

数值天气预报

张玉玲 吴辉碁 王晓林 编著

科学出版社

数值天气预报

张玉玲 吴辉碗 王晓林 编著

科学出版社

内 容 简 介

本书系统地总结了数值天气预报的基本原理、网格模式和谱模式的设计,凝结、边界层效应、辐射等物理因子的考虑以及气象要素场客观分析等方面的内容。本书介绍了七十年代以来国内外数值天气预报的新进展。在各部分内容中既介绍了各种问题的计算方法,也注意对物理实质的阐述。

本书可作为大专院校气象专业的教学参考书,也可供气象科技工作者阅读。

数 值 天 气 预 报

张玉玲 吴辉碇 王晓林 编著

责任编辑 许贻刚

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中 国 科 学 院 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986年7月第一版 开本:850×1168 1/32
1986年7月第一次印刷 印张:15
印数:0001—3,000 字数:396,000

统一书号:13031·3209

本社书号:4881·13—15

定 价: 4.50 元

序

五十年代以来,建立在气象学、流体动力学和数学紧密结合基础上的数值天气预报得到了突飞猛进的发展。从最初的准地转模式预报到原始方程模式的试验成功,只不过经历了短短的十年。原始方程模式的使用使数值天气预报进入了一个新的发展阶段,到七十年代初用原始方程模式做业务预报的国家已经比较普遍了。

我国数值预报的研究工作开始也比较早。1955年在没有电子计算机的条件下用图解法做出了准地转两层模式的500毫巴24小时预报。在我国104电子计算机研制成功之后,中央气象台于1965年春开始发布500毫巴预报。1974年开始用原始方程制作预报。最近几年,已经建立起一个从接收资料、填图分析到输出预报结果的自动化、客观化的预报系统,北京气象中心于1982年2月正式发布五层原始方程模式北半球预报,1983年8月开始发布36小时降水预报。

为了使气象工作在今后的社会主义四化建设中作出新的贡献,天气预报必须走客观定量的道路。为此要综合利用多种方法,在挖掘现有潜力的同时,积极发展以数值预报为指导的客观定量的预报方法,大力推广数值预报产品的使用。在这样的形势下我们编写了这本书,希望能为气象科技工作者和大专院校气象专业学生提供一本学习参考资料。

自从原始方程模式投入业务使用以来,在基本方程的求解、各种物理过程的考虑、观测资料的有效利用等方面都不断取得新的进展。由于这几方面的成就在不到二十年的时间内预报准确率有了明显提高。本书的大部分内容是介绍七十年代以来国内外数值天气预报的新进展。对于内容的阐述力求做到在介绍某些问题的

具体处理时,叙述清楚问题的物理实质。全部内容分为三大部分:第一部分是基本模式的建立(第一章至第九章),其中包括建立模式必要的理论基础和具体数值模式的设计。介绍了目前应用最多的网格法和与网格法比较具有某些优越性的谱方法。第二部分是物理因子的考虑(第十、十一、十二章)。现行的数值预报模式都包括多种物理因子,对于中短期预报来说,最重要的物理因子有水汽平衡和对流作用、行星边界层效应和辐射过程。这些过程的考虑对预报准确率的提高起着重要作用,本书将介绍一些效果比较好的方法。第三部分是客观分析和初值形成。在第十三章中首先讲述了气象要素场的统计规律,然后讨论了几种客观分析和原始方程模式的初值形成方法。在附录中介绍我国北京气象中心业务预报模式和欧洲中期天气预报中心的球面网格格点模式。

本书第二、五、七章由张玉玲和王晓林共同完成,第十章和第十三章由吴辉碇编写,其余各章由张玉玲编写。由于作者学识水平所限,书中错误在所难免,恳切欢迎读者批评指正。

目 录

第一章 基本方程组	1
§ 1 基本方程组	1
§ 2 平均运动方程	4
§ 3 球坐标系方程	7
§ 4 普遍垂直坐标变换	9
§ 5 几种不同坐标系中的基本方程组	14
§ 6 地图投影坐标方程组	27
§ 7 地图投影放大系数	32
第二章 尺度分析与预报模式	38
§ 1 无量纲方程、准地转近似和准静力近似	39
§ 2 动力方程的简化和预报模式	44
第三章 能量方程	56
§ 1 基本能量形式及能量平衡方程	56
§ 2 p 坐标系的能量方程	62
§ 3 σ 坐标系的能量方程	65
§ 4 涡度方程和散度方程的能量关系	68
第四章 大气扰动的特征	78
§ 1 混合波动解	80
§ 2 声波	85
§ 3 Lamb 波	87
§ 4 惯性重力波	89
§ 5 大气长波	94
§ 6 混合波和滤波问题	97
第五章 数值方法的若干问题	104
§ 1 差分方法	104

§ 2	线性计算稳定性	107
§ 3	差分方程的计算解	111
§ 4	有限网格下的误差	112
§ 5	非线性方程的计算稳定性	123
§ 6	时间积分格式	131
§ 7	平滑与滤波	139
第六章	过滤模式	144
§ 1	准地转模式基本方程	145
§ 2	准地转模式能量方程	147
§ 3	准地转正压模式	149
§ 4	简单斜压模式	156
§ 5	倾向的 Green 函数解——积分解	160
§ 6	平衡模式	170
第七章	正压原始方程模式	175
§ 1	正压原始方程组	176
§ 2	正压原始方程组的波动解	178
§ 3	能量方程	180
§ 4	涡度方程	183
§ 5	涡度拟能守恒与不同尺度波之间的能量转换	185
§ 6	计算稳定性条件	188
§ 7	差分格式与地转适应	190
§ 8	守恒差分格式的构造	197
§ 9	半动量格式	218
§ 10	准 Lagrange 平流格式	219
第八章	斜压原始方程模式	223
§ 1	积分关系	224
§ 2	垂直差分格式及其守恒性	230
§ 3	考虑平流层的模式	240
§ 4	地形的动力作用	244
§ 5	分离积分方法	251

第九章 全球大气模式	255
§ 1 球面网格模式	255
§ 2 解正压涡度方程的谱方法	264
§ 3 多层原始方程谱模式	274
第十章 大气边界层的处理	281
§ 1 基本方程	281
§ 2 边界层内能量平衡和转换	287
§ 3 边界层模拟中的问题	293
§ 4 数值天气预报模式中大气边界层的处理	307
第十一章 大尺度降水和积云对流参数化	324
§ 1 大尺度运动方程组	325
§ 2 大尺度凝结	328
§ 3 对流参数化方法	332
§ 4 对流调整	335
§ 5 郭晓岚参数化法	338
§ 6 Arakawa 和 Schubert 的积云与大尺度运动的相互 作用模式	342
第十二章 辐射过程	358
§ 1 辐射传递方程	359
§ 2 太阳辐射	363
§ 3 长波辐射	374
第十三章 气象要素场的客观分析与初值形成	380
§ 1 气象要素场的统计特性	381
§ 2 客观分析的几种主要方法	392
§ 3 原始方程模式的初值形成	421
附录 几个数值天气预报模式的介绍	433
§ 1 北半球五层原始方程模式	433
§ 2 细网格有限区域五层模式	441
§ 3 欧洲中期天气预报中心的球面网格模式	447

第一章 基本方程组

大气运动所遵循的基本定律有动量变化定律（牛顿第二定律）、质量守恒定律和热力学第一定律。数值天气预报就是在给定的初始条件和边界条件下通过积分描述这些定律的流体动力学-热力学方程组得到未来时刻的气象要素分布。在实际预报工作中，出于对计算的精度和简单程度等方面的考虑，方程组常采用不同坐标系和写成不同的形式。因此首先给出描述大气运动的方程组及其在常用坐标系中的各种形式。

§1 基本方程组

1.1 状态方程

在 100 公里以下大气中氧和氮的比例几乎不变。在某些情况下其它成分的变化可能是重要的，但这里除考虑水汽含量的变化，其它成分的变化都略去不计。事实上，因空气中水汽含量很小，只要不发生水汽相变，湿空气和干空气热力学差别很小。在大气温度和气压的正常变化范围内，干空气和水汽的混合气体可视为理想气体，其状态方程为

$$p = \rho RT \quad (1.1)$$

p 为气压， ρ 为密度， T 为绝对温度。海平面上大气压力的变化不超过其平均值的 10%，而温度的变化可达其平均值的 20%。在对流层中气压和密度都随高度指数降低，但温度的变化比起其本身的数值来却小得多。 R 为气体常数，对于干空气 $R_d = 287$ 焦耳/千克·度，对于湿空气 $R_w = (1 + 0.61q) R_d$ ，其中 q 为比湿。一般情况下，作为近似可以不区分 R_d 与 R_w ，但在积分静力方程计

算等压面高度时考虑水汽含量是必要的。

1.2 运动方程

对于固定的参考坐标系（惯性系统），Newton 第二定律可写成

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \mathbf{M} \quad (1.2)$$

下标 a 表示在惯性系统中观测到的量， \mathbf{V}_a 为空气质点的绝对速度， $\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt}$ 为绝对加速度。且有

$$\frac{d_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_a \cdot \nabla$$

\mathbf{M} 表示单位质量空气所受的合力。由于人们是在地球上观测大气的运动，所以采用固定在地球上的坐标系为参考系比较方便。固定在地球上的坐标系为非惯性坐标系，它的基本运动是以地转角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 旋转的转动。设 \mathbf{V}_3 为空气质点相对于地球运动的速度，则

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_3 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1.3)$$

\mathbf{r} 为以地心为原点的位置矢量。（1.3）式表明一个空气质点的绝对速度为相对于地球的相对速度 \mathbf{V}_3 和由于地球自转而产生的牵连速度之和。而绝对加速度为相对加速度、科氏加速度和向心加速度之和

$$\frac{d_a \mathbf{V}_a}{dt} = \frac{d \mathbf{V}_3}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (1.4)$$

式中 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3$ ，下标“3”均表示三维运动。

单位质量空气微团所受的力有气压梯度力 $-\frac{1}{\rho} \nabla_3 p$ ，地球引力 \mathbf{g}_a 。分子粘性力是由具有不同速度的流体层之间分子动量交换而产生的，它只在贴近地面几厘米的空气层内比较大，一般情况下都可略去不计。所以相对运动的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g}_a - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

地心引力 \mathbf{g}_a 和惯性离心力 $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 都只是坐标的函数，可合并为一个重力矢 \mathbf{g} ，因此上式也可写成

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 \quad (1.5)$$

式中 $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3$ 为科氏力。

1.3 连续方程

由质量守恒定律得到连续方程

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.6)$$

式中 $\frac{D\rho}{Dt}$ 为空气密度的个别变化， $\nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3$ 为三维速度散度。

1.4 热力学方程

热力学方程可写成

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.7)$$

或

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = \rho Q$$

c_v ， c_p 分别为等容比热和等压比热， Q 为单位质量空气的加热率。

在预报问题中对于没有产生相变的湿空气可以和干空气一样处理，上列各方程即为基本方程组。如果考虑水气的相变过程，则 Q 中包括潜热释放加热率 $-L \frac{dq}{dt}$ ， L 为凝结潜热， q 为比湿。为了考虑空气中的水汽变化，还需补充一个水汽方程。

1.5 水汽质量守恒方程

考虑一边长为 δx , δy , δz 的固定体积元, 有水汽通过六面体的边界(见图 1.1), 单位时间内体积元内净得的水汽质量为

$$-\nabla_3 \cdot (\rho_v \mathbf{V}_3) \delta x \delta y \delta z$$

ρ_v 为水汽密度。使水汽质量发生变化的还有水汽的源和汇。令 S 表示单位体积内水汽源和汇, 则水汽质量守恒方程可写成

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = -\nabla_3 \cdot \rho_v \mathbf{V}_3 + S$$

S 是由水汽的任何一种相变过程产生的。一般不用 ρ_v 作为表示

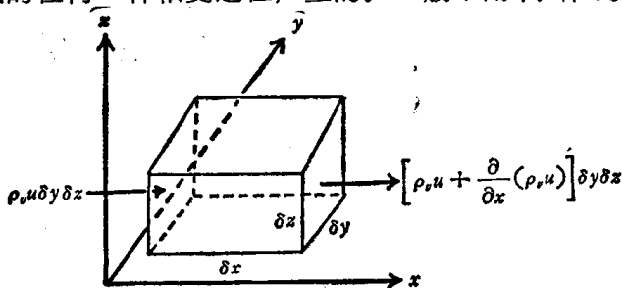


图 1.1

水汽含量的变量, 而用比湿或混合比。以 $q = \rho_v / \rho$ 代入上式得

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} = -\nabla_3 \cdot \rho q \mathbf{V}_3 + S$$

连续方程乘 q , 再与上式相减, 得到

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V}_3 \cdot \nabla_3 q = \frac{S}{\rho} \quad (1.8)$$

上式为水汽方程。所以当考虑水汽相变过程时基本方程组即为 (1.1), (1.5)–(1.8) 式。

§ 2 平均运动方程

气象学中需要研究各种尺度的大气运动, 从最小尺度的不规

则湍流运动,到最大尺度的环绕地球的纬向气流。经典的动力方程组对于广大波段范围内的运动都是适用的,但在研究某些特定的大气现象时,人们所感兴趣的只是某一定范围内的波。另一方面,由一般观测所得到的实际资料也是在一定意义下的平均值。因此动力方程组应当经过改造,使它所包含的正是可以由实际资料得到的、描述这种尺度运动的变量,而过滤掉更小尺度的运动。

物理变量对某一时间和空间间隔进行平均,可以过滤掉所有尺度小于这种时空间隔的扰动,而得到平均运动,实际运动与平均运动的偏差为扰动运动。平均运动与扰动运动的划分完全取决于时空间隔的选取,也就是说,时空间隔的大小便决定了平均运动的尺度。例如 Reynold 方程的平均量描写比湍流运动尺度大的各种运动,包括小尺度的对流运动。但如增大平均的时空间隔,也可滤去小尺度的对流运动,使平均量只描写天气尺度的运动。

为了得到有代表意义的平均值和脉动值,时空间隔要选得恰当。一般来说,它比要滤掉的运动的尺度大,同时又要比所描述的运动的尺度小。设 X 表示某一物理变量, \bar{X} 为其平均值,则 $X = \bar{X} + X'$, X' 为脉动值。如果密度 ρ 的变化主要由温度的变化而引起,且温度的变化范围又不太大,则除运动方程必须考虑密度的脉动而产生的浮力外(在扰动方程中),在其它包括密度的项中都可以认为 $\rho \approx \bar{\rho}$, $\rho' \approx 0$ 。令 $\mathbf{V}_3 = \bar{\mathbf{V}}_3 + \mathbf{V}'_3$, $T = \bar{T} + T'$, $p = \bar{p} + p'$, $q = \bar{q} + q'$, 代入方程 (1.1), (1.5) — (1.8), 并进行平均,得到平均运动的方程

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}_3}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \bar{p} + \mathbf{g} - 2\bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \bar{\mathbf{V}}_3 - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}_3 \bar{\mathbf{V}}_3) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla_3 \cdot \bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}_3 = 0 \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} c_v \frac{d\bar{T}}{dt} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot \bar{\mathbf{V}}_3 = \bar{Q} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot (\bar{\rho} c_v \bar{T}' \bar{\mathbf{V}}_3) \\ - \frac{1}{\bar{\rho}} \overline{p' \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \frac{\bar{S}}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot (\bar{\rho} \overline{q' \mathbf{V}'_3}) \quad (1.12)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \quad (1.13)$$

式中 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}}_3 \cdot \nabla_3$ 。如果取平均的时空间隔非常小，则脉动量表示湍流运动， $\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot (\bar{\rho} \overline{\mathbf{V}'_3 \mathbf{V}'_3})$ 为 Reynold 应力，它永远是消耗平均运动的能量，是一种耗散力。方程 (1.11) 和 (1.12) 中的 $-\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot (\bar{\rho} c_v \overline{T' \mathbf{V}'_3})$ 和 $-\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla_3 \cdot (\bar{\rho} \overline{q' \mathbf{V}'_3})$ 为热量和水汽的湍流输送所造成的热源(汇)和水汽源(汇)。水平湍流扩散一般很小，可略去不计。垂直扩散在大气边界层中最重要，因此以上三项只考虑其垂直扩散部分。以 \mathbf{F} 表示动量的垂直交换，为了书写方便，热量和水汽的垂直湍流交换一般合并到 \bar{Q} 和 \bar{S} 中。 $-\frac{1}{\bar{\rho}} \overline{p' \nabla \cdot \mathbf{V}'}$ 表示平均运动和脉动运动的能量交换，因气压脉动 p' 很小，这项可以略去。略去平均值符号“—”，(1.9)–(1.13) 又可写成

$$\frac{d\mathbf{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 p + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_3 + \mathbf{F} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_3 \cdot \rho \mathbf{V}_3 = 0 \quad (1.15)$$

$$c_v \frac{dT}{dt} + \frac{p}{\rho} \nabla_3 \cdot \mathbf{V}_3 = Q \quad (1.16)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{S}{\rho} \quad (1.17)$$

$$p = \rho RT \quad (1.18)$$

数值天气预报应用比较多的有限差分法把连续空间变为离散空间，用变量在离散点(网格点)上的值代替连续的变量场。若离散点的距离为 d (格点距)，用离散点的值能够比较精确地表示波长 $L \geq 10d$ 的系统，对于短波系统的表示则误差较大。对于更小尺度的系统，例如其波长 $L < 2d$ ，用格点值不能直接描述这种系统所发生的过程，这种尺度的过程称为次网格尺度过程。因此格点值能够直接表示的系统，其波长至少比格点距 d 大几倍，波

长小于二倍格距的系统都被漏掉。但大气过程是非线性的，在不同尺度的运动之间存在着能量的交换。这种能量交换过程又是影响不同尺度运动的重要动力过程，必须予以考虑。因此我们可以把有限差分法求解的方程看作与(1.14)–(1.18)类似的某种意义上的平均运动的方程，平均值对应格点值，扰动值对应次网格尺度过程。如果格点距 d 取几百公里，则平均值描述天气尺度和次天气尺度运动，而小尺度的对流运动属于扰动运动。此时的时空平均间隔当然要比相对于湍流的平均运动大得多。有一点应指出的是对流的扰动对平均运动的作用与湍流对平均运动的作用不完全相同。湍流应力是耗散力，消耗平均运动的动能。但已有的实际资料分析证明，小尺度对流对大尺度运动的作用可能改变符号。它可以向大尺度运动输送能量，也可能消耗大尺度运动的能量。

§ 3 球坐标系方程

研究包围在地球周围的大气运动，最自然的是用球坐标系。地球为一椭球体，其半径在赤道和极地相差 22 公里。这差值和地球的平均半径相比小得很多，在研究气象问题时都把地球当做球体，并取其平均值 6371 公里作为球体的半径。球坐标系的原点即地心，取 $\lambda, \varphi(\theta), r$ 为坐标， λ 为经度， $\varphi(\theta)$ 为纬度（余纬）， r 为向径长度。设 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为与纬圈相切，向东为正；与经圈相切，向北为正；与球面垂直向上为正的 单位矢量。 u, v 和 w 表示速度沿这三个方向的分量，则

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

而

$$u = r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad w = \frac{dr}{dt} \quad (1.19)$$

则(1.14)式可分解为以下三个方程：

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \cos \varphi \partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{r} - \frac{uw}{r} + F_{\lambda} \\
 \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi \\
 & - \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{r} - \frac{vw}{r} + F_{\varphi} \\
 \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \varphi \\
 & + \frac{u^2 + v^2}{r} + F_r
 \end{aligned}$$

连续方程 (1.15) 可写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[-\frac{\partial u}{r \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \varphi)}{r \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial(wr^2)}{r^2 \partial r} \right] = 0$$

对这些方程一般作以下传统简化：因 $r = z + a$, z 为海拔高度, a 为地球半径, 在我们所感兴趣的大气范围内 $z \ll a$, 所以凡出现在系数中的 r 都可用 a 代替。其次 $2\Omega u \cos \varphi$, $\frac{u^2 + v^2}{r}$, F_r 都比 g 小很多, 可以略去不计。对于大尺度运动, w 比 u, v 小两个量级, 除赤道附近外, $2\Omega w \cos \varphi$ 和 $2\Omega v \sin \varphi$ 相比也可以略去。从科氏力不做功的原则考虑, 略去 $2\Omega u \cos \varphi$, 也应同时略去 $2\Omega w \cos \varphi$, 否则能量不守恒。此外 $\frac{uw}{r}$, $\frac{vw}{r}$ 也是小项。在连续方程中 $\frac{2w}{r} < \frac{\partial w}{\partial r}$, 可略前者。又因 $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}$, 所以运动方程、连续方程可写成

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + 2\Omega v \sin \varphi + \frac{uv \operatorname{tg} \varphi}{a} + F_{\lambda} \quad (1.20)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \partial \varphi} - 2\Omega u \sin \varphi - \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a} + F_{\varphi} \quad (1.21)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.22)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial(v \cos \varphi)}{a \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.23)$$

热力学方程和水汽方程仍为

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = Q \quad (1.24)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{S}{\rho} \quad (1.25)$$

式中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.26)$$

为了得到以上方程的确定解, 还需给出初始条件和边界条件。

初始条件为

$$\begin{aligned} t = 0, \quad \mathbf{V} &= \mathbf{V}^0(\lambda, \varphi, z) \\ p &= p^0(\lambda, \varphi, z) \\ T &= T^0(\lambda, \varphi, z) \\ q &= q^0(\lambda, \varphi, z) \end{aligned} \quad (1.27)$$

当 $z \rightarrow \infty$ 时物理量都有界, 常用的条件有

$$p|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{或} \quad (\rho w)_{z \rightarrow \infty} < \infty \quad (1.28)$$

下边界为地球的刚体表面, 流体不能穿过它, 且邻近它的流体在运动时与刚壁没有空隙。因此边界条件就是沿壁面各点的流体质点速度均应垂直于该面的法线。如 $F(\lambda, \varphi, z) = 0$ 为壁面方程式, 则上述条件表示为

$$\mathbf{V} \cdot \nabla F = 0 \quad (1.29)$$

因 $F(\lambda, \varphi, z) = z - z_s(\lambda, \varphi) = 0$, 所以边界条件又可写成

$$z = z_s(\lambda, \varphi), \quad w = \frac{u_s}{a \cos \varphi} \frac{\partial z_s}{\partial \lambda} + \frac{v_s}{a} \frac{\partial z_s}{\partial \varphi} \quad (1.30)$$

z_s 为地形高度。(1.30) 式表明地形表面的空气微团产生强迫垂直运动。

§ 4 普遍垂直坐标变换

球坐标系的 z 轴与球面垂直, z 为几何高度。直接用几何高度作为垂直坐标对空间概念的理解比较直观, 但实际应用中有时