谱估计和自适应滤波

潘士先

北京航空航天大学出版社

谱估计和自适应滤波

潘 士 先

北京航空航天大学出版社

内 容 提 要

本书是为《信号、电路和系统》，《通信和电子系统》等工科专业的硕士研究生编写的相应课程的教材或参考书。其中谱估计部分介绍了周期图分析以及*AR*，*ARMA*和最大熵谱估计等的理论、概念和算法；自适应滤波部分介绍了广泛应用的最小均方误差（*LMS*）自适应滤波器以及近年来发展的递推最小二乘（*RLS*）自适应滤波器；两个部分中都有一些应用的例子。本书也可供有关专业的科技人员参考。

谱估计和自适应滤波
PUGUJI HE ZISHIYING LUBO
潘士先
责任编辑 郭维烈
北京航空航天大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行　各地新华书店经销
北京密云华都印刷厂印装
*
787×1092 1/16　印张：24.25　字数：620千字
1991年7月第一版　1991年7月第一次印刷　印数：2000册
ISBN 7-81012-239-8/TN·015　定价：6.25元

序　言

本书是为《信号、电路和系统》，《通讯和电子系统》等工程专业的硕士研究生编写的，其成书的基础是作者在北京航空航天大学为这些专业的研究生讲授的同名课程的讲义。

本书由三部分组成。

第一部分是基础知识，包括随机过程理论中与本书内容关系最为密切的一些概念、平稳过程的线性模型以及估计的基本概念和方法，其中包括线性预测和滤波的经典理论。此部分由前三章组成。对于那些具有随机过程以及估计的基本理论知识的读者来说，这一部分可以作为一种复习来阅读，而对于那些在这两方面的基础知识尚有欠缺的读者来说，则须认真学习这一部分内容，以便能够顺利地阅读本书后面的两个部分。

第二部分是平稳过程功率谱密度函数的估计或称谱分析。这是本书的第一个主题。这一部分包括古典的周期图分析以及一些重要的现代谱估计方法。现代谱估计的讨论以较为成熟和实用的AR（自回归）谱估计为重点，同时在不同的详细程度上介绍了$ARMA$（自回归滑动和）谱估计，最大熵谱估计，最小交叉熵谱估计和Thomson谱估计，从而展示了谱估计的几种不同的途径。此外，这一部分还包括了谐波检测以及并不属于谱估计但方法上与谐波检测十分相近的指数信号检测（极零辨识）。这一部分由四，五，六三章组成。

第三部分是自适应滤波。这是本书的第二个主题。这一部分由七，八两章组成。第七章详细地讨论了应用最广的LMS（最小均方误差）自适应滤波器，包括随机梯度算法以及它的一些重要变形。第八章讨论了近年来发展的具有优良收敛和跟踪性能的RLS（递推最小二乘）自适应滤波器，包括格式和横向滤波器；算法推导以几何方法为主。在这两章中都讨论了自适应滤波的一些典型应用如自适应预测和信道均衡等。

将谱估计和自适应滤波结合成书似无先例。这首先是由于我们课程的安排。但这也并无什么不妥。由于两者在概念和方法上有许多相通之处，放在一起来教学至少可收提高效率之利。

本书对其两个主题的讨论均在不失重点的前提下有一定的复盖面，以便于那些求实用的读者掌握主要的概念和方法，也使那些有深入钻研兴趣的读者能够获得较多的启发。为了区别基本的和扩展性的内容，在那些属于扩展性内容各节的标题上加有“*”号。

本书各章（除第六章外）均附有习题和计算机作业。这些习题和作业对于理解和掌握本书的内容很有帮助。

本书中外国人名除有通用中译的如傅立叶，维纳等外皆用英文。

研究生李文彪，谢刚等为本书提供了一些计算结果，蒋丽敏准备了全部附图。谨致谢意。

清华大学边肇祺教授审阅了全书，并且提出了一些十分宝贵的意见。在此谨表衷心的感谢！

本书不免有错误，疏漏和不妥之处。作者期待着专家们和读者的批评指正。

者

九月

目　录

第三章 估计的基本理论

第四章 古典谱估计：周期图分析

第五章 现代谱估计

第六章 正弦和指数信号检测

第七章 最小均方误差(*LMS*)自适应滤波器

第八章　递推最小二乘(*RLS*)自适应滤波器

第一章　平稳过程的基本概念

在这一章里，我们将简要地讨论平稳随机过程理论中与本书内容密切相关的一些概念和结论，包括平稳性，平稳过程的二阶统计性质即自协方差函数和作为谱分析核心概念的功率谱密度函数以及两者的联系一维纳-辛钦关系等，我们将引入平稳过程的谱表示，并将这一概念应用于平稳过程的线性变换和采样的讨论中。对于那些具有随机过程基本知识的读者来说，这些内容的大部分不过是一些复习，小部分则可能是一种扩展。

1·1　随机过程

随机过程$\{X(t)\}$是一族随机变量注，其中不同的成员以它们所对应的参量t之值而互相区别，t属于一给定的集合T。物理上，t常常表示时间。一般地，T是实轴R^1，但也常为其子集$0\leqslant t\leqslant\infty$，有时也可为一有限间隔$a\leqslant t\leqslant b$。近年来，由于数字计算机在随机信号处理中的广泛应用，人们对T为离散时间即$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$的随机过程特别感兴趣。我们将随机过程的定义陈述如下

定义1·1·1　随机过程$\{X(t)\}$是一族以参量t为标志的随机变量，t属于某一给定的集合T。

定义1·1·2　如果t取某一范围（有限或无限）内的实数值即$T\subseteq R^1$，则称$\{X(t)\}$为连续参量过程并记作$\{X(t):t\in T\}$。如果t取一组离散实数值，典型的情形是$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$，则称$\{X(t)\}$为离散参量过程并记作$\{X_t:t=0,\ \pm1,\pm2,\cdots\}$。

随机过程也称为随机函数。离散参量过程常被称为随机序列或时间序列。

对于任意确定的t，$X(t)$（或X_t）是一个随机变量；在每一次试验中，人们可观察到$X(t)$（或X_t）的一个不同的值。因此，随机过程$\{X(t)\}$（或$\{X_t\}$）的某一观测记录只不过是它的所有可能观测结果中的一种。这所有可能观测结果的集合称为“集”，而每一特定的观测记录称为过程的一个实现或样本函数。

1·2　随机过程的概率描述

随机过程既然是一族随机变量，描述随机过程的方法基本上便是那些描述随机变量的方法的适当推广。

有限维分布函数

对于任意的$t_1\in T$，随机变量$X(t_1)$的分布函数为

注　如无特别的说明，本书中的随机变量均指连续随机变量

$$F(x_1;t_1) \triangleq P\{x(t_1) \leqslant x_1\} \tag{1·2·1}$$

这一函数描述每一时刻$X(t)$的概率性质。然而，为了研究过程在两个不同时间点t_1和t_2上的联合变化，人们需要知道随机变量$X(t_1)$和$X(t_2)$的联合分布函数

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) \triangleq P\{X(t_1) \leqslant x_1, X(t_2) \leqslant x_2\} \tag{1·2·2}$$

$F(x_1;t_1)$和$F(x_1,x_2;t_1,t_2)$分别称为随机过程$\{X(t)\}$的一维和二维分布函数。

一般地，对于任意的正整数n以及任意的一组时间点$t_1,\cdots,t_n \in T$，函数

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) \triangleq P\{X(t_1) \leqslant x_1,\cdots,X(t_n) \leqslant x_n\} \tag{1·2·3}$$

称为$\{X(t)\}$的n维分布函数。

从多变量概率分布的一般性质，可以推出n维分布函数具有下列两个基本性质。

对称性　对于$(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，

$$F(x_{i_1},\cdots,x_{i_n};t_{i_1},\cdots,t_{i_n}) = F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) \tag{1·2·4}$$

相容性　对于任意的$m<n$，

$$F(x_1,\cdots,x_m;t_1,\cdots,t_m) = F(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty;t_1,\cdots,t_n) \tag{1·2·5}$$

由有限维分布函数，可以通过微分得到有限维概率密度函数

$$f(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n) = \frac{\partial^n F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)}{\partial x_1,\cdots,\partial x_n} \tag{1·2·6}$$

如同随机变量的概率性质被其分布函数所确定，在一般条件下随机过程$\{X(t)\}$的概率性质被其整个有限维分布函数族

$$F \triangleq \{F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n): n \geqslant 1, t_1,\cdots,t_n \in T\} \tag{1·2·7}$$

所确定。也就是说，如果有了$\{X(t)\}$的有限维分布族F，那么至少在原理上人们就有了足够的信息，可赖以确定与此过程相关的任何事件的概率。

一个随机过程，如果它的所有有限维分布都是正态的，就称高斯过程。

矩函数

对于随机过程$\{X(t)\}$，基于其有限维分布，可以定义矩函数如下。对于一维分布，均值和方差定义为

$$\mu(t) \triangleq E[X(t)] \tag{1·2·8}$$

和

$$\sigma^2(t) \triangleq E[(X(t)-\mu(t))^2] \tag{1·2·9}$$

它们一般都是t的函数。对于二维分布，协方差函数定义为

$$R(t_1,t_2) \triangleq E[(X(t_1)-\mu(t_1))(X(t_2)-\mu(t_2))^*] \tag{1·2·10}$$

（式中＊号表示共轭）。一般地，对于n维分布，可以定义n维协方差矩阵

$$\{R(t_i,t_j)\} \triangleq \{E[(X(t_i)-\mu(t_i))(X(t_j)-\mu(t_j))^*]\}$$
$$i,j=1,\cdots,n \tag{1·2·11}$$

人们还可以定义高阶（联合）矩函数，例如，对于n维分布，

$$E[(X(t_1))^{m_1}\cdots(X(t_n))^{m_n}],\quad m_1+\cdots+m_n \leqslant n \tag{1·2·12}$$

对于高斯过程，一阶和二阶矩函数总是存在的，而且高斯过程被其均值和协方差函数所确定。

例1　设　$$X(t) = X_0 + Vt$$

其中X_0和V为互相独立的$N(0,1)$实值机变量。则其均值和协方差函数分别为

$$\mu(t)=E[X_0+Vt]=E[X_0]+tE[V_0]=0\ ,$$

$$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=E[(X_0+Vt_1)(X_0+Vt_2)]$$
$$=E[X_0^2]+E[V^2]t_1t_2=1+t_1t_2$$

因为X_0和V皆为正态分布，$X(t)$是高斯过程。它所有的密度函数决定于 均 值 函数$\mu(t)$和协方差函数$R(t_1,t_2)$。由于

$$\sigma^2(t)=1+t^2\ ,$$

一维密度函数为 $$f(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1+t^2)}}\exp\left[-\frac{x^2}{2(1+t^2)}\right]$$

n维密度函数是一均值为零，协方差矩阵为

$$\{R(t_i,t_j)\}=\{1+t_1t_2\},\quad i,j=1,\cdots,n$$

的高斯密度函数。

例2 设 $$X_t=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{j\omega_k t},\quad t=0,\pm1,\cdots,$$

式中$\{\omega_k;k=1,\cdots,N\}$为实常数，$\{A_k;k=1,\cdots,N\}$是彼此独立，具有$N(0,\sigma_k^2)$ 分布的随机变量。这是一复过程，其均值和协方差函数计算如下：

$$\mu(t)=E[X_t]=0\ ,$$

$$R(t_1,t_2)=E[X_{t_1}X_{t_2}^*]=E\left[\sum_{k=1}^{N}A_k e^{j\omega_k t_1}\sum_{i=1}^{N}A_i e^{-j\omega_i t_2}\right]$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}E[A_kA_i]e^{j(\omega_k t_1-\omega_i t_2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1-t_2)}$$

以上从第三个到第四个等式用到了A_k的独立性。可以看到，$R(t_1,t_2)$只依赖于t_1与t_2之差而不依赖于它们本身。

1·3 二阶矩过程

一般仅定义为一族随机变量而不作任何其他限制的随机过程的研究，是极其困难的。迄今为止，随机过程论主要是沿着对一些特殊的随机过程的研究发展的，其中最主要的是二阶矩过程和马尔可夫(Markov)过程。本书并不涉及马尔可夫过程，因此这里只简要地复习二阶矩过程的一些基本概念。

一个随机过程$\{X(t)\}$，如果对于所有的$t\in T$其均值和方差都存在，就称为二阶矩过程。

特别，高斯过程属于二阶矩过程，并且是二阶矩过程的一个最重要的子类。

容易证明，二阶矩过程$\{X(t)\}$的协方差函数$R(t_1,t_2)$对于所有的t_1，$t_2\in T$存在。事实上，由施瓦兹(Schwarz)不等式有

$$[R(t_1,t_2)]^2=\{E[(X(t_1)-\mu(t_1))(X(t_2)-\mu(t_2))^*]\}^2$$

$$\leqslant E[|X(t_1)-\mu(t_1)|^2]E[|X(t_2)-\mu(t_2)|^2]$$

依定义，上式右方存在，故左方必存在。

协方差函数是二阶矩过程概率性质的一个重要特征。特别，对于高斯过程，协方差函数和均值函数一起完全确定过程的概率性质。

在工程上，协方差函数被称为自协方差函数。有时人们也应用所谓自相关函数$C(t_1,t_2)$，其定义为

$$C(t_1,t_2)\triangleq E[X(t_1)X^*(t_2)] \tag{1·3·1}$$

自协方差和自相关函数通过下式互相联系：

$$R(t_1,t_2)=C(t_1,t_2)-\mu(t_1)\mu^*(t_2) \tag{1·3·2}$$

对于二阶矩过程，均值函数恒存在。因此，若有具有非零均值$\mu(t)$的二阶矩过程$X(t)$，我们总是可以构造一个新过程

$$X_1(t)=X(t)-\mu(t)\ ,$$

它具有零均值且和$X(t)$具有相同的自协方差函数。这意味着，在讨论二阶矩过程时，我们可以考虑零均值过程而不丧失一般性。

二阶矩过程的自协方差函数具有下述两个重要性质。

定理1·3·1 二阶矩过程$\{X(t)\}$的自协方差函数$R(t_1,t_2)$具有Hamilton性质，即

$$R(t_1,t_2)=R^*(t_2,t_1) \tag{1·3·3}$$

证明 不失一般性，可设$\mu(t)=0$。则有

$$R^*(t_2,t_1)=\{E[X(t_2)X^*(t_1)]\}^*=E[X(t_1)X^*(t_2)]=R(t_1,t_2)$$

定理1·3·2 二阶矩过程的自协方差函数$R(t_1,t_2)$是正半定的，即对任意的$t_1,\cdots,t_n\in T$和任意的普通函数$\theta(t)$，$t\in T$（或n个任意的复常数$\theta_1,\cdots,\theta_n$）有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R(t_j,t_k)\theta(t_j)\theta^*(t_k)\geqslant 0 \tag{1·3·4}$$

证明

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R(t_j,t_k)\theta(t_j)\theta^*(t_k)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E[X(t_j)X^*(t_k)]\theta(t_j)\theta^*(t_k)\\
&=E\left[\left|\sum_{j=1}^{n}X(t_j)\theta(t_j)\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n}X(t_k)\theta(t_k)\right\}^*\right]\\
&=E\left[\left|\sum_{j=1}^{n}X(t_j)\theta(t_j)\right|^2\right]\\
&=var\left\{\sum_{j=1}^{n}X(t_j)\theta(t_j)\right\}\geqslant 0
\end{aligned}$$

这里$var\{U\}$表示随机变量U的方差。

事实上，定理1·3·2的逆也为真，即对于任何给定的非负定函数$R(t_1,t_2)$，$t_1,t_2\in T$，存在一个二阶矩过程$\{X(t);t\in T\}$，它的自协方差函数恰为$R(t_1,t_2)$（见，例如[5]，第一章）。

1·4 平稳性和广义平稳性

在工程应用中，最重要的随机过程是二阶矩过程的一个特殊的子类即广义平稳过程。下面是平稳性和广义平稳性的概念。

严格平稳性

定义1·4·1 随机过程$\{X(t)\}$称为完全平稳的或严格平稳的，如果其有限维分布族具有下列性质：对于所有的$\tau\in T$有

$$F(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=F(x_1,\cdots,x_n;t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau) \qquad (1·4·1)$$

严格平稳性意味着过程的统计性质或概率结构不随时间而变化。实际上，严格平稳过程对应于进入了“统计平衡”状态或“统计稳态”的物理系统中的过程。

m阶平稳性

虽然严格平稳性是一个直观和易于被人们接受的概念，实际上却很少有什么用处。这是因为，实际上人们难得能够占有一个过程的如此详尽的资料，足以断言其是否具有严格平稳性。由于这个缘故，人们引入所谓m阶平稳性的概念。

定义1·4·2 随机过程$\{X(t)\}$称为m阶平稳的，如果对于任意的$t_1,\cdots,t_n\in T$和$\tau\in T$，$\{X(t_1),\cdots,X(t_n)\}$的所有低于和等于$m(\leqslant n)$阶的联合矩存在且满足下列条件：

$$\begin{aligned}&E[(X(t_1))^{m_1}(X(t_2))^{m_2}\cdots(X(t_n))^{m_n}]\\&=E[(X(t_1+\tau))^{m_1}(X(t_2+\tau))^{m_2}\cdots(X(t_n+\tau))^{m_n}],\end{aligned} \qquad (1·4·2)$$

式中$m_1,m_2,\cdots,m_n$为正整数且

$$m_1+m_2+\cdots+m_n\leqslant m$$

显然，m阶平稳性是比严格平稳性较为宽松的条件。不过它们具有大体上相同的物理含义，即它们都反映物理系统的统计平衡性质。

广义平稳性

对于二阶矩过程来说，只有一阶和二阶矩是保证存在的，因此只能谈到二阶平稳性。对于$m=2$的情形，定义1·4·2变为

定义1·4·3 随机过程$\{X(t)\}$称为二阶平稳或广义平稳的，如果(a)均值函数$E[X(t)]=\mu$是一与t无关的常数；(b)自协方差函数$R(t_1,t_2)$，$t_1,t_2\in T$，只是$\tau\triangleq t_1-t_2$的函数而与t_1,t_2无关，

$$R(t_1,t_2)\triangleq E[(X(t_1)-\mu)(X(t_2)-\mu)^*]=R(t_1-t_2); \qquad (1·4·3)$$

特别，方差函数是一常数，

$$var\{X(t)\}=E[|X(t)-\mu|^2]=R(0)=\sigma^2 \qquad (1·4·4)$$

广义平稳性看起来是比严格平稳性宽松得太多的条件，实际上有其独特的重要性和合理性。这首先是因为，过程的功率-频率结构只决定于二阶统计（见下一节的讨论）。其次，对于理论上和实际上最为重要的高斯过程，严格平稳性和广义平稳性是一致的。

在本书中，除了自适应滤波部分以外，我们只讨论广义平稳过程。以后我们就用“平

稳”一词来指广义平稳性，除非另有说明。

平稳过程的自协方差函数$R(\tau)$具有下列性质：

(a) Hamilton性质，即 $$R^*(-\tau)=R(\tau) \tag{1·4·5}$$

特别，对于实过程有 $$R(-\tau)=R(\tau) \tag{1·4·6}$$

即$R(\tau)$是τ的偶函数。

(b) 正半定性

(c) $|R(\tau)|\leqslant\sigma^2=R(0)$—方差是自协方差函数的一个上界。这一事实可通过下列不等式得到证明：$$E[|X(t)-X(t-\tau)|^2]\geqslant 0$$

人们有时采用归一化自协方差函数

$$\rho(\tau)=\frac{R(\tau)}{R(0)} \tag{1·4·7}$$

从$R(\tau)$的性质，可知$\rho(\tau)$具有如下的性质：

(a) $\rho(\tau)=\rho^*(-\tau)$；

(b) 正半定性；

(c) $|\rho(\tau)|\leqslant\rho(0)=1$。

1·5 功率谱密度函数

如所周知，对于确定性信号，人们利用傅立叶变换建立了两种相辅相成的分析方法，即时域和频域分析。对于平稳随机过程，人们也建立了类似的时域和频域分析方法。但是和确定性信号不同，随机过程的任一实现$X(t)$并不满足绝对可积（可加）或平方可积（可加）的条件，因而通常形式的傅立叶变换不能直接施用于$X(t)$。因此，平稳过程的频域分析须借助于过程的适当表示形式进行。功率谱密度函数是平稳过程二阶统计性质的频域表示，它在平稳过程的分析中起着形式上如同信号频谱在确定性信号分析中所起的那样的作用。下面说明功率谱密度函数的概念。

1·5·1 连续参量过程

让我们先说明本书中所用傅立叶变换的形式。

傅立叶变换

设连续参量函数$f(t)$满足绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$

则$f(t)$的傅立叶变换为 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1·5·1}$$

同时$F(\omega)$的傅立叶反变换给出$f(t)$，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{1·5·2}$$

我们有Parseval定理，
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{1·5·3}$$

功率谱密度函数

连续参量平稳过程$\{X(t):t\in T\}$的功率谱密度函数P(ω)定义为

$$P(\omega)\triangleq\lim_{T\to\infty}\left\{E\left[\frac{|G_T(\omega)|^2}{2T}\right]\right\}, \tag{1·5·4}$$

式中
$$G_T(\omega)=\int_{-T}^{T}X(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1·5·5}$$

即$G_T(\omega)$是过程的某一实现在（$-T,T$）上的那一区段的傅立叶变换。由Parseval定理有

$$\int_{-T}^{T}|X(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|G_T(\omega)|^2\mathrm{d}\omega \tag{1·5·6}$$

因此，
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|X(t)|^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|G_T(\omega)|^2}{2T}\mathrm{d}\omega \tag{1·5·7}$$

上式左方是$X(t)$的平均功率。因此，量

$$\frac{1}{2\pi}\ \frac{|G_T(\omega)|^2}{2T}\mathrm{d}\omega$$

可以解释为$X(t)$中那些频率在ω和$\omega+\mathrm{d}\omega$之间的分量对于平均功率的贡献。那么，由定义（1·5·4），量

$$\frac{1}{2\pi}P(\omega)\mathrm{d}\omega$$

是此种贡献的集平均值。因此，$P(\omega)/2\pi$可解释为过程$X(t)$的功率（对于频率分布的）密度的集平均值。这就说明了功率谱密度函数这一名词的物理含义。

功率谱密度函数可简称为功率谱或谱密度。

维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)关系

可以证明，功率谱密度函数$P(\omega)$等于自协方差函数$R(\tau)$的傅立叶变换。这一结论就是著名的维纳-辛钦关系。我们将它陈述为下面的定理。

定理1·5·1 设$\{X(t)\}$是零均值平稳过程，且其自协方差函数$R(\tau)$绝对可积，则$\{X(t)\}$的功率谱密度函数$P(\omega)$等于$R(\tau)$的傅立叶变换，

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau \tag{1·5·8}$$

我们略去定理的证明（证明可见，例如[2]，第四章）。

由上述定理以及傅立叶变换的唯一性，我们立刻得到

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\omega \tag{1·5·9}$$

因此，功率谱密度函数$P(\omega)$和自协方差函数$R(\tau)$构成一傅立叶变换对，它们互为频域和时域内的对应物，包含着过程$\{X(t)\}$的同样的二阶统计信息。

对于实过程，$R(\tau)$的偶对称性意味着$P(\omega)$为偶函数，

$$P(\omega)=P(-\omega) \tag{1·5·10}$$

因此，式（1·5·8）和（1·5·9）可以写作

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau \tag{1·5·11}$$

和
$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega \tag{1·5·12}$$

在式（1·5·9）中令$\tau=0$得

$$\sigma^2=R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{1·5·13}$$

方差σ^2就是过程的平均功率

从上面的讨论，可以列出谱密度函数$P(\omega)$的一般性质如下：

（a）由定义（1·5·4）或$R(\tau)$的Hamilton性质知$P(\omega)\geqslant 0$，即$P(\omega)$为非负实函数；

（b）$\sigma^2=R(0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ；

（c）对于实过程，$P(\omega)$具有偶对称性即$P(-\omega)=P(\omega)$。

归一化功率谱

归一化功率谱密度定义为
$$f(\omega)\triangleq\frac{P(\omega)}{2\pi\sigma^2} \tag{1·5·14}$$

（用平均功率σ^2作功率密度的归一化因子是很自然的。）由式（1·5·8和1·5·9）以及式（1·4·7）可得

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{1·5·15}$$

和
$$\rho(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega \tag{1·5·16}$$

由$P(\omega)$的性质可以推出$f(\omega)$的性质如下：

（a）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\,\mathrm{d}\omega=1$ ；

（b）对所有的ω有$f(\omega)\geqslant 0$ ；

（c）对实过程$f(-\omega)=f(\omega)$ 。

积分谱

积分谱$S(\omega)$定义为
$$S(\omega)\triangleq\int_{-\infty}^{\omega}P(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{1·5·17}$$

因此有
$$P(\omega)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}S(\omega) \tag{1·5·18}$$

由于$P(\omega)$非负，$S(\omega)$是非负而且非降的，即对$\omega_2>\omega_1$有$S(\omega_2)>S(\omega_1)$。

与归一化谱密度$f(\omega)$相对应，可定义归一化积分谱

$$F(\omega)\triangleq\int_{-\infty}^{\omega}f(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{1·5·19}$$