数字信号处理原理与应用

张宗橙　张玲华　曹雪虹

东 南 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书系高等院校教材。全书共分 9 章，第 1 章为诸论，第 2，3 章讨论离散正交变换的原理以及快速算法，第 4 章讨论随机信号的谱分析，第 5 到第 6 章讨论数字滤波器的分析与设计方法，第 7 章讨论数字系统的实现及其实现过程中的问题与解决办法，第 8 章通过一些实例介绍了数字信号处理在通信上的应用，第 9 章介绍了当前数字信号处理的硬件实现情况。各章附有与内容密切配合的例题和习题，有助于加深对内容的理解。

本书力求概念突出，思路清晰，便于自学。可作为电子、通信与信息类各专业本科学生教材，也可供有关科技、工程人员作为参考书。

数字信号处理原理及应用

张宗橙　张玲华　曹雪虹

*

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼 2 号　邮编 210096）

江苏省新华书店经销　南京邮电学院印刷厂印刷

*

开本 787 ×1092 毫米 1/16　印张 16.25　字数 395 千

1997 年 8 月第 1 版　1997 年 8 月第 1 次印刷

印数：1－3500 册

ISBN 7－81050－245－X/TN・27

定价：18.00 元

（凡因印装质量问题，可直接向承印厂调换）

前　言

《数字信号处理》是数字技术、计算数学和大规模集成电路相结合的产物，从60年代始便已形成一门独立的学科。随着通信方式由模拟走向数字，数字信号处理越来越成为电子通信类专业学生不可缺少的专业基础。本书是根据9年的教学实践，以教学大纲为准绳，以用了3年的自编教材为基础，参考各兄弟院校的教材，结合数字信号处理在通信部门的应用情况而编写的。本书的计划授课时间为64学时。

《数字信号处理》作为一门学科仍在迅速发展中。随着研究向纵深的进展，以及向各应用领域的渗透，该学科已分化出许多分支，如自适应信号处理、统计信号处理、图像处理、语音信号处理、现代谱估计、模式识别等，需要开设系列课程才能比较完整地了解它。但作为入门的专业基础课，本课程的教学内容已相对成熟。各院校教材虽然各有侧重，但大体格局是FFT、数字滤波器和谱分析三大支柱，体现了变换、处理、分析这三大内容，加上数字信号处理在本行业的应用。本书是针对工科的电子、通信、信息类本科学生编写的，因此，全书编写的指导思想是：前面理论部分着重讲清讲透基本概念、思路、方法，既要为本领域的后续课程打下扎实的理论基础，又要避免过于繁复和严密的数学推导；后面应用部分是新增的内容，采取广、新、浅的方针，重在拓宽知识面，开阔思路，使学生了解本门课程在通信上的工程应用，了解最新的发展动向，特别是在将要兴起的多媒体通信中的作用。

本书共9章，由张宗橙主编。第1、3、5章由张玲华编写，第7章、第3章的第4节及全书的习题由曹雪虹负责编写，其余由张宗橙编写。本书由郑宝玉教授审稿。

徐澄圻教授和杨震、穆明生、杨磊等老师曾对本书提出过宝贵的修改意见，在此表示感谢。

编　者

1997年5月

目　　录

1　绪论 …… 1
　1.1　数字信号、系统和处理 …… 1
　1.2　数字信号处理的特点 …… 1
　1.3　数字信号处理技术的发展 …… 2
2　离散时间信号和系统 …… 4
　2.1　序列 …… 4
　　2.1.1　序列的定义 …… 4
　　2.1.2　常用的序列 …… 5
　　2.1.3　周期序列 …… 6
　　2.1.4　序列运算及其常用关系式 …… 6
　2.2　线性移不变离散时间系统 …… 8
　　2.2.1　线性移不变的定义 …… 8
　　2.2.2　系统的单位抽样响应 …… 9
　　2.2.3　系统的时域分析——差分方程 …… 9
　2.3　离散时间系统的Z域分析 …… 10
　　2.3.1　从抽样信号的拉氏变换到Z变换 …… 11
　　2.3.2　Z变换的收敛域 …… 13
　　2.3.3　Z变换的性质 …… 15
　　2.3.4　反Z变换 …… 16
　　2.3.5　系统函数 …… 19
　　2.3.6　系统的因果性、稳定性 …… 20
　　2.3.7　系统的分类和连接 …… 21
　2.4　离散时间系统的数字频域分析 …… 23
　　2.4.1　序列傅氏变换 …… 23
　　2.4.2　系统频响 …… 24
　　2.4.3　全通函数和纯振幅函数 …… 28
　2.5　离散傅氏变换DFT和离散频域分析 …… 30
　　2.5.1　周期序列的傅氏级数变换(DFS) …… 31
　　2.5.2　离散傅氏变换(DFT) …… 34
　　2.5.3　DFT的性质 …… 36
　　2.5.4　系统的离散频域分析 …… 42
　　2.5.5　采样的恢复 …… 46
　2.6　变换域的关系 …… 49

习题 …… 49
3 正交变换及其快速算法 …… 53
3.1 快速傅里叶变换(FFT) …… 53
3.1.1 按时间抽取(DIT)的 FFT …… 54
3.1.2 按频率抽取(DIF)的 FFT …… 59
3.1.3 IFFT 的运算方法 …… 61
3.1.4 混合基 FFT 算法 …… 63
3.2 快速傅里叶变换的应用 …… 66
3.2.1 利用 FFT 求线性卷积——快速卷积 …… 67
3.2.2 利用 FFT 求相关——快速相关 …… 67
3.2.3 Chirp-Z 变换 …… 68
3.3 离散余弦变换(DCT)及其快速算法 …… 70
3.3.1 离散余弦变换(DCT) …… 71
3.3.2 快速余弦变换(FCT) …… 72
3.4 小波变换 …… 75
3.4.1 短时傅里叶变换 …… 76
3.4.2 小波变换 …… 77
习题 …… 79
4 数字谱分析 …… 80
4.1 信号的分类与预处理 …… 80
4.2 确定性信号的相关函数及谱分析 …… 83
4.2.1 确定性信号的幅度谱、相位谱 …… 83
4.2.2 确定性信号的相关函数 …… 86
4.2.3 确定性信号的能量谱、功率谱 …… 88
4.3 随机信号的相关函数和谱分析 …… 89
4.3.1 随机信号的数字特征和分类 …… 89
4.3.2 随机信号的相关函数 …… 92
4.3.3 随机信号的功率谱 …… 95
4.3.4 随机信号通过线性系统 …… 96
4.4 随机信号的古典法谱估计 …… 99
4.4.1 相关法谱估计 …… 99
4.4.2 周期图法 …… 101
4.4.3 古典法谱估计的质量评价和改进方向 …… 102
4.5 现代谱估计——参数模型法 …… 105
4.5.1 随机信号的参数模型 …… 106
4.5.2 相关域:相关匹配和最大熵准则 …… 107
4.5.3 时域:线性预测和反滤波 …… 109
4.5.4 频域:功率谱的匹配与加色 …… 112

4.5.5 尤勒—沃克方程求解 …… 113
习题…… 115
5 无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器(DF)的设计 …… 116
5.1 数字滤波器的一般概念 …… 116
5.1.1 数字滤波器的分类 …… 116
5.1.2 数字滤波器的一般分析、设计方法 …… 118
5.2 由模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器 …… 120
5.2.1 模拟域的频率变换 …… 120
5.2.2 模拟低通滤波器的设计 …… 123
5.2.3 冲激响应不变法 …… 128
5.2.4 双线性变换法 BLT(Bilinear Transformation) …… 131
5.2.5 数字域的频率变换 …… 136
5.3 IIR 数字滤波器的计算机辅助设计(CAD) …… 140
5.3.1 设计的一般步骤 …… 140
5.3.2 常用的设计方法 …… 143
习题…… 144
6 有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器的设计 …… 146
6.1 线性相移 FIR 数字滤波器的特点 …… 146
6.2 FIR 滤波器的窗口设计法 …… 150
6.2.1 设计原理 …… 150
6.2.2 窗函数的选择 …… 151
6.2.3 窗口法的设计步骤和实例 …… 156
6.3 FIR 滤波器的频率采样法设计 …… 159
6.3.1 线性相位 FIR 滤波器的约束条件 …… 160
6.3.2 滤波器的频响 …… 160
6.3.3 改善滤波器性能的措施 …… 161
6.4 FIR 数字滤波器的计算机辅助设计 …… 165
6.4.1 切比雪夫一致逼近原理 …… 165
6.4.2 代表 FIR 系统的 n 阶多项式 …… 166
6.5 FIR 和 IIR 数字滤波器的比较 …… 170
习题…… 170
7 数字滤波器的结构与实现 …… 172
7.1 IIR 数字滤波器的结构 …… 172
7.1.1 直接型 …… 172
7.1.2 级联型 …… 173
7.1.3 并联型 …… 174
7.2 FIR 数字滤波器的结构 …… 175
7.2.1 直接型 …… 175

7.2.2 级联型 …… 175
7.2.3 线性相位型 …… 175
7.2.4 频率采样型 …… 176
7.3 有限字长效应 …… 179
7.3.1 输入信号的量化效应 …… 179
7.3.2 系数的量化效应 …… 181
7.3.3 数字运算过程中的有限字长效应 …… 186
习题 …… 190
8 数字信号处理在通信上的应用 …… 192
8.1 频域分析、滤波与处理 …… 192
8.1.1 FFT 谱分析仪 …… 192
8.1.2 多频(MF)信号的数字检测 …… 193
8.1.3 利用 FFT 和多相网络实现 TDM—FDM 的复用转换 …… 195
8.1.4 利用 IFFT 实现离散多频音(DMT)调制 …… 201
8.2 自适应滤波系统 …… 203
8.2.1 自适应滤波系统的一般概念 …… 203
8.2.2 回波抵消器 …… 206
8.2.3 数字型自适应均衡器 …… 208
8.2.4 频域自适应滤波 …… 210
8.3 语音信号数字处理简介 …… 211
8.4 数字图像处理简介 …… 224
9 数字信号处理硬件与 VLSI …… 237
9.1 算术运算器件 …… 238
9.1.1 加法器 …… 238
9.1.2 乘法器 …… 239
9.2 位片式信号处理器 …… 240
9.3 单片数字信号处理器(DSP 芯片) …… 241
9.4 VLSI 阵列处理器 …… 247
9.5 专用信号处理芯片(ASIC) …… 248
附录:本书所用符号一览表 …… 250
参考资料 …… 251

1 绪　论

1.1 数字信号、系统和处理

信号是信息的载体。如果说信息是抽象的内涵，那么信号则是有形的物理实体。信号以某种函数的形式传递信息。这个函数，可以是时间域函数，也可以是频率域函数，还可以是其它域，如相关域、空间域等的函数，但基础的域是时域。

时域信号 $S(t)$，其自变量 t 可以有连续的和离散的两种形式，其函数值（幅度）也有连续和离散两种。两者共有四种可能的组合，但有实际意义的仅三种。另一种时间连续、幅度离散信号，由于其系统总存在过渡过程，所以讨论价值不大。与这三种信号相对应，处理这些信号的系统也可分为下列三类：

(1) 模拟信号和系统。信号 $x(t)$ 的自变量 t 和函数值（幅度）$x(t)$ 都是连续值。处理这类信号的系统叫模拟系统。通常由电容、电感、电阻、半导体器件及模拟集成电路组成的网络和设备是模拟系统。

(2) 离散时间信号和系统。信号 $x(nT)$ 的自变量 nT 是时域的离散采样点而函数值 x 是连续的。扩大到一般情况，可用 $x(n)$ 代表时间离散、幅度连续的任何序列。此处的 n 仅表示顺序号，可以是时间轴顺序，也可以是其它任何某个域、某种轴上的序号。处理离散时间信号的系统叫离散时间系统，比如用电荷耦合器件(CCD)以及开关电容网络组成的系统就是离散时间系统。

(3) 数字信号和系统。信号 $x_q(n)$ 在时间和幅度上都是离散的。处理这类信号的系统叫数字系统。由数字运算单元、存储单元、逻辑控制单元以及 CPU 等组成的系统是数字系统。

“处理”是用系统对信号进行变换和加工，“处理”的类型决定于系统的类型，通常与信号类型相一致，但也可以不同。比如数字信号可以在模拟低通滤波器中平滑，而模拟信号也可以经 A/D、D/A 变换而用数字系统去处理。

1.2 数字信号处理的特点

数字信号处理较之模拟信号处理的优点是十分明显的，主要有：

(1) 精度高。模拟系统的精度是靠元器件参数的精度来支持的，与生产所用的材料、工艺相关，很难达到 10^{-3} 以上。而数字系统的精度是由字长来决定的，17 位字长就可达到 10^{-5} 精度。系统可以轻易地把字长加大到 32 位、64 位。很多高精度的测量和控制只有用数字系统才能实现。

(2) 可靠性强。只有两个电平或有限多电平，抗干扰能力强，并且干扰不积累。

(3) 系统通用性好。模拟系统参数由元件值一次固定，数字系统参数可轻易改变。比如用同一个数字系统，只要改变一下系数，既可作高通滤波，又可作低通滤波；既可处理大信号，又可处理小信号；既能产生高频，也能产生低频。特别当频率很低时，模拟电路对电容电感的要求或许已使它们的体积大到惊人的地步，而数字系统频率可低到 10^{-3}Hz。

(4) 可存储性。时域信号存储从某种意义上看是时间存储，它开辟了一种新的处理方法，能提供时间资源以进行复杂的高级处理。因此带数字信号处理功能的示波器可以清晰地显示一般示波器看不到的波形。把图像信号存储起来可进行模拟系统不能实现的二维、三维信号处理；加上一定的时延，数字滤波器可实现近于理想的原本是非因果的频带滤波；把波形存储起来可用作万能的波形（函数信号）发生器。

(5) 可时分处理。一套系统可同时（时分复用）处理几个信号。一些基本运算环节可以循环复用，例如将一节滤波器的输出引入到它的输入，控制其循环五次，则等效于通过一个五节的滤波器。

(6) 易用软件模拟。数字系统可用计算机精确模拟，因此可先用计算机来研究硬件系统的参数、特性，进行性能调试和质量估计，即软件仿真。事实上，软件本身也可以是数字系统的一部分，这就构成软硬件结合的系统。也可以将软件功能做成硬件，称为软件固化。这样，开发手段强，成本低，周期短。

(7) 容易实现非线性特性。模拟器件靠物理特性产生非线性，其曲线形状不易改变和调整。数字系统可用赋予的数据方便地产生任何非线性特性。

(8) 自诊断、自保护性能好。因而可开发故障诊断软件，便于维护操作和监控管理。

(9) 容易集成化，体积小，重量轻，耗电省。硬件参数一致且稳定，有利于硬件互换和维修。

以上都是数字处理的优点。世界上没有绝对完美的事，数字处理也存在很多弱点。

(1) 工作速度慢。数字系统的工作受时钟频率（采样频率）的制约，它是靠运算而不是靠物理特性完成处理的，因此它处理不了很高的频率。也许数字处理永远做不到像模拟处理那样，让输入输出信号几乎同时发生，这是它的最大弱点。

(2) 电路规模大，需时钟发生器、A/D、D/A 等附属电路。一般来说，和模拟系统相比，越是复杂的系统进行数字处理的相对成本越低，而对于比较小的系统相对成本比模拟处理要高。

(3) 对模拟信号进行数字处理，必定要量化，量化是非线性过程，而且会产生量化噪声。在运算过程中也会产生运算误差，甚至出现极限环振荡。

1.3 数字信号处理技术的发展

早在50年代，以 Z 变换和采样数据理论为基础实现了低频地震信号的数字处理，但限于当时的技术和器件水平，从成本、体积和实时性看，数字信号处理远不能与模拟处理匹敌。

1965 年提出的快速傅氏变换 FFT 是数字信号处理发展史上的一块里程碑。以计算 1024 点的序列为例，FFT 将计算时间缩短为原来的 1/100，从而使数字信号处理从一个

计算数学的分支变为一门应用科学，逐步走向实用技术。从1966年后，每年都有大量新的算法出现，内容主要集中在快速变换、滤波器设计、谱分析这三大支柱上。快速变换指各种正弦类、非正弦类的正交变换及其快速算法。如Walsh-hadamard变换(WHT)，离散余弦和正弦变换(DCT，DST)，离散Hartley变换(DHT)，数论变换(NTT)和小波变换(Wavelet)等等。滤波器设计涉及各种类型、各种结构、各种设计方法。谱分析以FFT为基础，对象可以是确定性信号，也可以是随机信号，后者是统计信号处理的基础。数字信号处理的基础理论目前日臻成熟，成为高校本科学生一门重要的专业基础课。以基础理论为依托，数字信号处理的研究正在向深度和广度发展。从研究因果、线性系统到非因果、非线性系统，从最小相位系统到非最小相位，从一维处理到多维处理，从单一抽样率到多速率处理。处理的信号对象从高斯信号扩展到非高斯信号，从平稳到不平稳。研究的深化促使了分支的细化，形成了诸如"自适应信号处理"、"统计信号处理"、"多维信号处理"、"模式识别"、"数字语音信号处理"、"图像信号处理"、"信号检测与估值"等专业课程和研究方向。

与算法并行发展的另一个分支是数字信号处理的硬件。60年代末当算法研究的论文达到高峰时，处理的方法却多以计算机程序(软件)的形式出现，当时的数字信号处理很多是非实时的计算机处理。这并非研究人员不想用硬件实现，而是当时器件水平跟不上算法的发展。直到70年代末期大规模集成电路和微处理芯片的发展，才使数字信号处理的专用硬件——数字信号处理器(DSP)得以发展。DSP特别适合于连续的乘、加运算，是一种高速、微处理器芯片。常用的DSP有TI公司的TMS320系列、AD公司的ADSP系列等。DSP从微处理器角度看是专用的，从数字信号处理角度看却是通用芯片。近年来随着计算机辅助设计、制造和超大规模集成电路的发展，各种ASIC专用芯片，如FFT芯片、数字滤波器芯片、语音识别和合成的芯片、语音和图像压缩编码芯片等大量出现。最新的发展趋势是进一步提高集成性，将CPU、DSP、大容量存储器、现场可编程门阵列(FPGA)等集成在同一芯片上，这样组成的数字信号处理系统具有很大的灵活性，可以作为多媒体的硬件平台。

数字信号处理作为单独一门学科已经快30年了。在这期间，算法和器件、或者说软件和硬件共同决定着这门学科的发展。如果说30年前数字信号处理的内容是自然科学的一支，那么这些年来它已经发展成为一门独立的技术科学，又扩展到各个领域成为工程技术，其应用范围遍及各部门，如邮电、电子、生物、医学、机械、仪表、地质勘探、声纳、雷达、遥感等等。

数字信号处理的一个新进展是利用人工神经网络ANN(Artificial Neural Network)，它是一种由许多个简单处理单元按一定方式互连而形成的并行处理系统。其特点是并行处理、分布存储、容错性强、具有自学习能力，可用于模式识别、语音识别和合成、数据压缩、知识处理和智能机器人等。人工神经网络现在已被制成芯片，如Bellcore的ANN芯片，其处理速度是通常数字处理的10万倍。ANN的缺点是精度低，不能作数值计算(如银行账单运算)，不能顺序的计数等。此外，模糊(Fuzzy)、浑沌(Chaos)等处理方法也正在引入信号处理中。可以预料，将来的信号处理不会是单一的。高速、并行的数字处理器，以电荷耦合器件(CCD)、声表面波器件(SAW)等为支持的模拟处理器，以及人工神经网络处理单元将结合在一起，互相扬长补短，发挥最好的作用。

2 离散时间信号和系统

数字信号处理的对象是数字信号，处理的工具是数字系统。但是，研究数字信号处理的理论体系却是建立在离散时间信号和系统上。这是因为：由模拟信号到离散时间信号的采样过程是线性过程，**而从离散时间信号到数字信号的量化过程是非线性过程**。举一个简单例子：

若 $Q(5.6)=6 \qquad Q(6.6)=7$

则 $\qquad Q(5.6+6.6)\neq Q(5.6)+Q(6.6)$

式中，$Q(\cdot)$表示舍入到整数位的量化。可见，量化后叠加不等于叠加后量化，线性系统必须具备的线性叠加性质在这里不成立。

对于线性系统，我们已有一套完整的、简便有效的数学方法，如差分方程、Z 变换以及其它各种正交变换来描述其时域、频域及各种变换域上的特征。而对非线性系统的描述手段却少得多，也复杂和不精确得多。因此，尽管这门课程叫《数字信号处理》，但大多章节讨论的理论是用于离散时间信号和系统的，我们把它当作理想化、线性化的数字系统，是真正数字系统的近似。

理想化的二个前提是：

- 假定采样是理想的，不考虑实际采样的脉宽效应。
- 假定量化字长是无限的，不考虑有限字长效应。

理想采样是实际采样本质的抽象，它集中反映了采样过程的一切本质的特性，而把次要的因素忽略掉不计。无限字长可看作是有限字长的真值。理想化处理后，我们就可以利用线性离散系统的分析方法和理论成果来分析数字系统了，而在最后通过有限字长效应的研究来找出理想化系统与实际系统的偏差效应。

2.1 序 列

2.1.1 序列的定义

序列是一串以序号为自变量的有序数字的集合，写作

$$x=\{x(n)\} \qquad -\infty<n<\infty$$

式中，n 为整变量，$x(n)$是第 n 项的序列值，序列值一般是连续数值（模拟量），作为特例也可以是离散数值。后面标出的是 n 的定义域，$\{\cdot\}$表示集合。

对模拟信号进行等间隔时域采样，得到的信号在模拟时间系统中表示为 $x(nT)$，T 是采样周期，而在离散时间系统中表示为序列 $x(n)$。序列强调一组数的顺序而淡化顺序所表示的物理意义。序列 $x(n)$不一定代表时间序列，也可能表示频域、相关域等其它域上的一组有序数，但习惯上常把它说成是离散时间信号，通项 $x(n)$表示第 n 个样值（或称抽样值、样本）。

序列也可写成：

$$x=\{x(-\infty)\cdots x(-1),x(0),x(1)\cdots x(\infty)\}$$

或者更简化一些，用序列的通项式来表示序列，记作：$x(n)$。

2.1.2 常用的序列

1）单位采样序列 $\delta(n)$

单位采样序列 $\delta(n)$ 定义为

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases} \tag{2.1}$$

它与模拟信号中的单位冲激信号 $\delta(t)$ 类似，但 $\delta(t)$ 在 $t=0$ 处值为 ∞，只是其积分为 1，而 $\delta(n)$ 在 $n=0$ 处值为 1；$\delta(t)$ 是广义函数，是不可实现的数学极限，而 $\delta(n)$ 是可实现的。

2）单位阶跃序列 $u(n)$

单位阶跃序列 $u(n)$ 定义为

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geqslant 0\\ 0 & n<0\end{cases} \tag{2.2}$$

它类似于模拟的单位阶跃信号 $u(t)$，但在 $n=0$ 处有确定的取值 $u(0)=1$。

3）矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列 $R_N(n)$ 定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其它 } n\end{cases} \tag{2.3}$$

$R_N(n)$ 的下标 N 表示从 $n=0$ 到 $n=N-1$ 共有 N 个“1”项，其包络是一个矩形。

4）实指数序列

实指数序列的表示式为

$$x(n)=a^n u(n) \tag{2.4}$$

任何序列乘以 $u(n)$ 后，都有 $x(n)=0(n<0$ 时)。a 为实数。当 $|a|<1$ 时，序列收敛；当 $|a|>1$ 时，序列发散；当 a 为负数时，序列值正负摆动。

5）复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n} \tag{2.5}$$

其指数是复数(或纯虚数)，在直角坐标系中可写成

$$x(n)=\mathrm{e}^{\sigma n}(\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n)=\mathrm{e}^{\sigma n}\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma n}\sin\omega_0 n$$

在极坐标系中可写成

$$x(n)=|x(n)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}=\mathrm{e}^{\sigma n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$$

这里，模 $|x(n)|=\mathrm{e}^{\sigma n}$，幅角 $\arg[x(n)]=\omega_0 n$

6）正弦序列

正弦序列的表示式为

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi) \tag{2.6}$$

这里，幅值 A、初相角 φ 的含义与模拟正弦信号相同，但正弦序列的数字角频率 ω_0 的含义与一般模拟信号的概念不同。模拟正弦中的角频率单位是 rad/s，而此处 ω_0 的单位仅是

rad(无量纲)。这是因为 n 是无量纲整数，ω_0 表示相邻两个样值间弧度的变化量。

2.1.3 周期序列

对于任意整数 n，若下式成立

$$x(n)=x(n+rN) \quad r,N\text{ 为整数} \tag{2.7}$$

则序列 $x(n)$是周期序列，周期为 N。

模拟周期信号的采样不一定是周期序列，只有当采样频率与信号周期构成一定关系时才能得到周期序列。比如，欲使一个正弦序列是周期序列，必须满足条件

$$A\sin(\omega_0 n+\varphi)=A\sin[\omega_0(n+rN)+\varphi]$$

即满足 $\omega_0 rN=2k\pi$ 或 $\frac{\omega_0}{\pi}=\frac{2k}{rN}$(有理数)。由于 π 是无理数，显然只有当 $\omega_0=\alpha\pi$(α 是有理数)时正弦序列才可能是周期的。

2.1.4 序列运算及其常用关系式

1) 序列相加　两序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$相加，是将它们的各个对应项分别相加：

$$y(n)=x_1(n)+x_2(n)$$

2) 序列相乘　两序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$相乘，是将它们的各个对应项分别相乘：

$$y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$$

3) 序列与常数相乘　序列 $x(n)$与常数 C 相乘，是将序列各项分别乘以 C：

$$y(n)=Cx(n)$$

4) 序列的移序　序列 $x(n)$向右(左)平移 m，是将序号减去(加上)m：

$$y(n)=x(n-m) \qquad \text{右移 } m$$

$$y(n)=x(n+m) \qquad \text{左移 } m$$

5) 序列的线性卷积　两序列 $x(n)$、$y(n)$的线性卷积定义为

$$\omega(n)=x(n)*y(n)\triangleq\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m) \tag{2.8}$$

卷积运算具有交换律和结合律：

$$x(n)*y(n)=y(n)*x(n)$$

$$y(n)*[x_1(n)+x_2(n)]=y(n)*x_1(n)+y(n)*x_2(n)$$

由式(2.8)可推断：

- 两序列中只要有一个是无限长序列，则卷积后是无限长序列。
- 两序列分别是 M、N 长的有限序列，卷积后的序列长度为 $L=M+N-1$

例 2.1　已知序列 $x(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$，$y(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$，求 $x(n)*y(n)$。

解　由式(2.8)，$\omega(n)=x(n)*y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m)$

我们把运算过程列成一个表格如下：

m	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…	$\omega(n)$
$x(m)$					3	2	1					
$y(m)$					2	1	1					
$y(-m)$			1	1	2							$\omega(0)=2\times3=6$
$y(1-m)$				1	1	2						$\omega(1)=1\times3+2\times2=7$
$y(2-m)$					1	1	2					$\omega(2)=1\times3+1\times2+2\times1=7$
$y(3-m)$						1	1	2				$\omega(3)=1\times1+1\times2=3$
$y(4-m)$							1	1	2			$\omega(4)=1\times1=1$
$y(5-m)$								1	1	2		$\omega(5)=0$

这里，$y(-m)$是将 $y(m)$以 $n=0$ 为轴左右翻转，称为**翻褶**。$y(1-m)$是将 $y(-m)$向右平移一位而成，$y(2-m)$是 $y(1-m)$再右移一位，如此类推。可见，序列卷积包含了序列翻褶、移序、相乘、相加四种运算。例中两序列长度分别是 3、3，卷积后总长应是 $L=3-3-1=5$。从计算结果看，$\omega(0)\sim\omega(4)$有非零值。而从 $\omega(5)$开始，由于 $y(n-m)$ $n\geq5$ 在位置上已与 $x(m)$错开，结果总是为零。最后解得

$$\omega(n)=6\delta(n)+7\delta(n-1)+7\delta(n-2)+3\delta(n-3)+\delta(n-4)$$

或写成：

$$\omega(n)=\{6,7,7,3,1\}\quad 0\leqslant n\leqslant4$$

解毕●

6）*序列的线性相关* 两序列 $x(n)$、$y(n)$的线性相关定义为

$$R_{xy}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n+m)\tag{2.9}$$

与式(2.8)相比，两者仅相差一个符号。可以想象：计算线性相关的方法，除了 $y(m)$无须作左右翻转处理外，其余是一样的。

例 2.2 两序列同上。$x(n)=\{3,2,1\}$ $0\leqslant n\leqslant2$， $y(n)=\{2,1,1\}$ $0\leqslant n\leqslant2$，求 $R_{xy}(n)$。

解 $R_{xy}(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n+m)$

我们同样把运算过程列成一张表：

m	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…	$R_{xy}(n)$
$x(m)$				3	2	1				
$y(m)$				2	1	1				$R_{xy}(0)=2\times3+1\times2+1\times1=9$
$y(1+m)$			2	1	1					$R_{xy}(1)=1\times3+1\times2=5$
$y(2+m)$		2	1	1						$R_{xy}(2)=1\times3=3$
$y(-1+m)$					2	1	1			$R_{xy}(-1)=2\times2+1\times1=5$
$y(-2+m)$						2	1	1		$R_{xy}(-2)=1\times2=2$

这里，非零项分列在 $n=0$ 的两边。当序列长度分别为 M,N 时，相关序列 $R_{xy}(n)$的长度是 $L=M+N-1$。在 n 的其它值上，由于序列位置已错开，相关 $R_{xy}(n)=0$。计算结果，

$$R_{xy}(n)=\{2,5,9,5,3\} \quad -2\leqslant n\leqslant 2$$

解毕●

7）序列的能量　序列的能量定义为序列各项样值幅度（模）的平方和，即

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \tag{2.10}$$

序列的能量可以是有限的，如能量信号，也可能是无限的，如功率信号。

利用上述的序列运算规则，可以写出一些有用的序列关系式和表达式：

(1) $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ (2.11)

(2) $R_N(n)=u(n)-u(n-N)$ (2.12)

(3) $u(n)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$ (2.13)

(4) $x(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$ (2.14)

式(2.14)是利用运算法则得到的恒等表示式，其数学意义是：**任意序列与单位抽样序列的线性卷积等于它自身**，即 $x(n)*\delta(n)=x(n)$。有了式(2.14)，我们就可用单位抽样序列来表示任意序列：**任何序列都可以表示成单位抽样序列的移位加权和。**

2.2　线性移不变离散时间系统

2.2.1　线性移不变的定义

●一个离散时间系统，如果满足线性叠加原理，则称为线性系统，用数学语言可作如下描述：

对于 $y_1(n)=T[x_1(n)]$，　$y_2(n)=T[x_2(n)]$

若

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n) \tag{2.15}$$

则系统 $T[\cdot]$是线性的。

这里，$x_1(n)$、$x_2(n)$分别是系统输入，$y_1(n)$、$y_2(n)$分别是系统输出。$T[\cdot]$表示系统变换，描述了输入输出序列关系，反映出系统特征。对 $T[\cdot]$加上不同的约束条件，可定义不同的离散时间系统。

●一个离散系统，如果系统特征 $T[\cdot]$不受输入序列移位（序列到来的早晚）的影响，则系统称为移不变系统。由于很多情况下序号对应于时间的顺序，这时也把“移不变”说成是“时不变”。用数学式表示：

对于 $y(n)=T[x(n)]$

若

$$y(n-n_0)=T[x(n-n_0)] \tag{2.16}$$

则系统是移不变的。

●既满足线性，又满足移不变条件的系统是线性移不变系统。这是一种最常用、也最容易理论分析的系统。这里约定：此后如不加说明，所说的系统均指线性移不变/时不变系

统，简称 LSI/LTI 系统。

2.2.2 系统的单位抽样响应

当系统的输入是单位抽样序列 $\delta(n)$ 时，系统的零状态输出称为单位抽样响应，用 $h(n)$ 表示。单位抽样响应是系统固有的，反映了系统特性

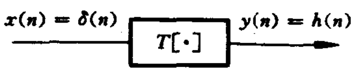

图 2.1 系统抽样响应

$$h(n)=T[\delta(n)] \tag{2.17}$$

由式(2.14)，任何输入序列都可写成以自身为权值的、抽样序列 $\delta(n-m)$ 的加权和

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

由线性移不变特性，对照式(2.17)

$$T[x(m)\delta(n-m)]=x(m)h(n-m)$$

于是

$$\begin{aligned}y(n)&=T[x(n)]=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}T[x(m)\delta(n-m)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)\\&=x(n)*h(n)\end{aligned} \tag{2.18}$$

式(2.18)说明：**线性移不变离散系统的输出序列等于输入序列和系统单位抽样响应的线性卷积。**

2.2.3 系统的时域分析——差分方程

线性移不变离散时间系统可以用常系数线性差分方程来描述，其一般形式为

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i) \tag{2.19}$$

所谓常系数，是指系数 b_i，a_i 是与序号 n 无关的常数，体现“移不变”特性。所谓线性，指 $x(n-i)$，$y(n-i)$ 各项均是一次项，没有高次项，也不存在它们的相乘项，符合系统的线性特性。式中 N 是差分方程的阶，一般情况下 $M\leqslant N$，表示 $y(n)$ 的当前输出值与前 M 个输入、前 N 个输出值有关，或者说对前面的输出有 N 位“记忆”。

差分方程可以看成是一个递推公式，作为递推的出发点——初始条件是不可缺少的。初始条件反映了信号未到达前系统的状况。如果系统不是零状态，即使没有输入，系统也会有输出，这就是系统的零输入响应。假设系统为零状态，计算输入激励下的输出，得到的便是零状态响应，将零输入响应和零状态响应相加，才是真正的系统响应。从解差分方程的角度看，零输入响应和零状态响应分别是差分方程的通解和特解。

例 2.3 一阶系统的参数为 $a_1=-0.5$，$b_1=0$，$b_0=1.5$

即 $\quad y(n)=1.5x(n)+0.5y(n-1)$

初始条件为 $y(n)=0(n<0$ 时)，求该系统单位抽样响应[输入为 $\delta(n)$ 时的零状态响