一般说来，解决网络问题包括：设定一系列数学变量，用以代表网络中需要求值的物理量，然后建立一组方程来求解这些变量。本书第二章差不多完全是讨论如何引出这些方程。在那里我们可以看到，方程的建立决定于(a)网络的结构与(b)网络所包含的物理器件的性质。因此很明显，图论只研究了网络问题的一半。

如果在网络中含有非线性元件，则方程组通常更难于求解。本章中所得到的关于图论的一般结论，在下一章将要引伸，以建立最简形式的方程。因此，图论对于分析非线性网络是特别有价值的。

由于从事图论研究工作的多样性，导致了术语的杂乱。本章总结了某些数学家的进展，也就沿用了他们的相应术语。比如，图中的点称之为顶点 (vertice)，连线称之为边(edge)。而在下一章中，由于内容比较接近工程文献，它们分别被称为结点 (node) 与支路(branch)。

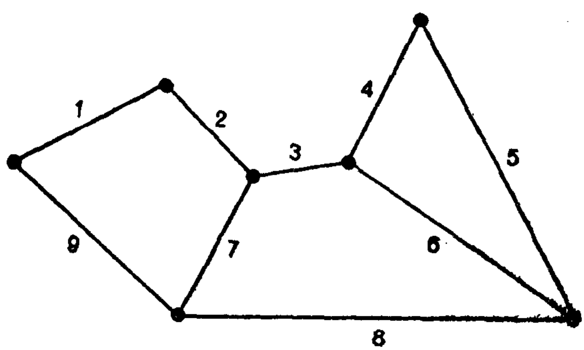


图 1.1　一个简单的图

图 1.1 示出一个典型的图。由于其中任何一对顶点都由一条边或一串边相连接，所以该图称之为连通的(connected)。这种类型的图通常碰到最多。在一串边中，其中相继的边具有公共终点(endpoint)，则这串边称为一个序列(sequence)。例如一串边

12345637 即是一序列。在此序列中，显见有一边出现两次。封闭序列称之为回环(cycle)，如序列 123456379 即为一例。如序列中无边出现两次则称为径(path)，序列 123456 即是一径。如果在一径中，途经其各顶点的次数都不超过一次，则称此径为弧(arc)，如径 123458 即为一弧。一条封闭弧称之为路(circuit) ——路的概念具有特殊的重要性——弧 1234589 即是一路。本图中共有 6 条路，读者不妨把它们都找出来。应当注意，这里关于路的定义，比通常工程上的概念要特殊一些。下一章中我们将把路称之为网眼(mesh)以避免混淆。

须注意，有时图的形态还可以更一般化。如图 1.2(a) 所示，可能有数条边连接同一对顶点，如图中顶点 a、b。这些边称为重边 (multiple edge)。如图示，顶点 c 只有一条边 (连接 a、c 的边)与之相连，则这条边称为悬边 (pendant edge)。倘若一条边的二个终点都位于同一顶点，如图顶点 b，则称之为圈(loop)。悬边与圈主要是数学家感兴趣，而在物理器件的网络中，它们的作用甚小。

如果两图的所有顶点一一对应，并且边的连接也完全相同，则此两图称为同构的(isomorphic)。图 1.2(b)所示图即为(a)的同构图，其顶点 q、r、s 分别与(a)的顶点 a、b、c 相对应。

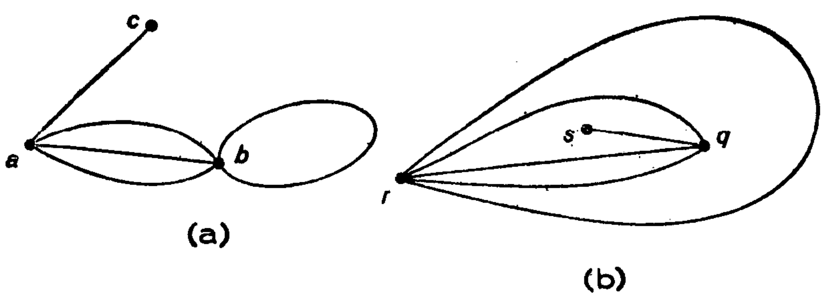


图 1.2 (a) 有某些一般化的图
(b) 同构图

如果一列边仅连接一条弧的终点，则称之为链(chain)。当用单边替换链后两图同构，这样的两图称为保形的(conformal)。由于链与单边在几何上是等价的，显然，保形性质对于确定图的几何特性有着重要意义。这在以后平面图的讨论中要用到。

如果图 g 中所有的顶点与边皆属于图 G，则称图 g 为图 G 的子图(subgraph)。倘若图 G 的每个顶点至少与子图 g 一条边相连，则称 g 跨接(to span)图 G。将图 g 的边都从图 G 中抹掉，剩余部分称为图 g 的补图(complement)。

连通性

图论中某些最普遍的结论仅取决于如下简单事实，即：某些点系由线段所连接。我们尚须作若干补充定义。以 $e(G)$ 与 $v(G)$ 分别表示图 G 中的边与顶点的数目。倘若图 G 是由若干连通块(connected parts)所组成，它们之间互不相连，则块的数目以 $p(G)$ 表示之。与顶点 a 连接的边的数目称为点 a 的点价 (vertex valence)，以 $\rho(a)$ 表示。由此定义立即可导出如下关系

$$e(G)=\frac{1}{2}\sum_{a}\rho(a) \tag{1.1}$$

系数 $\frac{1}{2}$ 是由于每条边在和式中均须计数两次。如有圈存在，则在顶点处要计数两次。当抹去所有具有偶价的顶点时，总价数仍为偶数。于是便有如下定理成立。

定理 1.1 一个图必包含有偶数个具有奇价的顶点。

若从连通图 G 中抹去子图 g，而余下的补图 $G-g$ 含有若干连通块，则由于子图 g 中每个顶点至多可与补图 $G-g$ 中的一个连通块相连，故有

$$v(g)\geqslant p(G-g) \tag{1.2}$$

上式可表述为如下定理:

定理 1.2 子图的顶点数不少于其补图的连通块数目。

为证明下面的定理，须引入另一个概念。如图中每一个顶点均与所有其他顶点相连接,则此图称为完整图(complete graph)。对于这类图,恒有如下关系成立:

$$e(G)=\frac{1}{2}v(v-1) \tag{1.3}$$

这是由于每个顶点均与其他 $v-1$ 个顶点相连。

定理 1.3 如图中既无重边又无圈,则其边的数目至多为:

$$e_m=\frac{1}{2}(v-p)(v-p+1)$$

显然,对于一定的顶点数而言,完整图具有的边数最多。因而图中每个连通子图必须都是完整图。再者,如给定任一组完整图,要将其中较小图的顶点转移到较大的图上，则所需总边数亦将随之增加。因此,按给定条件,仅当 p 块中包含一个具有 $v-p+1$ 个顶点数的完整图,而其余 $p-1$ 块均为孤立点时，总边数最多。于是将方程1.3 中的 v 用 $v-p+1$ 代替,就得到定理 1.3 的关系式。

推论 1.3.1 如果 $e(G)>\frac{1}{2}(v-2)(v-1)$, 则图 G 是连通的。

如果图是不连通的,则至少 $p=2$, 以此代入定理 1.3 中的公式,得 $e_m(G)=\frac{1}{2}(v-2)(v-1)$。由于排除了重边与圈,任何附加的边都必然将两块连通。

定理 1.4 如果二个图的顶点存在一一对应关系，使得对应的顶点上的价数相等，则其中之一图可以通过一系列边的变换而转换成另一图。

所谓边的变换是指这样一种操作: 如已知边(a, q)与(b, r), 现用边(a, r)与(b, q)来作替换。这种替换对于点价并无影响。若一组顶点

$(a, b, c, \cdots)$起初与另一组顶点$(q, r, s, \cdots)$连接，现改为与$(r, q, s, \cdots)$相连。这种边的变换使第二组中二个元素交换位置。如在排列$(q, r, s, t, \cdots)$中，先将r与s互相交换，继之再将q与s相交换，这样便产生一个新排列$(s, q, r, t, \cdots)$。如此进行一系列变换，可将原排列中任何一个元素置于新排列的首位，而使其余元素保持原来次序。继续进行类似操作可将其余元素中任意一个置于第二位、第三位……直至将任何一个已知顶点排列变换成另一个任意排列。据此可将已知图转换成任意其他具有相同点价的图。

定理 1.5 在一个连通图中，至少有一条弧可包含任意两给定边。

设已给定边(a, b)与(q, r)，由于图是连通的，在顶点b与q之间至少有一条弧连接。如果该弧不通过顶点a或r，则(a, b, q, r)即为所求之弧。若弧(b, q)通过点a或r，则所求弧为(b, a, q, r)或(a, b, r, q)。

当且仅当抹掉连接顶点a的所有边可将一个连通图分解成两块以上时，顶点a称为该图的关节点(articulation point)。关节点也称作裂点(cut vertex)。如果一个连通图具有一个关节点，则称它是可分解的(separable)，否则称为不可分解的(nonseparable)。

引理 1.1 当且仅当一图中存在着这样二个顶点，连接该两点的每一条弧都通过顶点a时，顶点a为该连通图的关节点。

易于证明该条件的必要性：如a点是图G的关节点，则移去连接a点的所有边，图G将分解为数块。在每块上各选取一顶点，连接这些顶点的弧必然都通过a点。该条件的充分性可由下述事实得到证明：如果连接某两顶点的每条弧都通过a点，则子图$G-a$就不再是连通的。因此a点必然是一关节点。

下述重要定理是由门格(Menger)提出的：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c

定理 1.6 在不可分解的连通图中的任意二顶点间，至少存在着二条弧，它们仅以这二指定点为公共点。
这可以对选定的一条径内的边数用归纳法来证明。对于二顶点间仅有一条边的情况，该定理显然成立。因为如果二点间无其他弧连接，则二点都是关节点。图 1.3 表示出一般情形：图(a)、(b)中

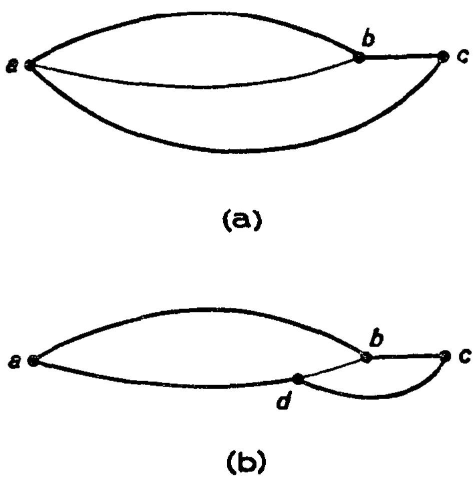


图 1.3 门格定理中的不相联弧

在顶点 a、b 之间均有二条指定弧及一附加边(b, c)。由于图是连通的且不可分解的，则 a、c 之间亦必另有一条弧连接如图所示。在图(a)中，另有一弧(a, c)直接连于顶点 a、c 之间，二条不相联弧(disjoint arc)以粗线表示。另外还有一组不相联弧，由读者作为练习自行找出。图(b)中，弧(a, c)与一条指定弧交汇于顶点 d。所求不相联弧亦如图示。还可能存在另外几种情况。如顶点 c 位于二给定弧之内，则图的结构是相同的。如顶点 c 位于一条给定弧上，则所求弧的关系如图(b)所示，所不同的是，这时顶点 c 与 d 重合于 d 的位置。

推论 1.6.1 不可分解的连通图上的任意二顶点，必然位于

某一条路上。

只要回顾一下路的定义，该推论可直接由门格定理得到。

推论 1.6.2 在不可分解的连通图中，至少存在一条回环，通过任意三个指定的顶点。

根据推论 1.6.1，对于每一对顶点，必有一条路通过它们。每条路中至少有一条弧不通过第三点，否则就不成为路而仅是一条径。这样三段弧合起来就形成了通过三个指定点的回环。显然这里的回环不一定是路，因为所选三条弧两两之间可能包含共同边。

定理 1.7 不可分解的连通图中的任意二边，必然位于某一条路上。

假定指定边为(a, b)与(q, r)，由于图是连通的，则必有一段弧连接

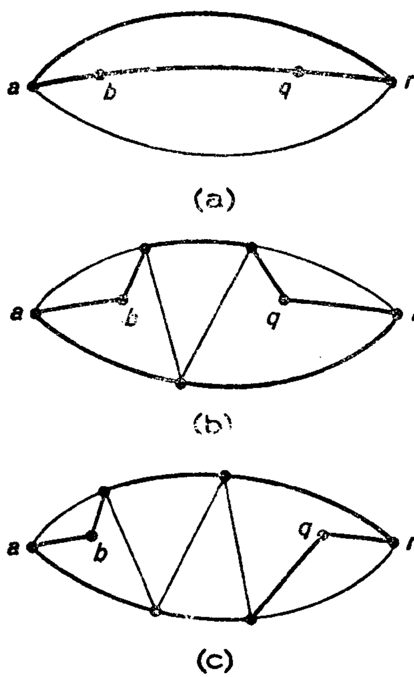


图 1.4 通过二指定边找出一条路

顶点 b 及 q，又由于图是不可分解的，则 a，r 之间必有二条弧相连。图 1.4 示出了各种可能情形。所求的路以粗线表示。倘若连接 a, r 的二条弧位于弧(b, q)的同侧，结构也完全一样。

径的问题

除地图着色问题外，其他一些有关论题也推动了图论的发展。其中一个方面就是关于在图中找出具有某种特殊性质的径。一个极普通的、与地图有联系的实际问题就是确定二个城镇间的最短径。为此我们给图上每条边标一数字表示距离(distance)，然后用标准的迭代过程来解决这个问题。

对于与起始顶点以一条边相连的所有顶点，我们暂用连接边的距离作为这些顶点的点距。然后考察连接这些顶点的所有其他边，以确定是否有包含这些边的间接弧较原先的直接边距为短。如果存在这样的弧，则点距要相应减小。

此后可按任意顺序考虑与点距已经确定的诸顶点仅相隔一条边的其他顶点，以类似方法求得这些顶点的点距。然后再考察从这些顶点引出的每一条弧，以确定是否可以选择一条通过这些顶点中一点的弧，使得由起始点沿这条弧到达原已考察过的点的径较原来用的径为短。如果存在这样的弧，则已求得的点距又将相应缩短。然后还需重新考察由该点引出的所有弧，以确定点距改变后所产生的影响。因为任何影响都将涉及整个图。

将这个程序继续下去，直至所有点距都减至最小值。由于边的数目一定，这些最小值形成唯一的集合。到末端最短的弧就用来计量末端的点距，而这正是问题所要求的解答。图 1.5 表示一张地图，其中边距已给出，但它没有按比例画。与起始点相隔一条边的第一组顶点的最小点距也已标出。作为一个练习，请读者验证，a、b 之间的最短距离为 13。

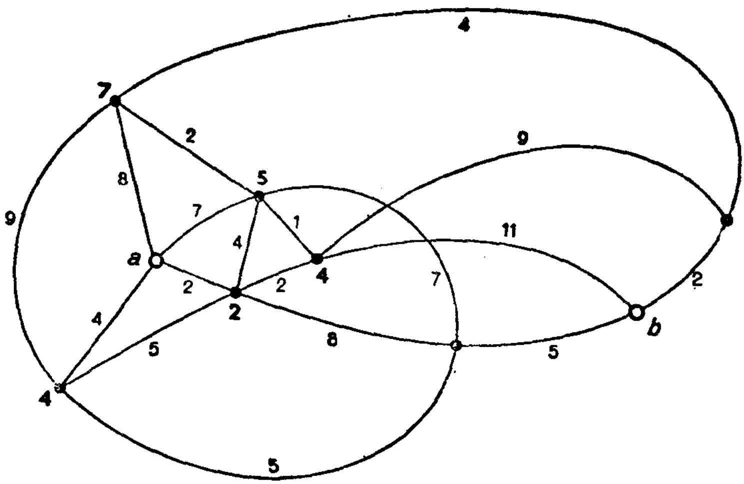


图 1.5　决定最短的径

另一个问题是找出二顶点间包含边数最少的弧，它可以用类似办法解决。所不同的是，在这里假定每条边都具有单位长度。

关于求最短距离问题，一个有趣的例子是迷宫问题。对此也可应用图论的方法。迷宫中的每一个岔点就是其图的一个顶点。迷宫中实际路径长度就是图中的边长。于是，按上述方法就可指出通过迷宫的最佳路线。

关于这类问题，应用图的线绳模型，可获得一个有趣的解决办法。将线绳系于图的顶点，并使其长度等于相应的边长，然后拿住模型的始终两端，将其拉伸，直至有一串边蹦紧。这串边即是距离最短的径。

另一个与地图有关的问题也是很有趣且很实用的。当给定一组城镇，如何找出一条路线，使得每个城市只通过一次。如果应用图论，则相当于找出一条路，使得每个顶点只通过一次。这样的路称为哈密顿路(Hamilton circuit)。如果抹去一条边，它依然连接着所有顶点，称之为哈密顿弧(Hamilton arc)。图 1.6 示出了

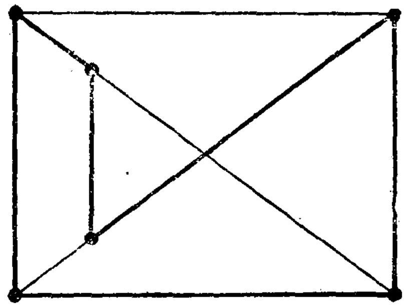


图 1.6　哈密顿路

图中的哈密顿路。

虽然哈密顿路的概念很简单，但对于一个给定的图，却没有一定的准则去判别它是否有哈密顿路存在。下面的结果给出了一些充分条件，为此先要引入另一个概念。

一段弧可用来定义一个子图。它经过特定的一组顶点。它所包含的边只限于连接特定顶点的那些边。这个概念可用以建立下面的定理。

定理 1.8　在一个既无重边又无圈的连通图中，如果任意二点的价数之和总是不少于顶点数，则其中存在哈密顿路。

假定在图 G 中，弧 (a, b) 定义一个子图 g，它具有 $v(g)$ 个顶点。如图 1.7 所示，如果存在边 (a, r) 与 (b, q)，则可以通过这些顶点形成一

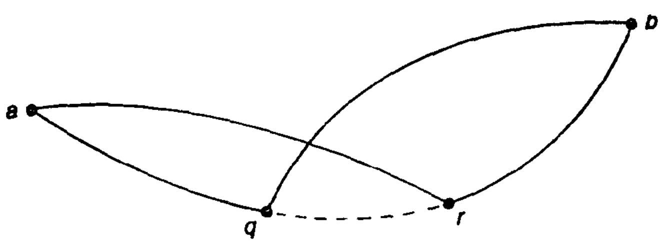


图 1.7　哈密顿路的构成

条路。由于图 G 既无重边又无圈，则当

$$\rho(b)>[v(g)-1]-\rho(a) \tag{1.4}$$

时，必然存在这样的边。这是由于表达式右端给出了不与从 a 点伸出的边相连的顶点数目。如果此弧能够延伸通过图 G 的所有顶点，则图 G 具有哈密顿路的判据即为：

$$\rho(a)+\rho(b)\geqslant v(g) \tag{1.5}$$

由于没有一对顶点在路中占据着独特位置，因此这关系必然适用于图 G 中的各对顶点。

一个立方体也具有一条哈密顿路，但其每个顶点价数为 3，共有 8 个顶点，这些数目并不满足方程 1.5。可见定理 1.8 所述是充分条件而决不是必要条件。由此定理可直接得出如下推论：

推论 1.8.1 如果一个连通图 G 对于所有的 a 与 b 均有

$$\rho(a)+\rho(b)\geqslant v(G)-1,$$

则它具有一条哈密顿弧。

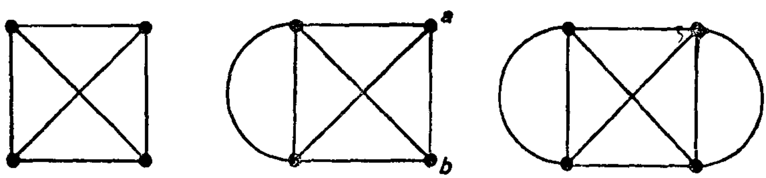
推论 1.8.2 如果一个连通图 G 对于所有的顶点均有

$$2\rho(a)\geqslant v(G),$$

则它具有哈密顿路。

推论 1.8.3 每一个完整图均有哈密顿路。

另一类关于贯穿全图的径的问题也很有趣。图 1.8(*a*) 所示是一个极普通的游戏(谜)。它要求一笔画出所示图形且没有一条边画两次，而这是不可能的。图 1.8(*b*) 所示图形，若起于 a 点止于 b 点，无论图形怎样画法，总可一笔画出。图 1.8(*c*) 所示图形，不论起于哪一点，都可一笔画出，且路线必终止于同一点。



(a) (b) (c)

图 1.8 欧拉径存在的说明

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.c