现代控制系统理论小丛书

多变量线性控制系统引论
—微分算子多项式矩阵法

关肇直 主编

科学出版社

现代控制系统理论小丛书

多变量线性控制系统引论

——微分算子多项式矩阵法

关肇直 主编

王朝珠 王恩平 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

本书是现代控制系统理论小丛书之一．这套小丛书介绍了现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论如何由工程实际的需要而产生，又怎样应用它来解决工程设计中的实际问题．

本书主要介绍由微分算子多项式矩阵描述的定常线性系统理论．第一章介绍多项式矩阵与有理式矩阵．第二章介绍多变量线性系统的微分算子描述．第三章介绍多变量线性系统的基本概念，能控性和能观测性．第四章介绍多变量线性系统的零点和极点，以及它们对系统动态特性的影响．第五章介绍反馈控制系统的设计．第六章讨论内模原理的频域综合方法．

本书可供从事控制理论及其应用研究的工程技术人员、高等院校有关专业的师生参考．

现代控制系统理论小丛书

多变量线性控制系统引论

——微分算子多项式矩阵法

关肇直 主编

王朝珠　王恩平 编著

责任编辑　刘兴民　袁放尧

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1987 年 10月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1987 年 10月第一次印刷　　印张：10 1/8

印数：0001—3,250　　字数：226,000

统一书号：15031・871

本社书号：5160・15—8

定价： 2.40 元

现代控制系统理论小丛书序言

在50年代末60年代初，在工程实践的基础上，特别是在空间技术等方面的实践基础上，自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段．这种新的理论对于控制系统的性能提供了更深入的认识，使得在实践中发现的一些现象得到更好的说明．这些理论成果在以往十几年当中又在许多空间技术与航海、航空的型号设计中得到了应用，受到了实践的检验．

工程实践迫切需要发展理论，而一些新技术，特别是计算技术与现代数学的方法使现代控制理论的发展成为可能．为了控制更复杂的系统，并提高控制精度，数字控制逐渐代替模拟装置．这主要是利用了数字电子计算机，同时有赖于新的数学的描述与方法．

解放以来，我国科学技术得到迅速发展．我国人造地球卫星的发射与回收的成功以及其它尖端技术上的巨大成就都表明我国的控制技术已经达到较高的水平．我们应当本着“精益求精”的精神，使利用数字电子计算机来控制的这种先进技术更广泛地应用到各种有关的工程技术中去，并在工程实践中不断总结提高．我们撰写这一套《现代控制系统理论》小丛书，就是为了介绍现代控制系统理论的各个部分，并着重说明这种理论怎样由工程实践的需要而产生，又怎样用来解决工程设计中的实际问题．

这套小丛书，理论与实际并重．从每一种书来说，或偏重基础理论的阐述，但也给出应用的例子；或偏重于一项工程问

题，但也把它放在坚实的理论基础之上．本丛书之所以叫做“小丛书”，主要是指每种书的篇幅小，而不是指通俗普及性小册子．本书主要是为从事控制理论研究的科研工作者和工程技术人员而撰写的．

本丛书包括线性系统理论、非线性系统理论、极值控制理论、系统辨识、最优估计与随机控制理论、分布参数系统理论及其他有关内容．全套丛书计划分十几册出版．

希望这套丛书对于我国实现四个现代化作出它的贡献．

关肇直

1982年5月于北京

前　　言

线性系统理论是现代控制理论中发展较成熟应用较广泛的一部分．从线性系统理论的研究方法来说，除了传递函数矩阵方法和状态空间方法以外，目前常用的还有 Kalman 提出的模论方法、Rosenbrock 与 Wolovich 提出的微分算子多项式矩阵方法以及 Wonham 提出的几何方法． 多项式矩阵方法是古典频域法的进一步发展，几何方法可使人从本质上理解状态空间法，而模论方法则有可能把多项式矩阵方法与几何方法在某种框架下结合起来．对于从事控制理论及其应用研究的科技工作者来说，要想熟悉所有的方法固然是困难的，但是不去了解新方法无疑是有缺欠的．本书的主要目的就是试图向读者介绍线性系统理论中的微分算子多项式矩阵方法，以利人们去熟悉它、掌握它、运用它．

本书讨论的主要是定常线性系统理论，受控对象可用高阶线性微分方程组描述，因此可用微分算子多项式矩阵的工具进行研究．本书的内容共分七章．第一章多项式矩阵与有理分式矩阵，主要是介绍有关的数学预备知识，所有的结论都未加证明，否则将喧宾夺主，增加篇幅．第二章介绍多变量线性系统的微分算子描述，建立描述定常线性系统的数学模型．第三章讨论线性系统的能控性和能观测性，介绍两个最基本的概念．第四章介绍多变量线性系统的零点和极点，以及它们对系统动态特性的影响． 第五章研究反馈控制系统的设计，主要内容有极点配置、观测器理论以及动态补偿器设计的传递函数方法．第六章介绍了内模原理的频域形式．主要内

容包括结构稳定的系统的结构性质、无静差和结构无静差系统的性质以及结构无静差补偿器的存在条件与设计方法．这部分内容主要是介绍作者在近三年来的工作．第七章介绍了线性最优控制系统的频域综合方法．

从应用的观点来看，采用多项式矩阵方法进行系统的分析与综合，计算方法是十分重要的，而本书却涉及很少．国内从事计算机辅助设计的学者对此有专门的研究，请读者加以注意．

由于作者的水平有限，书中肯定会有许多不足，甚至会有某些错误之处，欢迎广大读者批评指正．

作者

1983 年 12 月于北京

目　　录

第一章　多项式矩阵与有理分式矩阵

§ 1.1　多项式与有理分式

设 F 是一个域，则称文字 λ 的幂次相对域 F 的线性组合

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \qquad (1.1.1)$$

为域 F 上的多项式，其中 $a_i\in F$，$i=0,1,\cdots,n$，n 为自然数．在一个多项式中，文字 λ 的最高幂次称为该多项式的次数，记做 $\deg\{\cdot\}$．在多项式 $f(\lambda)$ 中，如果 $a_n\neq 0$，则

$$\deg\{f(\lambda)\}=n,$$

这时称 $f(\lambda)$ 为 n 次多项式，同时诸 a_i，$i=0,1,\cdots,n$，称为多项式的系数．如果 F 是实数域，则 $f(\lambda)$ 的系数都是实数，称它为实系数多项式．在本书中，一般我们只涉及复(或实)系数多项式，因此，域 F 总是指复数域(或实数域) $\mathscr{C}$(或 $\mathscr{R}$)．

如果 $a_n=1$，则称 $f(\lambda)$ 为首 1 多项式．如果 $f(\lambda)=a_0$ 为复常数，则它是零次多项式．数零也可以看作一个多项式，它是唯一没有定义次数的多项式．

假设另有一个多项式

$$g(\lambda)=b_m\lambda^m+b_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0, \qquad (1.1.2)$$

其中，$b_j\in F=\mathscr{C}$，$j=0,1,\cdots,m$．如果 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 中的文字 λ 的同次幂的系数彼此相等，那么就称这两个多项式恒等，记做 $f(\lambda)\equiv g(\lambda)$．假若把多项式看成一个整体，而不是做为文字 λ 的函数，那么可把两个多项式的恒等简称相等，符号"$\equiv$"可改记做"$=$"．

对 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 可以定义它们的和为

$$f(\lambda)+g(\lambda)=c_n\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0,\quad n\geqslant m,\tag{1.1.3}$$

其中，$c_i=a_i+b_i$，$i=0,1,2,\cdots,n$，$b_j=0$，$j>m$. 注意，当 $n=m$ 时，$f(\lambda)+g(\lambda)$ 的次数可能小于 n，例如，当 $a_n=-b_n$ 时就会出现这种情况. 同时，也可以定义 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的乘积为

$$f(\lambda)\cdot g(\lambda)=d_{n+m}\lambda^{n+m}+\cdots+d_1\lambda+d_0,\tag{1.1.4}$$

其中
$$d_i=\sum_{k+l=i}a_kb_l,\ i=0,1,\cdots,n+m.$$

如果 a_n，b_m 都不为零，那么 $d_{n+m}\neq 0$，所以说两个多项式乘积的次数等于这两个多项式次数之和，即

$$\deg\{f(\lambda)\cdot g(\lambda)\}=\deg\{f(\lambda)\}+\deg\{g(\lambda)\}.$$

按照我们上面引进来的关于多项式的加法和乘法运算，可以证明，多项式的全体构成一个交换环，记做 $\mathscr{C}[\lambda]$（或 $\mathscr{R}[\lambda]$）.

如果存在 $\varphi(\lambda)\in\mathscr{C}[\lambda]$，使得

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)g(\lambda),$$

则称 $g(\lambda)$ 为 $f(\lambda)$ 的一个因式. 当然，$\varphi(\lambda)$ 也是 $f(\lambda)$ 的因式. 显然，$\deg\{g(\lambda)\}\leqslant\deg\{f(\lambda)\}$. 如果 $\deg\{g(\lambda)\}<\deg\{f(\lambda)\}$，而 $g(\lambda)$ 不是 $f(\lambda)$ 的因式，则有 $\varphi(\lambda)$，$\psi(\lambda)\in\mathscr{C}[\lambda]$，使得

$$f(\lambda)=\varphi(\lambda)g(\lambda)+\psi(\lambda).\tag{1.1.5}$$

如果 $\deg\{\psi(\lambda)\}\neq 0$，那么必有 $\deg\{\psi(\lambda)\}<\deg\{g(\lambda)\}$，并且，满足式(1.1.5)的多项式 $\varphi(\lambda)$ 和 $\psi(\lambda)$ 是唯一的. 通常，我们称 $\varphi(\lambda)$ 为用 $g(\lambda)$ 来除 $f(\lambda)$ 所得的商式，$\psi(\lambda)$ 为余式. 如果 $\psi(\lambda)=0$，则称 $g(\lambda)$ 能整除 $f(\lambda)$，记做 $g(\lambda)|f(\lambda)$. 显然，当 $g(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 的因子时必有 $g(\lambda)|f(\lambda)$. 这时也称

$f(\lambda)$ 是 $g(\lambda)$ 的倍式.

已知多项式 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$，如果存在多项式 $\varphi(\lambda)$，使得 $\varphi(\lambda)|f(\lambda)$，$\varphi(\lambda)|g(\lambda)$，则称 $\varphi(\lambda)$ 为 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的公因式.假设多项式 $\varphi(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的公因式，并且若 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的任意一个公因式 $\psi(\lambda)$ 都能整除 $\varphi(\lambda)$，即 $\psi(\lambda)|\varphi(\lambda)$，则称 $\varphi(\lambda)$ 为 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的最大公因式. 如果存在多项式 $\psi(\lambda)$,使得 $f(\lambda)|\psi(\lambda)$,$g(\lambda)|\psi(\lambda)$,则称 $\psi(\lambda)$ 为 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的公倍式，并且若 $p(\lambda)$ 是 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的任意一个公倍式,都有 $\psi(\lambda)|p(\lambda)$，则称 $\psi(\lambda)$ 为 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的最低公倍式. 类似地可以定义多个多项式的最大公因式与最低公倍式.

如果多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的最大公因式为零次多项式，则称 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质. 多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质的充分必要条件是,存在多项式 $\psi(\lambda)$ 与 $\varphi(\lambda)$,使得

$$f(\lambda)\psi(\lambda)+g(\lambda)\varphi(\lambda)=1. \tag{1.1.6}$$

一般说来，满足方程 (1.1.6) 的多项式 $\psi(\lambda)$ 与 $\varphi(\lambda)$ 并不唯一. 但是,满足条件 $\deg\{\psi(\lambda)\}<\deg\{g(\lambda)\}$ 或 $\deg\{\varphi(\lambda)\}<\deg\{f(\lambda)\}$ 的 $\psi(\lambda)$ 与 $\varphi(\lambda)$ 是唯一的. 为了判别两个多项式的互质,有时也可以利用多项式的系数.对已知的多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$,我们引进由它们的系数排成的矩阵

$$M_{f,g}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & 0 \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\ 0 & & \ddots & & & & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & & 0 \\ & b_0 & \cdots & b_{m-1} & b_m & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ 0 & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & \end{bmatrix}\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m\text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n\text{ 行}\end{matrix},$$

称这个矩阵为多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 的"结式". 于是我们有，多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互质的充分必要条件是 $\mathrm{rank} M_{f,g} = n + m$，即 $M_{f,g}$ 满秩。这里，$\mathrm{rank}\{\cdot\}$ 表示矩阵的秩.

在控制理论中，我们经常遇到多项式方程

$$f(\lambda)\psi(\lambda) + g(\lambda)\varphi(\lambda) = d(\lambda), \qquad (1.1.7)$$

其中，$f(\lambda)$，$g(\lambda)$ 与 $d(\lambda)$ 都是已知的多项式. 通常称方程 (1.1.7) 为 Diophantine 方程. 可以证明，Diophantine 方程 (1.1.7)有解的充分必要条件是，$f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 的最大公因式能整除多项式 $d(\lambda)$.

已知多项式 $f(\lambda)$. 通常我们称满足方程

$$f(\lambda_0) = 0$$

的复数 λ_0 为多项式 $f(\lambda)$ 的根. 如果 $\deg\{f(\lambda)\} = n$，则 $f(\lambda)$ 有 n 个根，在这 n 个根中，可能有相同的，相同的根称为多项式的重根. 假设 λ_0 是多项式 $f(\lambda)$ 的 r 重根，那么必有

$$(\lambda - \lambda_0)^r | f(\lambda).$$

如果多项式 $f(\lambda)$ 的根都在复平面的左半开平面内，那么我们就称 $f(\lambda)$ 为稳定的多项式.

以上，我们仅仅介绍了在多项式加法和乘法运算下的一些简单性质. 如果我们引进两个多项式的除法，则便产生新的概念——有理分式. 设 $f(\lambda)$ 和 $g(\lambda)$ 是两个多项式，假设 $g(\lambda) \neq 0$，则称

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$$

为有理分式. $f(\lambda)$ 为有理分式的分子，$g(\lambda)$ 为有理分式的分母. 显然，每个多项式必都是一个特殊的有理分式，只是它的分母为常数 1.

已知两个有理分式

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}, \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

我们说它们相等，记做

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

乃是指 $f(\lambda)\psi(\lambda) = g(\lambda)\varphi(\lambda)$. 它们之和定义为

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} + \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{f(\lambda)\psi(\lambda) + g(\lambda)\varphi(\lambda)}{g(\lambda)\psi(\lambda)},$$

它们之积定义为

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} \frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{f(\lambda)\varphi(\lambda)}{g(\lambda)\psi(\lambda)}.$$

显然，在一个有理分式中，消去它的分子与分母的公因式，或在它的分子和分母中同乘以一个不为零的多项式所得到的有理分式和原分式相等．因此，任何一个有理分式都可以和一个分子与分母互质的最简有理分式相等．

如果有理分式分子的次数不超过分母的次数，则称它为真有理分式，如果分子的次数严格小于分母的次数，则称它为严格真有理分式．

有理分式的全体构成一个域．

§1.2 多项式矩阵的基本概念

定义 1.2.1 以环 $\mathscr{C}[\lambda]$（或 $\mathscr{R}[\lambda]$）中的元为元素的 $m \times r$ 阶矩阵称为以文字 λ 为变元定义在数域 $\mathscr{C}$（或 $\mathscr{R}$）上的多项式矩阵，简称多项式矩阵，记为 $\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$（或 $\mathscr{R}^{m\times r}[\lambda]$）．

若 $A(\lambda) \in \mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$，则它有如下形式：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1r}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2r}(\lambda) \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mr}(\lambda) \end{bmatrix}=\{a_{ij}\},$$

其中,$a_{ij}\in \mathscr{C}[\lambda]$,$i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,r$. m 称为 $A(\lambda)$ 的行数,r 称为 $A(\lambda)$ 的列数. 如果 $m\neq r$,则称 $A(\lambda)$ 为长阵,如果 $m=r$,则称 $A(\lambda)$ 为方阵. 当 $a_{ij}(\lambda)\in\mathscr{C}$ 时,$A(\lambda)$ 就是通常的复数矩阵.

在 $\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$ 中,我们可以定义多项式矩阵的加法和乘法运算.

两个多项式矩阵的加法定义为两矩阵相应元素相加. 因此,只有相同阶数的多项式矩阵才能相加. 设 $A(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$, $B(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$,$A(\lambda)=\{a_{ij}\}$,$B(\lambda)=\{b_{ij}\}$,则有

$$A(\lambda)+B(\lambda)=\{a_{ij}+b_{ij}\}$$

依定义可知,多项式矩阵加法满足结合律和交换律,即若 $A(\lambda),B(\lambda),E(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$,则有

$$A(\lambda)+B(\lambda)=B(\lambda)+A(\lambda),$$

$$(A(\lambda)+B(\lambda))+E(\lambda)=A(\lambda)+(B(\lambda)+E(\lambda)).$$

两个多项式矩阵的乘法只适应于一个多项式矩阵的列数和另一个多项式的行数相同的矩阵对. 设 $A(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$, $B(\lambda)\in\mathscr{C}^{r\times l}[\lambda]$, $A(\lambda)=\{a_{ij}(\lambda)\}$, $B(\lambda)=\{b_{ij}(\lambda)\}$. 定义 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的乘积为 $E(\lambda)$,记为

$$E(\lambda)=A(\lambda)B(\lambda).$$

若记 $E(\lambda)=\{e_{ij}(\lambda)\}\in\mathscr{C}^{m\times l}[\lambda]$,则

$$e_{ij}(\lambda)=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}(\lambda)b_{kj}(\lambda),$$

$$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,l.$$

不难看出，多项式矩阵乘法运算满足结合律，并对加法满足分配律，即若 $A(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$，$B(\lambda)\in\mathscr{C}^{r\times p}[\lambda]$，$E(\lambda)\in\mathscr{C}^{p\times l}[\lambda]$，则

$$(A(\lambda)\cdot B(\lambda))\cdot E(\lambda)=A(\lambda)\cdot(B(\lambda)\cdot E(\lambda)),$$

若 $A(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$，$B(\lambda)\in\mathscr{C}^{m\times r}[\lambda]$，$E(\lambda)\in\mathscr{C}^{r\times p}$，$D(\lambda)\in\mathscr{C}^{l\times m}[\lambda]$，则

$$(A(\lambda)+B(\lambda))\cdot E(\lambda)=A(\lambda)E(\lambda)+B(\lambda)E(\lambda),$$

$$D(\lambda)(A(\lambda)+B(\lambda))=D(\lambda)A(\lambda)+D(\lambda)B(\lambda).$$

但值得指出的是，多项式矩阵乘法没有交换律，即多项式矩阵的乘法运算是不可交换的.

和常值矩阵一样，可以定义多项式矩阵的转置. 已知

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1r}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2r}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mr}(\lambda) \end{bmatrix},$$

则它的转置被定义为

$$A^T(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{21}(\lambda) & \cdots & a_{m1}(\lambda) \\ a_{12}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{m2}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1r}(\lambda) & a_{2r}(\lambda) & \cdots & a_{mr}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

多项式矩阵的转置运算有如下性质：

$$(A^T(\lambda))^T=A(\lambda),$$

$$(A(\lambda)+B(\lambda))^T=A^T(\lambda)+B^T(\lambda),$$

$$(A(\lambda)\cdot B(\lambda))^T=B^T(\lambda)\cdot A^T(\lambda).$$

同样，多项式矩阵也有逆运算. 为了讨论多项式矩阵的逆，我们先介绍与此有关的概念.

我们知道，若有 n 个整数其排列共有 $n!$ 种. 在这些排列