高等学校教学参考书

复变函数习题集

范宜传　彭清泉　编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

复变函数习题集

范宜传　彭清泉　编

人民教育出版社

本习题集共分十一章，汇集了单复变函数的基本理论与运算方面的一些习题，每一章节分为基本知识提要、例题、习题三部分，书末附录附有大部分习题的提示，答案或解答，本书可作理工科大学或师范院校复变函数课程的教学参考书。

高等学校教学参考书
复变函数习题集
范宜传 彭清泉 编
*
人民教育出版社出版
四川省新华书店重庆发行所发行
重庆新华印刷厂印装
*
开本787×1092 1/32 印张9 字数218,000
1980年7月第1版 1983年3月第3次印刷
印数60,601—65,500
书号 13012·0482 定价 0.66 元

序 言

本习题集可作为理工科大学与师范院校有关复变函数论课程的教学参考书；对于自修复变函数论的读者，也可作为一本辅助性的读物．它的内容有四个部分，编排的顺序如下：每一章节的开始，摘有基本知识提要，帮助读者复习；其次，选取了一定数量的例题，供读者演题时参考；再次，安排大量的习题；最后，附有大部分习题的提示、答案或解答．为了弥补某些题目没有给出解答，在附录II中列出主要参考书目，以便读者查阅．

本习题集的初稿写于一九六二年．这次付印前作了修订．但限于编者的水平，书中一定存在许多不妥之处与错误，殷切地期待使用本书的老师与读者们批评指正．

本习题集的编写，曾得到武汉大学李国平教授，南京大学叶南薰教授、郑维德副教授热情鼓励，以及华侨大学数学系一些同志的帮助，在此谨向他们表示衷心的感谢！

编 者

一九七九年六月。

目　录

第一章 复 数

§ 1. 复数的基本运算，模与幅角

（一）设 x、y 是两个实数，则由它们组成的表示式 $x+iy$ 称为复数，记为 z:

$$z=x+iy \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

其中 x 称为 z 的实部，y 称为 z 的虚部，分别记作

$$x=\mathrm{Re}z, \qquad y=\mathrm{Im}z.$$

我们称 $x-iy$ 为 z 的共轭数，记作 $\bar{z}$. 两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$, 当且仅当 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ 时，才说它们相等.

关于复数的四则运算定义如下:

加法：$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$,

减法：$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$,

乘法：$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$,

显然，如上定义的加法与乘法，其运算满足交换律、结合律及乘法对加法的分配律.

除法：设 $z_2\neq 0$, 则 $\qquad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$

（二）当考虑笛卡尔坐标平面 xOy 时，那么，在平面上每一个具有坐标 (x, y) 的点便与复数 $z=x+iy$ 之间建立了一一对应的关系. 再者，注意到平面上的每一点又都对应于一个完全确定的向量——这个点的向径；反之，平面上每一向径，也都对应于一个完全确定的点——这个向径的终点. 因此，我们也可以用平面上的向径来表示复数. 对应于 z 的向径的长度 r 称为复数 z 的模，记作 $|z|$；由 Ox 轴的正向转到和该向径的方向一致时所

成的角度 Φ，称为 z 的幅角，记作 $\operatorname{Arg} z$（Φ 只能确定到相差 2π 的任意整数倍；若转动是反时针向，Φ 为正，否则为负）．显然有：

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}},\ \Phi=\operatorname{Arg} z=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x},$$

$$z=x+iy=r(\cos\Phi+i\sin\Phi).$$

最后一式就是复数 z 的极坐标表示式，也称三角表示式．

对于 $z=0$，其 $|z|=0$，但 $\operatorname{Arg} z$ 无意义；当 $z\neq 0$ 时，在其幅角的一切值中，只有一值满足

$$-\pi<\Phi\leqslant\pi,$$

此值称为幅角的主值，以小写 $\varphi=\arg z$ 表示．我们有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2n\pi \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

（三）关于模、幅角，有下述一些明显性质：

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad (z_2\neq 0),$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2,\ \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2.$$

这些公式可以推广到任意有限个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的情形．特别地，令 $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$ 时，则有乘方公式：

$$z^n=r^n(\cos n\Phi+i\sin n\Phi)$$

再令 $r=1$，便得到德摩弗公式：

$$(\cos\Phi+i\sin\Phi)^n=\cos n\Phi+i\sin n\Phi.$$

例题与习题

1. 试求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部与虚部．

解 设 $z=x+iy$，我们有

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{(z+1)\overline{(z+1)}}=\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}=\frac{z\bar{z}-\bar{z}+z-1}{(x+1)^2+y^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2-1)+i2y}{(x+1)^2+y^2},$$

则 $$\mathrm{Re}\left\{\frac{z-1}{z+1}\right\}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}, \qquad \mathrm{Im}\left\{\frac{z-1}{z+1}\right\}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

2. 试证明不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \ ||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|.$$

证 因为 $$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2,$$

但 $$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}\{z_1\bar{z}_2\}, \quad |\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$$

则 $$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}\{z_1\bar{z}_2\}+|z_2|^2,\\ &\leqslant|z_1|^2+2|z_1\bar{z}_2|+|z_2|^2\\ &=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

于是$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$. 对第二个不等式可类似地证明.(如果考虑复数的向量表示, 那么, 上述不等式正好是两个明显的几何事实, 即: 三角形两边之和大于第三边, 三角形任一边总大于其他两边之差.)

3. 试证明以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形与以 w_1, w_2, w_3 为顶点的三角形同向相似的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1\\ z_2 & w_2 & 1\\ z_3 & w_3 & 1\end{vmatrix}=0$$

证 我们以$\angle z_3$记顶点在z_3的那个角, 那么, 所述的两个三角形同向相似的充要条件是

$$\angle z_3=\angle w_3, \quad \text{而且} \quad \frac{|z_2-z_3|}{|z_1-z_3|}=\frac{|w_2-w_3|}{|w_1-w_3|}.$$

但 $$\angle z_3=\arg\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}, \quad \angle w_3=\arg\frac{w_2-w_3}{w_1-w_3},$$

那么, 上述两个条件可合并为

$$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=\frac{w_2-w_3}{w_1-w_3},$$

此即

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

4. 若 $\theta\neq 0$,试证明

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

证 令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,由德摩弗公式,得

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

但根据 $1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$,有

$$1+(\cos\theta+i\sin\theta)+\cdots+(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$=\frac{1-[\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta]}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)},$$

即 $$(1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta)+i(\sin\theta+\cdots+\sin n\theta)$$

$$=\frac{[1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta](1-\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{f(\theta)}{2(1-\cos\theta)}=\frac{f(\theta)}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

其中 $f(\theta)=[1-\cos(n+1)\theta](1-\cos\theta)+\sin\theta\sin(n+1)\theta$

$$+i[\sin\theta(1-\cos(\overline{n+1})\theta)-(1-\cos\theta)\sin(n+1)\theta].$$

再经一些简单运算,可得

$$1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta=\mathrm{Re}\left\{\frac{f(\theta)}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}},$$

$$\sin\theta+\cdots+\sin n\theta=\operatorname{Im}\left\{\frac{f(\theta)}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

5. 我们给出下述定义：适合等式

$$\zeta^n=z\quad(n\text{ 为自然数})$$

的复数 ζ, 称为复数 z 的 n 次根, 记作 $\zeta=\sqrt[n]{z}$. 试求一切的 ζ.

解 若 $z=0$, 则显然 $\zeta=0$; 若 $z\neq0$, 我们令

$$z=r(\cos\Phi+i\sin\Phi),\ \zeta=\rho(\cos\Psi+i\sin\Psi),$$

那么
$$\rho^n(\cos n\Psi+i\sin n\Psi)=r(\cos\Phi+i\sin\Phi).$$

比较两端的模与幅角，得到

$$\rho^n=r,\quad n\Psi=\varphi+2k\pi$$

即
$$\rho=\sqrt[n]{r}_{+},\ \Psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

此处$\sqrt[n]{r}_{+}$表示 r 的 n 次算术根, φ 表示主值 $\arg z$.

让 $k=0,1,2,\cdots,n-1$. 可见 z 的 n 次根共有 n 个，它们可以表示为:

$$\zeta_k=\sqrt[n]{r}_{+}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

显然, 它们分布在以原点为中心、以$\sqrt[n]{r}_{+}$为半径的圆周的一个内接正 n 边形的顶点上.

6. 试求满足下列关系式的点 z 的轨迹:

(1) $\operatorname{Re}\{z^2\}=a$; (2) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant1$

解 (1) 因为 $z^2=(x^2-y^2)+i2xy$, 则

$$\mathrm{Re}\{z^2\}=x^2-y^2.$$

可见,所求的轨迹是双曲线 $x^2-y^2=a$.（当 $a=0$ 时，退化为一对直线.）

（2）注意到两个复数相减的模，就是相应的两个点之间的距离. 可见，$\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$，即 $|z-1|\leqslant|z+1|$ 的轨迹显然是包括虚轴在内的右半平面 $\mathrm{Re}z\geqslant 0$.

7. 若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是不超过 9 的非负整数，$n\geqslant 1$，$a_n\geqslant 1$，求证多项式

$$a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$$

的零点或者在 $\mathrm{Re}\ z<0$ 内，或者在 $|z|<\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$ 内.

证 若令 $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$，那么，当 $\mathrm{Re}\ z\geqslant 0$，$|z|>1$ 时，我们有 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)\geqslant 0$，而且

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|\geqslant\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\right|-\frac{a_{n-2}}{|z|^2}-\frac{a_{n-3}}{|z|^3}-\cdots-\frac{a_0}{|z|^n}$$

$$>\mathrm{Re}\left\{a_n+\frac{a_{n-1}}{z}\right\}-\frac{9}{|z|^2}-\frac{9}{|z|^3}-\cdots\geqslant 1-\frac{9}{|z|^2-|z|}.$$

现以 $r=\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$ 表示 $r^2-r=9$ 的正根，则 $|z|\geqslant r$ 时，$1-\dfrac{9}{|z|^2-|z|}\geqslant 0$；可见，当 $\mathrm{Re}\ z\geqslant 0$，$|z|\geqslant r$ 时，$f(z)\neq 0$. 这就证明了 $f(z)$ 的零点或者在 $\mathrm{Re}\,z<0$ 内，或者在 $|z|<\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$ 内.

8. 试求下列各式的 x 与 y（x、y 都是实数）：

(1) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$；

(2) $(x+y)^2i-\dfrac{6}{i}-x=-y+5(x+y)i-1$；

(3) $x+iy=\sqrt{a+ib}$.

9. 试求下列各式的实部与虚部:

(1) z^4; (2) $\frac{1}{z}$; (3) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$; (4) $\frac{(2+i)^9}{(3-2i)^7}$.

10. 若 $z=x+iy$, 而且 $y\neq 0$, 试求当 $x^2+y^2=1$ 时, $\frac{z}{z+1}$的实部与虚部.

11. 若$(1+i)^n=(1-i)^n$, 试求 n 的值.

12 若 x、y 为实数, 求证

$$\left(iy+\frac{1}{ix}\right)^2-\left(ix+\frac{1}{iy}\right)^2=(x^2-y^2)\left(\frac{1}{xy}-1\right)^2.$$

13. 试证明: 当自然数 n 为 3 的整数倍时, 则

$$\left[\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)\right]^n+\left[\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)\right]^n$$

等于 2; 当 n 为任何别的自然数时, 它等于 -1.

14. 若 m、n 都是自然数, 试求$\frac{(1-i)^{2m}}{(1+i)^{2n}}$的值.

15. 若 x、y、ξ、η 都是实数, 试解方程组

$$\begin{cases}(1+i)x+(1+2i)y+(1+3i)\xi+(1+4i)\eta=1+5i,\\(3-i)x+(4-2i)y+(1+i)\xi+4i\eta=2-i.\end{cases}$$

16. 若 $x+iy=(\xi+i\eta)^n$, 试证 $x^2+y^2=(\xi^2+\eta^2)^n$.

17. 若令 $z^0=1$, $z^{-m}=\frac{1}{z^m}$, 试证明乘方法则 (特别是德摩弗公式)对任意整数指数 m 均成立.

18. 试证明$\sqrt[n]{z}$的所有的值可由其主值乘以 1 的同次根的各个值而得到.

19. 若 m 为整数, n 为自然数, m 与 n 互质. 任意的有理数指数幂定义如下:

$$z^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{z})^m,$$

试证明 $z^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{|z|^m}\left(\cos\frac{m}{n}\operatorname{Arg}z+i\sin\frac{m}{n}\operatorname{Arg}z\right).$

20. 试求下列复数的模:

(1) $(ac-bd)+i(ad+bc)$;　(2) $\dfrac{a+bi}{a-bi}$;

(3) $\dfrac{n+\sqrt{a}ni}{(-1+2i)(\sqrt{a}n-ai)}$;　(4) $\dfrac{x^2-y^2+xyi}{\sqrt{2}xy+\sqrt{x^4+y^4}i}$.

21. 利用复数的三角表示,求下列各式之值:

(1) $i(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)$;　(2) $(-2-2i)^7$;

(3) $(\sqrt{3}+i)^{-3}$;　(4) $\sqrt{1+i}$.

22. 试将下列复数化为三角表示式:

(1) $\pm1+i$;　(2) $1\pm\cos\theta+i\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $1+\sin\theta+i\cos\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;　(4) $\dfrac{1-i\operatorname{tg}\theta}{1+i\operatorname{tg}\theta}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

23. 试证明下列等式:

(1) 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<2\pi)$,则 $\dfrac{1+z}{1-z}=i\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}$;

(2) $$(1+\sqrt{3}i)(1+i)(\cos\theta+i\sin\theta)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)\right];$$

(3) $$\frac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\theta+i\sin\theta)}{(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right];$$

(4) $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

24. 试证

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right).$$

25. 试证$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n$

$$=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

26. 试证$\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\theta}{1-i\,\mathrm{tg}\theta}\right)^n=\frac{1+i\,\mathrm{tg}n\theta}{1-i\,\mathrm{tg}n\theta}\quad\left(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right).$

27. 利用德摩弗公式，把 $\cos nx$ 与 $\sin nx$ 展开成 $\sin x$、$\cos x$ 的乘方的和.

23. 若 $z+z^{-1}=2\cos\theta$, 求证 $z^n+z^{-n}=2\cos n\theta$.

29. 若 n 为自然数, 且 $x_n+iy_n=(1+i\sqrt{3})^n$, 求证

$$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=4^{n-1}\sqrt{3}.$$

30. 在等式$\frac{1-z^n}{1-z}=1+z+\cdots+z^{n-1}$ 中，令 $z=r\ (\cos\theta+i\sin\theta)$, 求出下列两个和:

$$S_1=1+r\cos\theta+r^2\cos 2\theta+\cdots+r^{n-1}\cos(n-1)\theta,$$

$$S_2=r\sin\theta+r^2\sin 2\theta+\cdots+r^{n-1}\sin(n-1)\theta.$$

并证明：当$|r|<1$时

$$\sum_0^\infty r^n\cos n\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta},$$

$$\sum_0^\infty r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}.$$

31. 试用复数的三角表示, 证明

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ \big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1-z_2|.$$

并利用它们证明, 当$|z_1|<1$、$|z_2|<1$时, 下述不等式成立:

$$\frac{|z_1|-|z_2|}{1-|z_1||z_2|}\leqslant\frac{|z_1+z_2|}{|1+\bar{z}_1z_2|}\leqslant\frac{|z_1|+|z_2|}{1+|z_1||z_2|}.$$

32. 若 $z=x+iy$, 试证明

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

33. 试证明$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明它的几何意义.

34. 试证明$|z_1+\sqrt{z_1^2-z_2^2}|+|z_1-\sqrt{z_1^2-z_2^2}|$

$$=|z_1+z_2|+|z_1-z_2|.$$

35. 若 $z=\sqrt{z_1z_2}$, 试证明

$$|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)-z\right|+\left|\frac{1}{2}(z_1+z_2)+z\right|.$$

36. 试证明$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|$.

37. 试证明以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形面积等于

$$\frac{1}{2}|z_2-z_3|^2\,\mathrm{Im}\left\{\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right\}$$

的绝对值.

38. 若$|z_1|=|z_2|=|z_3|$, 试证明

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

39. 试证明以 z_1, z_2, z_3 为顶点的三角形是等边的充要条件为

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0.$$

40. 令 $z=x+iy$, 试将 xOy 平面上任一直线和圆的方程式以 z 表示出来.

41. 若点 z 把线段 z_1z_2 分成的两部分之比为 $\lambda_1:\lambda_2$, 求 z.

42. 若有 n 个质点 $z_1, \cdots, z_n$, 其质量各为 $m_1, \cdots, m_n$, 试求这个质点系的重心.

43. 试证明平面上三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件是，存在不全为零的实数 a、b、c, 使得

$$az_1+bz_2+cz_3=0,\quad a+b+c=0.$$

44. 试证明四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件是, 它们的交比

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=\text{实常数}.$$

45 试证明满足下述条件:

$$z_1+z_2+z_3=0,\quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

的三点 z_1、z_2、z_3, 是内接于单位圆周上的一个等边三角形的顶点.

46. 试证明满足下述条件:

$$z_1+z_2+z_3+z_4=0,\quad |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$$

的四点 z_1、z_2、z_3、z_4, 是内接于单位圆周上的一个矩形的顶点.

47. 若 z_1 与 z_2 满足

$$\alpha z_1\bar{z}_1+\bar{a}z_1\bar{z}_2+a\bar{z}_1z_2+\beta\bar{z}_2z_2=0,$$

其中 α、β 为实常数, a 为复常数. 试证明当 $\alpha\beta-|a|^2<0$ 时, 点 $\dfrac{z_1}{z_2}$位于某一圆周或直线上.

48. 若 z_1、z_2、z_3 是三个已知点, λ_1、λ_2、λ_3 是满足 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ 的三个正数, 试证明点 $\xi=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3$ 位于三角形 $z_1z_2z_3$ 的内部

49. 若 t 是实变数, 试求下列各式中的点 z 的轨迹:

(1) $z=\alpha e^{it}+\beta e^{-it}$($\alpha$、$\beta$ 为实常数);

(2) $z=a(i+t)$((2)—(6)的 a、b 为正常数);

(3) $z=-bie^{-it}$; (4) $z=ai+at-bie^{-it}$;

(5) $z=(a+b)e^{it}-be^{i\frac{(a+b)}{b}t}$; (6) $z=a(1+e^{it})^{-2}$;

(7) $z=(1+it)e^{-it}$。

50. 试求满足下列各关系式的点 z 的轨迹:

(1) $|z|>2$; (2) $\mathrm{Re}z\geqslant\dfrac{1}{2}$; (3) $\mathrm{Re}\{z^2\}\leqslant2$;

(4) $\mathrm{Im}\{z^2\}\geqslant2$; (5) $0\leqslant\mathrm{Re}\{iz\}\leqslant2\pi$; (6) $1<|z-2i|<2$;

(7) $|z^2-1|=a$ $(a>0)$; (8) $\left|\dfrac{1}{z}\right|<\delta$ $(\delta>0)$;

(9) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=1$; (10) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\geqslant2$; (11) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right|=a(a>0)$;