数学分析新讲

第二册

张筑生　编著

北京大学出版社

北京大学教材

数学分析新讲

第二册

张筑生 编著

北京大学出版社

内容提要

本书的前身是北京大学数学系教学改革实验讲义．改革的基调是：强调启发性，强调数学内在的统一性，重视学生能力的培养．书中不仅讲解数学分析的基本原理，而且还介绍一些重要的应用（包括从开普勒行星运动定律推导万有引力定律）．从概念的引入到定理的证明，书中作了煞费苦心的安排，使传统的材料以新的面貌出现．书中还收入了一些有重要理论意义与实际意义的新材料（例如利用微分形式的积分证明布劳沃尔不动点定理等）．

全书共三册．第一册内容是：一元微积分，初等微分方程及其应用．第二册内容是：一元微积分的进一步讨论，广义积分，多元函数微分学，重积分．第三册内容是：曲线、曲面与微积分，级数与含参变元的积分．

本书可作为大专院校数学系数学分析基础课教材或补充读物，又可作为大、中学教师，科学工作者和工程技术人员案头常备的数学参考书．

北京大学教材
数学分析新讲
第二册
张筑生 编著
责任编辑：刘 勇
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京市印刷三厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
•
850×1168毫米 32开本 12.25印张 290千字
1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷
印数：0001—5,000册
ISBN 7-301-01228-4/O·203
定价：6.30元

目　录

第三篇　一元微积分的进一步讨论

第四篇　多元微积分

第　三　篇

一元微积分的进一步讨论

第八章 利用导数研究函数

§1 柯西中值定理与洛必达法则

本节介绍拉格朗日中值定理的一种推广——柯西中值定理，并运用这种新形式的中值定理推导关于未定型极限的洛必达(L' Hospital)法则.

1.a 柯西中值定理

我们知道，拉格朗日中值定理的几何意义是：在显式表示的可微曲线段上，至少存在一点，该点的切线平行于联结这曲线段两端的弦. 如果考察参数表示的可微曲线段

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

那么从几何直观上可以判断，在这曲线段上也至少存在一点（相应于介于α和β之间的一个参数值τ），该点的切线平行于联结这曲线段两端的弦，即：

$$\frac{\psi'(\tau)}{\varphi'(\tau)}=\frac{\psi(\beta)-\psi(\alpha)}{\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)}.$$

这一结果就是著名的柯西中值定理.

定理（柯西中值定理） 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，并且满足条件

(1.1) $$g'(x)\neq 0,\quad \forall x\in(a,b),$$

则存在 $\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 由条件（1.1）可知

$$g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)\neq 0,$$

因而商式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

有意义．我们来考察辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

容易验证：F 在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，并且

$$F(a)=F(b)=0.$$

于是，根据罗尔定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=0.$$

由此得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \qquad \square$$

1.b 未定式

如果已经知道

$$\lim_{x\to a}f(x)=A,\ \lim_{x\to a}g(x)=B,\ a,A,B\in\mathrm{R},$$

那么除去某些例外情形，我们可以利用下面的运算法则去求和、差、积、商及幂-指数式的极限（假定在 $\check{U}(a)$之中函数的运算有意义）：

(1) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=A+B,$

(2) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=A-B,$

(3) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=AB,$

(4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B},$

(5) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{B\ln A}=A^B.$

对于以上各条，所说的例外情形分别是：

(i) 在(1)中 A 与 B 为异号无穷大；

(ii) 在(2)中 A 与 B 为同号无穷大；

(iii) 在(3)中 A 与 B 之一为0，另一为无穷大；

(iv) 在(4)中 A 与 B 同时为0或者 A 与 B 同时为无穷大；

(v) 在(5)中 $A=1$，$B=\infty$，或者 $A=0$，$B=0$，或者 $A=\infty$，$B=0$.

这些例外情形所涉及的极限类型统称为未定型．类型(i)或(ii)被称为$\infty-\infty$未定型．类型(iii)被称为$0\cdot\infty$未定型．(iv)中的两种极限类型分别被称为$\frac{0}{0}$未定型与$\frac{\infty}{\infty}$未定型．(v)中的三种类型分别被称为1^∞未定型，0^0未定型与∞^0未定型．

未定型的极限式被称为未定式．对于未定式，上面列举的运算法则(1)—(5)失去效用，必须另寻解决问题的途径．下面将要介绍的洛必达法则，*在一定的条件下*，提供了确定未定型极限的有效办法——通常称为未定式的定值法．

1.c 洛必达法则

下面的定理1和定理2都称为洛必达法则．为了叙述方便，我们以$\check{U}(a)$表示 a 的某个去心邻域，它可以是以下几种情形之一：

$$a\in\mathbf{R},\quad \check{U}(a)=(a-\eta,a+\eta);$$
$$a=+\infty,\check{U}(a)=(H,\ +\infty);$$
$$a=-\infty,\check{U}(a)=(-\infty,\ -H);$$
$$a=\infty,\quad \check{U}(a)=(-\infty,\ -H)\cup(H,\ +\infty).$$

定理1 设 $a\in\overline{\mathbf{R}}$ 或 $a=\infty$；$l\in\overline{\mathbf{R}}$ 或 $l=\infty$．如果函数 f 和 g 在 a 点的去心邻域 $\check{U}(a)$上可导，$g'(x)\neq 0$，$\forall x\in\check{U}(a)$，并且满足：

I： $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，

Ⅱ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$,

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

定理 2 设 $a\in\overline{\mathbf{R}}$ 或 $a=\infty$；$l\in\overline{\mathbf{R}}$ 或 $l=\infty$. 如果函数 f 和 g 在 a 点的去心邻域 $\check{U}(a)$ 上可导，$g'(x)\neq 0$，$\forall x\in\check{U}(a)$，并且满足：

Ⅰ：$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$,

Ⅱ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$,

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

在证明上面两个定理之前，我们先对问题作一番分析，尽可能地减少所必须考虑的情形.

首先，在两定理的证明中，只须就 $l=0$ 或 l 为无穷大($+\infty$, $-\infty$, ∞)这些情形加以讨论就可以了. 事实上，对于 $l\in\mathbf{R}$ 的其他情形，只要用 $\tilde{f}(x)=f(x)-lg(x)$ 来代替 $f(x)$，就可以化为 $\tilde{l}=0$ 的情形：

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\right)=0.$$

如果对这情形证明了

$$\lim_{x\to a}\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}=0,$$

那么立即就得到

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}+l\right)=l.$$

其次，为了证明

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

只须证明

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=l;$$

同样，为了证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l,$$

只须证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

于是，在两定理的证明中，只须考虑以下四种极限过程：

$$x\to a-,\quad x\to a+\qquad (a\in\mathbb{R})$$

及

$$x\to-\infty,\qquad x\to+\infty.$$

对这四种极限过程，定理的证明是完全类似的．我们将只对 $x\to+\infty$的情形详细写出证明，并将在注记中简要地叙述其他三种情形下证明应作的改变．

在正式开始证明之前，再说几句话介绍将要采取的办法（就极限过程 $x\to+\infty$而言）．对于$(\Delta,+\infty)$中的任意两个不同的点 x 和 y 用柯西中值定理可得

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

这式子的左边可以改写成

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(y)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(y)}{g(x)}}.$$

于是我们得到

(1.2) $$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(y)}{g(x)},$$

这里 ξ 介于 x 和 y 之间. 我们将利用这一式子来考察 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限状况.

定理1的证明 考虑这样的情形

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l=0 \quad (\infty,-\infty,+\infty).$$

我们来证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \quad (\infty,-\infty,+\infty).$$

根据所设条件，对于任意的 $\varepsilon>0$ $(E>0)$，存在 $\Delta>0$，使得 $z\in(\Delta,+\infty)$ 时

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

(对 $l=\infty$ 的情形:

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|>2E+1;$$

对 $l=+\infty$ 的情形:

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}>2E+1;$$

对 $l=-\infty$ 的情形:

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}<-2E-1).$$

对任意取定的 $x\in(\Delta,+\infty)$，因为

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{g(y)}{g(x)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{g(x)}=0,$$

所以可取 $y\in(x,+\infty)$ 充分大，以使得

$$\frac{1}{2}<1-\frac{g(y)}{g(x)}<\frac{3}{2},$$

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\left(<\frac{1}{2}\right).$$

于是从(1.2)式可得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(对 $l=\infty$的情形:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\geqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|-\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(2E+1)-\frac{1}{2}=E;$$

对于 $l=+\infty$的情形:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(2E+1)-\frac{1}{2}=E;$$

对于 $l=-\infty$的情形:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(-2E-1)+\frac{1}{2}=-E).$$

这就完成了所述情形下定理 1 的证明. □

注记 对于 $x\to a-$, $x\to a+$, 或者 $x\to-\infty$ 的情形, 上述定理 1 的证明所需要作的改变主要是: 把 $x\in(\Delta,+\infty)$ 换成 $x\in(a-\delta,a)$, $x\in(a,a+\delta)$,或者 $x\in(-\infty,-\Delta)$; 把 $y\in(x,+\infty)$ 换成 $y\in(x,a)$, $y\in(a,x)$, 或者 $y\in(-\infty,x)$.

定理 2 的证明 与定理 1 的证明十分类似, 我们可以简要地予以说明. 首先取Δ充分大, 使得 $z\in(\Delta,+\infty)$时有

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

(或对 $l=\infty, +\infty, -\infty$ 情形的相应不等式). 对任意取定的 $y\in(\Delta, +\infty)$，因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(y)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(y)}{g(x)}=0,$$

所以可取 $x\in(y, +\infty)$充分大，使得

$$\frac{1}{2}<1-\frac{g(y)}{g(x)}<\frac{3}{2},$$

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\left(<\frac{1}{2}\right).$$

于是，利用(1.2) 式就可得到

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|+\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(或对 $l=\infty, +\infty, -\infty$ 情形的相应估计). 这样，我们证明了定理 2. □

为了求某些未定式的极限，有时需要接连几次运用洛必达法则. 例如，设$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$是$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式. 为了确定它的值，我们需要求$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$的极限. 如果这仍是未定式，我们又需要求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$的极限. ……这样继续下去，直至求得某个极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}$. 我们把这过程写成一串等式

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\cdots=\lim_{x\to a}\frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)}.$$

计算过程中应注意随时约分化简或者分离出容易求极限的因式，以免越算越繁．若化简后已不再是未定式了，就可按通常的办法求极限．

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$．

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{e^x}$．

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{k!}{e^x}=0.$$

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^a}(a>0)$．

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0.$$

例 4 设 $f(x)$在 a 点有二阶导数 $f''(a)$，试证

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

证明 根据假定，f 在 a 点有二阶导数，因而在 a 点邻近应该具有一阶导数．按照洛必达法则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}+\frac{f'(a-h)-f'(a)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f'(a)+f'(a)]=f'(a).$$

例 5 考察分段表示的函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

试证 f 在R上可导任意多次.

证明 显然函数 f 在 $x\neq 0$ 处可导任意多次. 只须考察这函数在 $x=0$ 处的可导性. 首先注意到

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$$

因此

$$f'(0)=0.$$

我们求得

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x\leqslant 0.\end{cases}$$

假设

$$f^{(k)}(x)=\begin{cases}P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x\leqslant 0\end{cases}$$

(这里 $P_{2k}(u)$是变元 u 的 $2k$ 次多项式). 于是, 对于 $x>0$ 有

$$f^{(k+1)}(x)=\left[P_{2k}\left(\frac{1}{x}\right)-P_{2k}'\left(\frac{1}{x}\right)\right]\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=P_{2(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$