高等学校教学用書

学分析原理

第二卷 第一分册

格·馬·菲赫金哥尔茨著

丁寿田 譯

人民教育出版社

高等学校教学用书

数学分析原理

第二卷　第一分册

格·馬·菲赫金哥尔茨著
丁寿田　譯

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社(Государственно издательство технико-теоретической литературы)出版的菲赫金哥尔茨(Г. М. Фихтенголц)著“数学分析原理”(Основы математического анализа)第二卷1957年第二版譯出。原书經苏联高等教育部审定为綜合大学数学力学系和数学物理系教科书,师范学院数学物理系数学参考书。

全书共二卷。第二卷中譯本分二分册出版。第一分册的內容是:級数,非正常积分,带参变数的积分以及隐函数与函数行列式。

簡装本說明

目前850×1168毫米規格紙張較少,本书暫以787×1092毫米規格紙張印刷,定价相应减少20%。希鉴諒。

数学分析原理

第二卷 第一分册

格·馬·菲赫金哥尔茨著

丁寿田譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

京华印书局印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

統一书号K13010·1057 开本787×1092 1/32 印张 7

字数172,000 印数0,001—8,000 定价(6)¥0.55

1962年5月第1版 1962年5月北京第1次印刷

第二卷第一分册目录

第十五章　数項級数

§1. 导引

234. 基本概念　設給了一个无穷数(序)列

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

由这些数所組成的記号

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{2}$$

叫做一个无穷級数(或簡称級数),而 (1) 中各数則称为級数之項。(2)也常常利用总和号写成这样:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{2a}$$

这里序号 n 历取 1 至∞一切整数値①。

我們来把級数的項逐一相加而組成这些和(和的个数无穷):

$$\left.\begin{array}{c} A_1=a_1,\ A_2=a_1+a_2,\ \ A_3=a_1+a_2+a_3, \\ \cdots,\ A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \cdots; \end{array}\right\} \tag{3}$$

并称其为級数的部分和或級数节。这个部分和序列 $\{A_n\}$ 我們将恒与級数(2)并列:記号(2)的作用也就在表明該序列的产生。

級数(2)的部分和 A_n 在 $n\to\infty$ 时的有限或无限极限

$$A=\lim A_n$$

就叫做該級数之和而写成

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

如此使記号(2)或 (2a) 具有了数的意义。如果一个級数具有有限

---

① 但級数項的下标,也可不由 1 开始,而由 0 或任何大于 1 的自然数开始有时更为方便。

的和，则称其为收斂級数，反之（即和等于 $\pm\infty$ 或根本沒有和时），则称其为发散級数。

如此，級数(2)的收斂性問題按定义就等价于序列(3)的有限极限存在問題。反之，任意取一个序列

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\cdots,\quad x_n,\cdots,$$

則其有限极限存在問題可以化为

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})+\cdots, \qquad (4)$$

这样一个級数的收斂性問題，它的部分和恰好就是該序列之項。此时級数之和与序列之极限合而为一。

換句話說，无穷級数及其和的研究就是序列及其极限的研究的一种新的形式。但这种形式，讀者可以从以后的叙述中看出，无論在确定极限的存在还是在計算极限时都表现难以估計的优点。因此无穷級数在数学分析及其应用中成为一种重要的研究工具。

例 1) 无穷級数的一个极簡单的例子乃是(讀者所熟悉的)几何級数：

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

它的部分和($q\neq1$ 时)是

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

如果几何級数的公比 q 的絕对值小于 1，則[如我們所知，30 段 6)] s_n 有有限极限

$$s=\frac{a}{1-q},$$

即該級数收斂而 s 是它的和。

在 $|q|\geqslant1$ 时該几何級数給我們一个发散級数的例子。如果 $q\geqslant1$，則其和将成 $+\infty$ 或 $-\infty$（視 a 的正負号而定）；在其他情形則和根本不存在。我們指出一个有趣的級数，它在 $a=1$，$q=-1$ 时得出：

$$1-1+1-1+\cdots\equiv1+(-1)+1+(-1)+\cdots ①$$

① 如果級数某項 a 为負数：$a=-b(b>0)$，則将 $\cdots+(-b)+\cdots$ 写成 $\cdots-b+\cdots$。但要注意，在此級数該項仍为 $-b$ 而不是 b。

其部分和交錯着等于 1 或 0。

2）不难确定級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

是发散的，事实上，級数的項虽遞減而其第 n 个部分和

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

則随 n 而增至无穷。

3）最后，我們給出一个值得一提的例子，它由变数

$$y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

得出，我們在 49 段已經指出这个变数趋于超越数 e。也就是說，e 是下面无穷級数之和：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

回忆 49 段所講 e 的近似計算，从这个例子，讀者可以看出継續导入越来越小的校正数的好处，这种好处就在于这些校正数是把用部分和数的形式表示出的 e 的近似値来逐步地加以改进。

235. 簡单定理 如果在級数(2)里舍去前 m 項，則得一級数：

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n, \tag{5}$$

称为級数(2) m 項后的余項。

1°. 如果級数(2)收斂，則其任何余項(5)也收斂；反之，由余項(5)的收斂也可推出原級数(2)的收斂。

我們固定 m 并以 A'_k 表示級数(5)的第 k 部分和：

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}.$$

于是显然有

$$A'_k=A_{m+k}-A_m. \tag{6}$$

如果級数(2)收斂而 $A_n \to A$, 則在 k 无限增大时对和 A'_k 也存在有一个有限极限

$$A' = A - A_m \tag{7}$$

这就表示級数(5)是收斂的。

反之，如果給出了級数(5)是收斂的而 $A'_k \to A'$，則令 $k = n - m$($n > m$ 时)而改写等式(6)为:

$$A_n = A_m + A'_{n-m};$$

由此可以看出，在 n 无限增大时，部分和 A_n 有极限

$$A = A_m + A', \tag{8}$$

即級数(2)收斂。

換句話說，在一个級数的开头舍弃其有限多項或添补一些新項，都不会影响該級数的性質(指其收斂性或发散性而言)。

如果級数(5)收斂的話，我們将其和的記号 A' 改用 α_m 来表示，如此可以在記号上表現出余項是由哪一項以后所取的。于是公式(8)和(7)可改写如下:

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \tag{9}$$

如果 m 增至无穷，則 $A_m \to A$ 而 $\alpha_m \to 0$。如此:

2°. 若級数(2)收斂，則其第 m 項后余項之和 α_m 随 m 的增大而趋于 0。

我們提一提收斂級数的一些簡单性質:

3°. 如果收斂級数各項乘以同一倍数 c，則級数仍保持其收斂性，而其和則乘以 c。

事实上，級数

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

的部分和 $\bar{A}_n$ 显然等于

$$\bar{A}_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cA_n$$

而有极限 cA。

4°. 两个收斂級数

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

与

$$B=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

可逐項施行加或減，所得級数

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)+\cdots$$

也收斂，而其和各等于 $A\pm B$。

如果 A_n,B_n 及 C_n 表示上述各級数之部分和，則显然有

$$C_n=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)=A_n\pm B_n.$$

取极限得

$$\lim C_n=\lim A_n\pm\lim B_n,$$

这就証明了我們的断言。

最后，我們注意：

5°. 收斂級数的公項 a_n 必趋于 0。

这可以用很初等的方法来証明：既然 A_n 有（因而A_{n-1}也有）有限极限 A，則

$$a_n=A_n-A_{n-1}\to 0.$$

上述命題包含了級数收斂的必要条件，今后常常要用到它。这个条件如不成立，則級数必定发散。但是要注意，这条件对于級数的收斂性是不充分的。換句話說，即使实現了这个条件，級数还是可以发散。級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

就是一个例子［这是 **234** 段 2)討論过的］；讀者以后还可找到許多这类例子。

§2. 正項級数的收斂性

236. 正項級数收斂性条件 現在我們来解决如何判定級数收斂或发散的問題。对于非負項的級数这个問題最容易解决；为簡单起見这种級数我們将簡称为正項級数。

設

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

是一个正項級数，卽 $a_n \geqslant 0 (n=1,2,3,\cdots)$. 于是显然有

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

也就是說，A_n 是 n 的上升函数。回忆一下单調函数的极限定理[44 段]，我們立卽得出下列关于正項級数的基本定理：

定理. 正項級数(A)必有和；此和在其部分和有上界时是有限的(因此該級数也就收斂)；在相反的情形則該和是无限的(从而級数发散)。

正項級数的所有实用的收斂和发散檢驗法归根到底全都建立在这个簡单定理上。但只在很少的情形下能直接应用它来判断級数的性質。我們来举几个这种例子。

1) 試看級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

它就是所謂調和級数①

显然我們有不等式：

① 由第二項起，每項都是两个相邻項的調和平均数。所謂 c 是 a 与 b 的調和平均数乃指它們之間有如下关系：

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}. \tag{1}$$

如果将該調和級数由第二項起依次分段,每段依次为 2、4、8、… 項:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{15}}_{2^3};\cdots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}}_{2^{k-1}};\quad \cdots,$$

則每段之和都将大于$\frac{1}{2}$; 这只要在(1)中依次令 $n=2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}, \cdots$ 就可明白。我們以 H_n 表示調和級数的第 n 个部分和; 于是显然

$$H_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2}.$$

可見部分和无上界,故該級数有无限和。

我們还在此提一下, H_n 随着 n 的增大而非常迟緩地增大。例如欧拉曾算过,

$$H_{1000}=7.48\cdots,\quad H_{1000000}=14.39\cdots,\ \text{等等。}$$

以后我們还有机会对和 H_n 的增長情況作更精确的描述 [238 段, 4)]。

2) 現在我們来看更一般的級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

这里 s 是任意的实数; 它包含前一級数为其特例($s=1$ 时)。

由于它与級数(1)相似,故也称为調和級数。

既然在 $s<1$ 时該級数每項都大于級数(1)的相应項,則在这情形部分和也当然沒有上界,所以該級数发散。

現在我們来看 $s>1$ 的情形; 为便利起見令 $s=1+\sigma$, 而 $\sigma>0$。与(1)相似,我們这回有

$$\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^s}<n\cdot\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}. \tag{2}$$

也如前例将級数各項依次分段:

$$\underbrace{\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}}_{2},\quad \underbrace{\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{8^s}+\cdots+\frac{1}{15^s}}_{2^3};\quad \cdots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1})^s}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^s}}_{2^{k-1}};\ \cdots,$$

由(2)不难証明,这些和各小于下列几何級数的相应項:

$$\frac{1}{2^\sigma},\ \frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{2^{2\sigma}},\ \frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{2^{3\sigma}},\ \cdots,\ \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma}=\frac{1}{2^{(k-1)\sigma}},\ \cdots$$

在这情形显然,无論取該級数的哪一个部分和,它总小于常数

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^\sigma}},$$

所以該級数收斂。

237. 級数比較定理 正項級数的收斂性或发散性常常可以跟另一个已知收斂或发散的級数的对比来确定。这种比較法以下列簡单定理为基础。

定理 1. 設給了两个正項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{A}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \tag{B}$$

如果由某項起(比方說对 $n>N$)不等式$a_n \leqslant b_n$成立,則由級数 (B) 的收斂性可推出級数 (A) 的收斂性,或者这是同一回事—由級数 (A) 的发散性可推出級数 (B) 的发散性。

証明 因为舍弃級数的开头有限多項并不影响級数性質[235 段 1°],我們不妨認为对 $n=1,2,3,\cdots$ 的一切值,恒有 $a_n \leqslant b_n$ 而不減弱問題的一般性。設 A_n 及 B_n 各表示級数(A)及(B)的部分和,如此有

$$A_n \leqslant B_n.$$

設級数(B)收斂;于是按 236 段的基本定理知道和数 B_n 有界:

$$B_n \leqslant L(L\text{为常数}; n=1,2,3,\cdots).$$

由前一不等式更不成問題有

$$A_n \leqslant L,$$

而这按同一定理就表示級数(A)是收斂的。

有时在实践上比較方便的是下面这个定理，它是由前一定理导出的:

定理 2. 如果极限

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K^{①} \quad (0 \leqslant K \leqslant \infty),$$

存在则在 $K<\infty$ 时由級数 (B) 的收斂性可推知級数(A)的收斂性，而在 $K>0$ 时由級数(B) 的发散性可推知級数 (A)的发散性[如此，在 $0<K<\infty$ 时两級数同时收斂或同时发散]。

証明　設級数(B)收斂而$K<\infty$. 取一任意的数 $\varepsilon>0$, 按极限的定义，对充分大的 n 我們将有

$$\frac{a_n}{b_n} < K+\varepsilon, \text{由此有 } a_n < (K+\varepsilon) b_n.$$

由 **235** 段 3° 知道，旣然級数(B)收斂，則逐項乘以 $K+\varepsilon$ 所得出的級数 $\Sigma(K+\varepsilon)b_n$ 也就收斂。由此按前一定理推知級数(A)收斂。

如果級数(B)发散幷且 $K>0$, 则在这情形反比 $\frac{b_n}{a_n}$ 有有限极限；級数(A)应該发散，因为，倘若它收斂，則按剛才所証，級数(B)也就該收斂了。

最后，我們还講一个比較定理，它也是第一个定理的推論。

定理 3. 如果由級数某項起(比方說对于 $n>N$) 不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}{}^{②}, \tag{3}$$

① 我們在此假設 $b_n \neq 0$。

② 在此 a_n 及 b_n 当然假設都异于 0。

成立，則由級数(B)的收斂性可推知級数(A)的收斂性，或者——这是同一回事——由級数(A)的发散性可推知級数(B)的发散性。

証明　如上面証明定理 1 时一样，可認为不等式(3)对 $n=1, 2, 3, \cdots$ 的一切値都成立而不致減弱問題的一般性。在这情形我們有

$$\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{b_2}{b_1},\quad \frac{a_3}{a_2}\leqslant\frac{b_3}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

把这些不等式两边都乘起来，得

$$\frac{a_n}{a_1}\leqslant\frac{b_n}{b_1}\text{或}\ a_n\leqslant\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n(n=1,2,3,\cdots).$$

設級数(B)收斂；則逐項乘以因数 $\frac{a_1}{b_1}$ 所得的級数 $\Sigma\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n$ 也收斂。而此时級数(A)按定理 1 也就收斂了，这就是所求証的。

現在我們举几个直接应用比較定理来确定級数收斂性或发散性的例子。

238. **例**　1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 收斂，因为

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}<\frac{1}{2^n}$$

(定理 1)。

2) 与調和級数[236 段]比較可以决定許多級数是否收斂。按定理 1:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收斂：$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}}$；

(б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$　$(p>0)$ 发散：对充分大的 n $(\ln n)^p<n$；

(в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收斂：对充分大的 n $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$.

3) 按定理 2:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}(0<x<\pi)$发散: $\sin\frac{x}{n}:\frac{1}{n}\to x$;

同样,下面两个級数也发散:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)(x>0),\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)(a>1);$$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$收斂: $\left(1-\cos\frac{x}{n}\right):\frac{1}{n^2}\to\frac{x^2}{2}$.

4) 最后,我們来看級数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right).$$

用微分学方法不难建立不等式:

$$\ln(1+x)<x \quad (x\neq 0,\ -1<x<\infty).$$

利用它我們可写:

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

同时

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

所以

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$$

如此,該級数是正項級数并且各项均小于收斂級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$[236 段]的相应項,所以它是收斂的。

如果以C表示其和, 則部分和

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right)=H_n-\ln(n+1)\to C$$