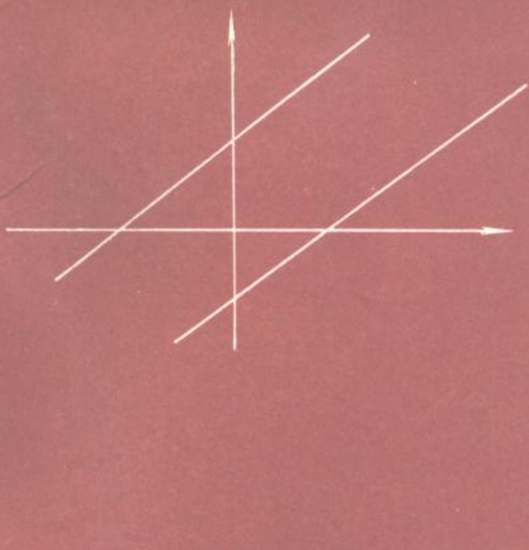
# 序贯分析

陈家鼎



北京大学出版社

# 序贯分析

陈 家 鼎

北京大学出版社

新登字(京)159号

书　　名：序贯分析
著作责任者：陈家鼎
责 任 编 辑：王明舟
标 准 书 号：ISBN 7-301-00210-6/O·41
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 2502015　发行部 2559712　编辑部 2502032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168 毫米　32 开本　12 印张　300 千字
1995 年 5 月第一版　1995 年 5 月第一次印刷
印　　数：0001—3,000 册
定　　价：15.00 元

# 序　言

序贯分析是数理统计学的重要分支之一。序贯分析的特点是，在研究决策问题(统计推断或选择)时，不是预先固定样本量(观察数目)，而是逐次取样(观察)，直到样本提供足够的信息，能恰当地做出决策为止。一句话，样本量是随机变量。自从A.Wald的奠基性著作“Sequential analysis”(1947)问世以来，序贯分析的研究范围越来越大，各方面都有较大的发展。近三十年来，不断有序贯分析的专门著作出版：

① G.B. Wetherill, Sequential methods in statistics(1966年初版，1986年第三版)。

② B.K. Ghosh, Sequential tests of statistical hypothesis (1970)。

③ Z. Govindarajulu, Sequential statistical procedures (1975年初版，1981年第二版)。

④ A.H. ШИРЯЕВ, Статистический последовательный анализ (1969年第一版，1976年第二版)。

⑤ D. Siegmund, Sequential analysis (1985)。

⑥ B.K. Ghosh and P.K. Sen, Handbook of sequential analysis (1991)。

这些书涉及的面广，内容丰富，各有特点，都很值得读。但若用作概率统计专业研究生的入门教材，却不很合适。著者冒昧发表意见，供读者参考。Wald的上述名著思想深邃，启发性强，反映了序贯分析创始人的杰出成就，但离序贯分析的现状有较大距离；Wetherill的书讲了许多序贯方法，注重实用，但没有系统讲述序贯分析的数学理论，大部分结论都没有证明；Ghosh的书

对假设检验讲得很详细，把 1970 年以前的有关理论概括了进去，但未讲序贯分析的其它方面；Govindarajulu 的书篇幅很大，收集了丰富的材料，摘引了大量的文献，但未作系统的论述，很多定理都未证明，读者难以通读；ШИРЯЕВ 的书写得很清楚，数学上很严格，体现了苏联概率论学派的特点，但内容主要是叙述马尔可夫过程的最优停止理论，对序贯统计未作全面的论述；Siegmund 是有名的序贯分析专家，他的书实际上是总结他在序贯分析领域取得的研究成果，内容过于专门，不是对序贯分析作全面介绍。Ghosh 和 Sen 合作编辑的手册内容丰富，对序贯分析的二十七个专题分别进行了比较系统的介绍，概述了这些专题从开始出现到九十年代初的发展史与主要结果，执笔者又都是各方面的知名专家。这是一本极有价值的参考书，对于具有一定基础的读者，不难从中了解到所关心的专题的状况。由于是手册，这本书的绝大部分定理都未叙述证明。

对于初学者来说，很需要一本系统论述序贯分析的基础理论、能够反映序贯分析现代发展特点又便于学习的教本。从1984年起，著者多次给北京大学概率统计专业研究生讲授“序贯分析”课。本书就是在讲稿的基础上进行修改、扩充而成的，力图系统论述这个领域里最基本的理论，对序贯分析的几个主要方面进行较全面的介绍，十分注意定理叙述的准确性与证明的完备性。本书包括了著者的部分研究成果，其中一些系首次发表。应该说明的是，这本书是研究生用的教材，是基础读物，不是总结序贯分析各方面进展的专著。

全书共分五章：最优停止理论，序贯假设检验，序贯估计，贝叶斯序贯统计判决，序贯选择。在第五章的写作过程中，孙嘉阳同志给著者很大帮助。

阅读本书要求读者学过测度论与概率论基础，并对数理统计有一定了解。

由于著者学识浅薄、水平有限，本书肯定会有不少错误或不

当之处，欢迎专家和读者批评指正。

陈家鼎

初稿完成于1986年5月

修改稿完成于1992年7月

# 目 录

# 第一章　最优停止理论

## §1　随机序列与停时

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，其中$\Omega$是所有基本事件组成的非空集，$\mathscr{F}$是由$\Omega$的一些子集(随机事件)组成的$\sigma$代数，$P$是$\mathscr{F}$上的概率测度。记$I=\{0,1,2,\cdots\}$(全体非负整数)，$\bar{I}=I\cup\{\infty\}$，$\{\mathscr{F}_n,n\in I\}$是$\mathscr{F}$的一族子$\sigma$代数，$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}$(一切$n\geqslant 0$)。

**定义1.1**　称随机变量列$\{X_n,n\in I\}$关于$\{\mathscr{F}_n\}$是适应的，若对一切$n\in I$，$X_n$是$\mathscr{F}_n$可测的。此时也称$(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 0)$是随机序列。

记$\sigma(X_0,\cdots,X_n)$为使得$X_0,\cdots,X_n$都可测的最小$\sigma$代数。当然，$(X_n,\sigma(X_0,\cdots,X_n),n\geqslant 0)$是随机序列。

集合$I$看成是离散时间参数时，$\mathscr{F}_n$可理解为到时刻$n$为止能够观察到(或能掌握)的事件的全体，$\sigma(X_0,\cdots,X_n)$可理解为根据$X_0,\cdots,X_n$的观测值能够确定发生与否的随机事件的全体。

**定义1.2**　称$\bar{I}$中取值的随机变量$\tau=\tau(\omega)$是关于$\{\mathscr{F}_n\}$的停止时间(又称马尔可夫时间，停止变量，不依赖于将来的随机变量，简称停时)，若对一切$n\in I$，

$$\{\omega:\ \tau(\omega)=n\}\in\mathscr{F}_n. \tag{1.1}$$

注意：停时$\tau$允许取值$\infty$。条件(1.1)的含义是，变量$\tau$是否等于$n$只依赖于到时刻$n$为止所能掌握的“信息”，而与未来的(即时刻$n$以后的)情况无关。

在不会引起误会的情况下，“关于$\{\mathscr{F}_n\}$的停止时间”简称为“停时”。当$\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,\cdots,X_n)(n\geqslant 0)$时，也称停时为序列

$(X_n, n \geqslant 0)$的停时。

**定义1.3** 称停时 $\tau$ 是有限的，若 $P(\tau < \infty) = 1$。有限停时也称停止法则。

**例1.1** 设$(X_n, n \geqslant 0)$是随机变量列，$B$ 是任何一维 Borel 集。令

$$\tau(\omega) = \inf\{n: n \geqslant 0, X_n(\omega) \in B\}$$

(我们恒约定 $\inf \varnothing = \infty$)，则 $\tau(\omega)$是$(X_n, n \geqslant 0)$的停时。

**例1.2** 设 $y_0, y_1, \cdots$是相互独立同分布的随机变量列，$y_i$ 取值 1 或 $-1$，$P(y_i = 1) = p$。令

$$\tau = \inf\left\{n: n \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} y_i = 1\right\},$$

则 $\tau$ 是$\{y_i, i \geqslant 0\}$的停时。当$p > \frac{1}{2}$时，从强大数律知 $\tau$ 是有限的；当 $p = \frac{1}{2}$ 时，也可以证明 $\tau$ 是有限的(利用第二章 § 3中的Chung-Fuchs 定理即知)。

对任何随机序列$(X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0)$和停时 $\tau$，规定：

$$X_\infty(\omega) = \overline{\lim_n} X_n(w), \quad \mathscr{F}_\infty = \sigma\Big(\bigcup_{n \geqslant 0} \mathscr{F}_n\Big),$$

$$X_\tau = X_{\tau(\omega)}(\omega),$$

$$\mathscr{F}_\tau = \{A: A \in \mathscr{F}_\infty, \text{对一切 } n \geqslant 0, A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n\}.$$

这里，$\mathscr{F}_\infty$ 是包含诸 $\mathscr{F}_n$ 的最小 $\sigma$ 代数。很容易验证，$\mathscr{F}_\tau$ 是 $\sigma$ 代数，$X_\tau$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的。$\mathscr{F}_\tau$ 的意义是：到时刻 $\tau$ 为止能够观察到(或能掌握)的事件的全体。当 $\tau \equiv n$ 时，易知 $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_n$。我们恒用 $I_A$ 表示$A$的示性函数，即

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

**定理1.1** 设 $\tau, \eta, \tau_k (k \geqslant 1)$都是停时，则有下列结论：

① $\inf\limits_k \tau_k$， $\sup\limits_k \tau_k$ 都是停时；

② 若 $A\in\mathscr{F}_\tau$，则 $A\cap\{\tau\leqslant\eta\}\in\mathscr{F}_\eta$，$A\cap\{\tau=\eta\}\in\mathscr{F}_\tau$；

③ 若 $\tau\leqslant\eta$，则 $\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_\eta$；

④ 若 $A\in\mathscr{F}_\tau$，$\tau_A\triangleq\tau\cdot I_A+\infty\cdot I_{A^c}$，则 $\tau_A$ 是停时.

**证明** 很容易，从略。

我们恒用 $E$ 表示数学期望符号，约定 $\sup\varnothing=-\infty$。设 $(X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant0)$ 是随机序列，令

$$C=\{\tau:\ \tau\text{ 是}\{\mathscr{F}_n\}\text{停止时间，且 }EX_\tau\text{ 存在}\},$$

$$V=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in C\}.$$

**定义1.4** 称停时 $\tau^*$ 是最优的，若 $EX_{\tau^*}=V$.

以后将会看到，许多实际问题和理论问题都可化为寻求最优停时问题。

最优停止理论主要关心下列三个问题：

1）最优停时是否存在？

2）如果最优停时存在，如何具体求出？

3）如果最优停时存在，是否只有一个？

为了理解上述提法的具体意义，我们可以这样设想，若 $y_0$，$y_1,\cdots$ 是可观测的序列(随机变量列)，$\varphi_n(u_0,\cdots,u_n)$ 是 Borel 函数 $(n\geqslant0)$，$X_n=\varphi_n(y_0,\cdots,y_n)$ 是观测了头 $n+1$ 值后停止所得到的报酬，记 $\mathscr{F}_n=\sigma(y_0,\cdots,y_n)(n\geqslant0)$。最优停时 $\tau^*$ 就是使得平均报酬达到最大的停止观测的时刻。

由于有这样的具体解释，$(X_n,n\geqslant0)$ 常叫做报酬序列。

对上述三个问题，现代已有很多研究.经过 J.L.Snell(1952)、Chow-Robbins-Siegmund (1971)、Е.Б.ДЫНКИН (1963)及 А·Н.ШИРЯЕВ (1976)等人的努力，已形成系统的理论。本章就是这个理论的主要部分。为了便于学习，我们先讨论有限时间内的最优停止，然后再论述无穷随机序列的最优停止。

我们还要声明一下，本章只叙述离散时间参数的最优停止理论。至于连续时间参数的随机过程的最优停止理论，从 1970 年

以来也有许多研究，请读者参看ФАДЕЕВ（1970），Thompson（1971）和赵彭亮(1987)．其中赵的结果最完善，清楚地表明本章所叙述的理论基本上都可推广至连续时间参数情形．

## §2 有限时间内的最优停止

设$\{X_n,1\leqslant n\leqslant N\}$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机序列，这里$N$是正整数．$\mathscr{F}_n$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数，$\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\subset\cdots\subset\mathscr{F}_N$．$X_n$是$\mathscr{F}_n$可测的$(n\geqslant 1)$．与§1中的定义相类似，称$\tau=\tau(\omega)$是关于$\{\mathscr{F}_n\}$的停时(简称停时)，若$\tau$取值于$\{1,2,\cdots,N\}$，且有

$$\{\tau=n\}\in\mathscr{F}_n(1\leqslant n\leqslant N).$$

所有停时的集合记作$\mathscr{M}$．称停时$\tau^*$是最优的，若

$$EX_{\tau^*}=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in\mathscr{M}\text{ 且 }EX_\tau\text{ 存在}\}.$$

与§1中一样，可提出下列三个问题：

1）最优停时是否存在？

2）如果最优停时存在，如何具体求出？

3）如果最优停时存在，是否只有一个？

我们将在本节证明，在条件$EX_i^+<\infty(i=1,\cdots,N)$下，最优停时永远存在，而且有具体办法(后退归纳法)求解；最优停时有时不止一个，但可给出“唯一性”成立的充要条件．下一节将用本节的理论彻底解决著名的秘书问题．

我们恒设$EX_i^+<\infty$ $(i=1,\cdots,N)$．现在引入下列极重要的量．

$$\gamma_N=X_N,$$

$$\gamma_n=\max(X_n,E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n))\quad(n=N-1,\cdots,2,1),$$

这样$\{\gamma_n,1\leqslant n\leqslant N\}$就由后退归纳法确定出．这里$E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)$是条件期望．

记

$$\mathscr{M}(k,N)=\{\tau:\ \tau\in\mathscr{M},k\leqslant\tau\leqslant N\}\quad(k\leqslant N).$$

**引理2.1** 固定 $k(1\leqslant k\leqslant N)$，则对任何 $\tau\in\mathscr{M}(k,N)$，有

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_k)\leqslant\gamma_k\ \ (\text{a.s.}),\tag{2.1}$$

$$EX_\tau\leqslant E\gamma_k.\tag{2.2}$$

**证明** 我们用后退归纳法证明(2.1)。显然，$k=N$ 时(2.1)成立。设 $k=i$ $(2\leqslant i\leqslant N)$时(2.1)成立，则对任何 $\tau\in\mathscr{M}(i-1,N)$，有

$$\begin{aligned}&E(x_\tau|\mathscr{F}_{i-1})\\&\quad=E(I_{\{\tau=i-1\}}X_{i-1}|\mathscr{F}_{i-1})+E(I_{\{\tau\geqslant i\}}X_\tau|\mathscr{F}_{i-1})\\&\quad=I_{\{\tau=i-1\}}X_{i-1}+I_{\{\tau\geqslant i\}}E(X_{\tau\vee i}|\mathscr{F}_{i-1})\ (\text{a.s.}),\end{aligned}$$

这里 $\tau\vee i=\max(\tau,i)\in\mathscr{M}(i,N)$。依归纳法假设知

$$E(X_{\tau\vee i}|\mathscr{F}_i)\leqslant\gamma_i\ \ (\text{a.s.}).$$

故

$$E(X_\tau/\mathscr{F}_{i-1})\leqslant\max(X_{i-1},E(\gamma_i/\mathscr{F}_{i-1})=\gamma_{i-1}\ \ (\text{a.s.}),$$

可见对于 $k=i-1$，(2.1)也是成立的。这就证明了(2.1)对一切 $k$ 成立。(2.2)由(2.1)直接推出。证毕。

**定理2.1** 设 $EK_k^+<\infty$ $(k=1,\cdots,N)$，且

$$\sigma_i=\min\{k:\ i\leqslant k\leqslant N,\gamma_k=X_k\}(1\leqslant i\leqslant N),$$

则

$$EX_{\sigma_i}=\sup\{EX_\tau:\ \tau\in\mathscr{M}(i,N)\},$$

从而 $\sigma_1$ 是最优停时。

**证明** 从引理 2.1 知，只须证 $EX_{\sigma_i}=E\gamma_i$。不难看出，

$$\begin{aligned}E\gamma_i&=\int_{\{\sigma_i=i\}}\gamma_i\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_i>i\}}\gamma_i\mathrm{d}P\\&=\int_{\{\sigma_i=i\}}X_i\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_i>i\}}\gamma_{i+1}\mathrm{d}P\\&=\int_{\{\sigma_i=i\}}X_i\mathrm{d}P+\int_{\{\sigma_i=i+1\}}\gamma_{i+1}\mathrm{d}P\end{aligned}$$

$$+\int_{\{\sigma_i > i+1\}} \gamma_{i+1} \mathrm{d}P = \cdots$$

$$= \int_{\{\sigma_i = i\}} X_i \mathrm{d}P + \cdots + \int_{\{\sigma_i = N-1\}} X_{N-1} \mathrm{d}P$$

$$+ \int_{\{\sigma_i > N-1\}} \gamma_N \mathrm{d}P$$

$$= EX_{\sigma_i}.$$

证毕。

**系2.1** 在定理 2.1 的假设下，有

$$E(X_{\sigma_i}/\mathscr{F}_i) = \gamma_i \quad (\text{a.s.}), \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

**证明** 利用定理 2.1 的证明方法，不难知道：对任何 $A \in \mathscr{F}_i$，

$$\int_A \gamma_i \mathrm{d}P = \int_A X_{\sigma_i} \mathrm{d}P.$$

这表明系 2.1 成立。证毕。

定理 2.1 给出了一个最优停时 $\sigma_1$，是否还有其它的最优停时呢？为此先要认识最优停时的特征。

**定理2.2** 设 $E|X_1| < \infty$ 且 $EX_k^+ < \infty$ $(k = 2, \cdots, N)$，则为了停时 $\tau$ 是最优的，必须且只须对一切 $n(1 \leqslant n < N)$，有

$$\gamma_n = \begin{cases} X_n, & \tau = n, \\ E(\gamma_{n+1} | \mathscr{F}_n), & \tau > n. \end{cases} \tag{2.3}$$

这里及以后，两个随机变量的相等均理解为 a.s. 相等，不论是否标出了“a.s.”字样。

**证明** 充分性。设 $\tau$ 满足(2.3)。仿效定理 2.1 的证明知，

$$E\gamma_1 = \int_{\{\tau = 1\}} \gamma_1 \mathrm{d}P + \int_{\{\tau > 1\}} \gamma_1 \mathrm{d}P$$

$$= \int_{\{\tau = 1\}} \gamma_1 \mathrm{d}P + \int_{\{\tau > 1\}} \gamma_2 \mathrm{d}P$$

$$= \cdots = E\gamma_\tau = EX_\tau,$$

这表明 $\tau$ 是最优停时。

必要性。证明较长。设 $\tau$ 是最优停时，我们指出

$$I_{\{\tau > i\}} E(\gamma_\tau | \mathscr{F}_i) \leqslant I_{\{\tau > i\}} \gamma_i. \tag{2.4}$$

为了证明(2.4)，首先证明：对任何停时 $\eta \geqslant i$，有

$$E(\gamma_\eta | \mathscr{F}_i) \leqslant \gamma_i \ (\text{a.s.}). \tag{2.5}$$

实际上，对任何 $A \in \mathscr{F}_i$，

$$\begin{aligned}
\int_A \gamma_i \mathrm{d}P &= \int_{A\cap\{\eta=i\}} \gamma_i \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\eta>i\}} \gamma_i \mathrm{d}P \\
&\geqslant \int_{A\cap\{\eta=i\}} \gamma_i \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\eta>i\}} \gamma_{i+1} \mathrm{d}P \\
&\geqslant \int_{A\cap\{\eta=i\}} \gamma_i \mathrm{d}P + \int_{A\cap\{\eta=i+1\}} \gamma_{i+1} \mathrm{d}P \\
&\quad + \int_{A\cap\{\eta>i+1\}} \gamma_{i+2} \mathrm{d}P \\
&\geqslant \cdots \geqslant \int_A \gamma_\eta \mathrm{d}P,
\end{aligned}$$

故(2.5)成立。取 $\eta = \tau \vee i$，从(2.5)得到(2.4)。

现在来证明：对任何停时 $t \in \mathscr{M}(i, N)$，有

$$I_{\{\tau \geqslant i\}} E(X_\tau | \mathscr{F}_i) \geqslant I_{\{\tau \geqslant i\}} E(X_t | \mathscr{F}_i). \tag{2.6}$$

用反证法。若有 $A \in \mathscr{F}_i$，$P(A) > 0$，在 $A$ 上(2.6)不成立。令

$$\eta = \begin{cases} t, & \text{当 } \omega \in A, \\ \tau, & \text{当 } \omega \overline{\in} A, \end{cases}$$

则 $\eta$ 是停时，且

$$EX_\eta = \int_A X_t \mathrm{d}P + \int_{A^C} X_\tau \mathrm{d}P > EX_\tau,$$

这与$\tau$之最优性相矛盾，故(2.6)成立。在(2.6)中取$t=\sigma_i$，利用系2.1和(2.4)，(2.5)知

$$I_{\{\tau\geq i\}}E(X_\tau|\mathscr{F}_i)\geq I_{\{\tau\geq i\}}\gamma_i\geq I_{\{\tau\geq i\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_i),$$

但$X_\tau\leqslant\gamma_\tau$，$|EX_\tau|<\infty$，故$\gamma_\tau=X_\tau$ (a.s.)且

$$I_{\{\tau\geq i\}}\gamma_i=I_{\{\tau\geq i\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_i).$$

于是

$$\begin{aligned}I_{\{\tau>n\}}\gamma_n&=E\{I_{\{\tau>n\}}E(\gamma_\tau|\mathscr{F}_{n+1})|\mathscr{F}_n\}\\&=E\{I_{\{\tau>n\}}\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n\}\\&=I_{\{\tau>n\}}E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)(\text{当 }n<N\text{ 时}).\end{aligned}$$

这就证明了定理的必要性部分．证毕．

**定理2.3**（唯一性准则） 设$E|X_1|<\infty, EX_k^+<\infty(k=2,\cdots,N)$，则最优停时唯一的充要条件是：对一切$n<N$，有

$$P(\sigma_1=n, X_n=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n))=0, \tag{2.7}$$

这里

$$\sigma_1=\min\{k:\ 1\leqslant k\leqslant N, X_k=\gamma_k\}.$$

**证明** 必要性．设最优停时只有一个，我们用反证法证明(2.7)成立。设有$n$满足$P(B_n)>0$，这里

$$B_n=\{\sigma_1=n, X_n=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)\}.$$

令

$$t=\begin{cases}\sigma_1, & \omega\overline{\in}B_n,\\ \sigma_{n+1}, & \omega\in B_n,\end{cases}$$

这里$\sigma_{n+1}$之定义见定理2.1。则$t$是停时，$P(t\neq\sigma_1)>0$。从系2.1知

$$E(X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_{n+1})=\gamma_{n+1},$$

故

$$E(X_{\sigma_{n+1}}|\mathscr{F}_n)=E(\gamma_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n\ (\text{在}B_n\text{上}).$$

于是

$$EX_t=\int_{B_n^c}X_{\sigma_1}\mathrm{d}P+\int_{B_n}X_{\sigma_{n+1}}\mathrm{d}P$$

$$=\int_{B_n^c} X_{\sigma_1}\mathrm{d}P+\int_{B_n} X_n\mathrm{d}P=EX_{\sigma_1}.$$

这表明 $t$ 也是最优停时，从而与假设相矛盾．故对一切 $n<N$，(2.7)成立．

充分性．设(2.7)成立(对一切 $n<N$)．若 $\tau$ 是任一最优停时，从定理2.2知 $\tau\geqslant\sigma_1$ 且在集合 $\{\sigma_1=n<\tau\}$ 上，

$$X_n=\gamma_n=E(\gamma_{n+1}\mid\mathscr{F}_n).$$

故从(2.7)知 $P(\sigma_1=n<\tau)=0$．所以 $P(\sigma_1<\tau)=0$．这表明 $P(\tau\neq\sigma_1)=0$，即 $\sigma_1$ 是唯一的最优停时．证毕．

作为本节的结束，我们指出，"若将条件 $EX_k^+<\infty$"($k=1,\cdots,N$)改为"$EX_k^-<\infty$"($k=1,\cdots,N$)，本节的全部结论仍成立，证法也无须改变．

## §3 秘书问题

作为上节一般理论的应用，我们来叙述并解答一个著名问题——秘书问题．

这个问题的提法是这样的：某公司经理要从十个候选人中选一个当秘书，十个人是一个一个地和经理见面．这十个人优劣不等：最好的，次好的，…，直到最差的(十等)．现这十人按随机的顺序(即各种顺序的机会相等)去见经理，经理每见一位必须明确表态：拒绝或是接受他．如果拒绝，则可以见下一个人；如果接受，则不能见后面的人，拒绝过的不能召回．试问：这位经理应该采取怎样的策略，以使得找到最好的人当秘书的概率最大？

这个问题还有许多种别的提法，一种有趣的提法如下：假如一个国王要赠给某官员一件艺术品，要该官员从十件艺术品中挑选．这十件艺术品的精美程度不同，有最美的，次美的，…，直