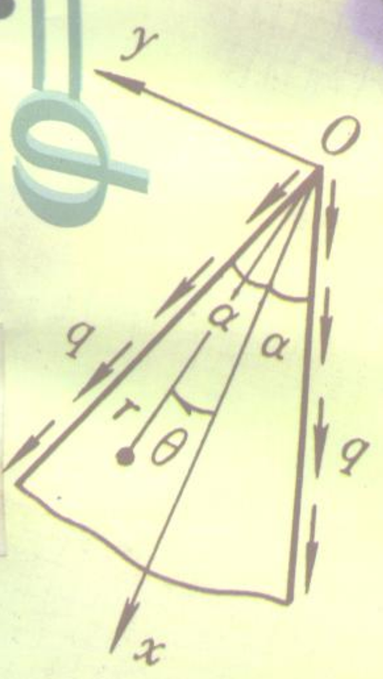
同济大学力学辅导系列丛书

弹性力学学习方法及解题指导

$\varphi = r^2 f(\theta)$



王俊民 编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学学习方法及解题指导/王俊民编著. —上海:同济大学出版社,2000.1
(力学辅导系列丛书)
ISBN 7-5608-2116-2

Ⅰ.弹… Ⅱ.王… Ⅲ.弹性力学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 52330 号

弹性力学学习方法及解题指导
王俊民 编著
同济大学出版社出版发行
(上海四平路 1239 号 邮编:200092)
全国新华书店经销
同济大学印刷厂印刷
开本:850×1168 1/32 印张:11 字数:310 千字
2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—5000 定价:15.60 元
ISBN 7-5608-2116-2/O·178

前　　言

本书第一章至第七章介绍弹性力学的经典解法，第八章至第十章介绍常见的几种近似解法，主要介绍的内容与国家教委课程教学指导委员会制定的“高等工业学校弹性力学课程教学基本要求”相符。

在内容安排上，按平面问题、空间问题、薄板小挠度弯曲问题、近似解法的顺序介绍。在写法上，每章由理论概要、典型例题、学习方法及解题指导、习题与思考四部分组成。全书还分三个阶段进行复习与测验，配置了四份模拟试卷，且附有答案。其中，标注 * 号的为部分重点高校历年来研究生入学考试的试题。

本书的特点是：

1. 理论叙述部分尽量简明扼要，将有关公式表格化，避免繁琐的数学推演，并把基本思路用框图形式直观地表示。

2. 重点内容为解题部分，对易出错的地方作了详细说明，并采用一题多解、一解多用、多题对照、多类对比等方法，以期激活读者的思路，并使解题和理解能力得到提高。本书还将例题分类列出，且使一些例题的解题表格化。

3. 在学习方法及解题指导这部分，对易混淆的概念进行解释，对解题技巧、学习方法进行归纳总结，以巩固有关知识。

在编著本书的过程中，得到了同济大学唐寿高教授、江理平副教授和责任编辑解明芳同志的大力支持和帮助，吴家龙教授、夏志皋教授审阅了全稿，在此谨表示衷心的感谢。由于编者的水平有限，不足之处在所难免，恳望读者给予指正。

编者

1999 年于同济大学

目 录

第一章　绪　论

一、理论概要

(一) 弹性力学的研究对象、内容和范围

弹性力学研究物体在外界因素影响下处于弹性阶段的应力、应变和位移，其研究对象为一般及复杂形状的构件、实体结构、板壳等。弹性力学与其他力学课程的区别见表1-1。

表 1-1　　五门力学课程的研究对象、内容、范围比较

课　程	研究对象	研究内容和范围
理论力学	刚　体	刚体的静、动力学(约束力、速度、加速度)
材料力学	弹性杆件	杆件在拉、压、剪、弯、扭状态下的应力和位移
结构力学	杆系结构	杆系结构的内力与位移
弹性力学	弹性体	复杂构件、板壳等结构的应力、位移分析
塑性力学	塑性体	结构的塑性分析、设计

(二) 本书重点介绍的弹性力学内容

本书重点介绍弹性力学平面问题、空间问题、薄板小挠度弯曲问题的理论概要和解题方法，前七章叙述这三类问题的经典解法(精确解)，后三章则介绍三种最基本的近似解法：差分法、变分法、有限单元法。本书所涉及的弹性力学主要内容及所解决的问题见图 1-1 所示。

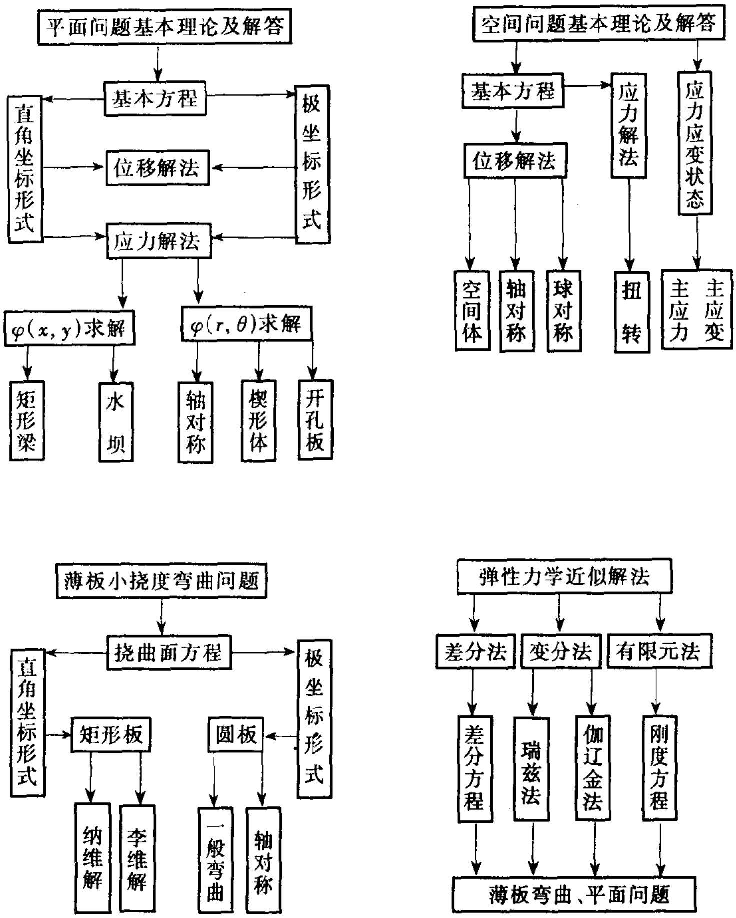


图 1-1　四类重点内容示意图

(三) 弹性力学的基本假定、基本量、坐标系

为简化计算，弹性力学假定所研究的物体处于连续的、均匀的、完全弹性的、各向同性的、小变形的、无初应力的状态。

弹性力学所涉及的各种基本量的名称、符号及正负号规定见表 1-2。

表 1-2　　直角坐标表示的各种基本量情况

基本量		空间问题	平面问题	量纲	正负号规定
未知量	正应力	$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$	σ_x,σ_y	[力][长度]$^{-2}$	正面正向,负面负向为正
	剪应力	$\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{xz}$	τ_{xy}	[力][长度]$^{-2}$	
	正应变	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z$	$\varepsilon_x,\varepsilon_y$	无量纲	线段伸长为正
	剪应变	$\gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz}$	γ_{xy}	无量纲	线段间直夹角变小为正
	位　移	u,v,w	u,v	[长度]	沿坐标轴正向为正
已知量	体　力	X,Y,Z	X,Y	[力][长度]$^{-3}$	沿坐标轴正向为正
	面　力	$\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}$	$\bar{X},\bar{Y}$	[力][长度]$^{-2}$	

弹性力学中常采用直角坐标系(x,y,z),极坐标系(r,θ),柱坐标系(r,θ,z)和球坐标系(R,θ,φ)。

(四) 弹性力学分析和解决问题的方法

从弹性力学观点看,在外界因素影响下,物体内产生的应力、应变和位移(基本未知量)是坐标的连续函数,为无限自由度问题。这些未知量单凭静力平衡条件是无法确定的,需要综合考虑静力学、几何学和物理学三方面的因素来确定。

弹性力学分析方法比较严密,是在无附加假定的情况下,从物体中任一点取微分单元体加以研究,从而得出平衡微分方程、几何方程和物理方程,这些方程分别体现了应力与体力,位移与应变,应力与应变之间的相互联系,在给定边界条件下可由这些基本方程确定基本未知量。

具体求解时,可按位移或应力为未知量来求解,并可按导出未知量(应力函数等)来求解,最后均可将问题归结为在给定边界条件下,求解偏微分方程(组)的问题,其解答可分为精确解和近似解。

（五）材料特性、弹性常数、应力应变关系

应力与应变关系最一般的形式可表示为

$$\sigma_x = f_1(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz},\ \gamma_{xy})$$
$$\vdots$$
$$\tau_{xy} = f_6(\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z,\ \gamma_{yz},\ \gamma_{xz},\ \gamma_{xy})$$

在小变形及无初应力情况下，上式可简化为广义虎克(Hooke)定律：

$$\sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{xz} + C_{16}\gamma_{xy}$$
$$\vdots$$
$$\tau_{xy} = C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\gamma_{yz} + C_{65}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{xy}$$

式中，$C_{mn}(m,n=1,2,\cdots,6)$为弹性常数，共有 36 个。由于应变能的存在，可以证明，即便是极端各向异性体（任一点在各个方向的弹性性质完全不相同）也只有 21 个常数，因为 $C_{mn}=C_{nm}$。对于具有三个互相正交弹性对称面的正交各向异性体，如双向预应力空心板及某些复合材料组成的物体，利用坐标变换的不变性可证得其弹性常数为九个。对于横观各向同性体，如不同层次岩土组成的地基，弹性常数则为五个。而各向同性体（钢材等）独立的弹性常数只有两个，此时，广义虎克定律可表示为式(5-3a)。

（六）弹性力学的一些普遍原理和解法

1. 圣维南(Saint Venant)原理

把物体一小部分上的面力变换成分布不同、但静力等效的面力，只影响近处的应力分布，而不影响远处的应力。该原理又称为局部性原理。换言之，若一小部分边界作用着平衡力系（即主矢和主矩为零），则此平衡力系只在近处产生显著应力，而对远处的影响可忽略不计。

2. 叠加原理

在线弹性和小变形条件下，把同一物体上两组不同外力作用下的解答叠加起来，等于这两组外力同时作用于该物体时的解答。

3. 唯一性定理

对于体力、面力、或边界位移已知的弹性体，弹性力学问题的解是唯一的。

4. 逆解法和半逆解法

(1) 逆解法就是选取试函数（位移、应力或应力函数），使其满足基本方程，然后分析边界情况，确定能解决什么问题。

(2) 半逆解法是根据弹性体的边界形状和受力特点，先设定部分未知量，然后通过满足全部基本方程和边界条件而求出其他未知量，或对所设的部分未知量加以修正，直到满足为止。

二、典型例题

*****例 1-1** 图 1-2 所示结构上，哪几对力（力矩）产生的效应具有局部性？其中，$t \ll h$，$h < b$，$M_4 = -P_4 h$。

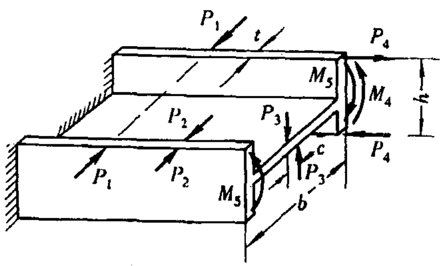


图 1-2

解 可运用圣维南原理判别：题意所给的几个力系中，只有 P_2 一对力构成的力系和 P_4 一对力与 M_4 构成的力系所产生的效应具有局部性。P_1 一对力和 M_5 一对力偶虽都是自相平衡的力系，但它们作用的区域并非一小部分边界；P_3 一对力虽然主矢为零，但主矩不为零，因此，不是自相平衡的力系，所以，它们产生的效应不具备局部性。

例 1-2 图 1-3a）所示水坝（小变形情况），水面离坝顶的距离为 δ，水的容重为 γ，试简述求解水坝内应力分量的思路。

解 水坝所受荷载可分解为图 1-3b），c），d）所示荷载。其中，图 d）所示荷载（作用在一小部分边界，$\delta < h$）又可变换为静力

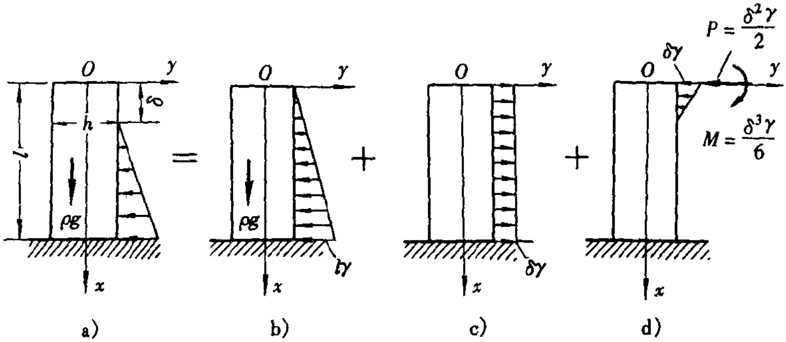


图 1-3

等效的水平集中力 P 和弯矩 M，因此，图 1-3a)的应力分量等于图 1-3b)，c)，d)三种受力情况下应力分量的叠加(其解题过程可分别参阅例 3-4、例 3-12、例 3-18 等)。

三、学习方法及解题指导

(一) 外力与应力分量正负号的约定

1. 应力分量以正面正向、负面负向为正。正面指外法线方向与坐标轴正向一致的截面，正面上的应力分量正方向沿坐标轴正向为正；负面指外法线方向与坐标轴正向相反的截面，负面上的应力分量沿坐标轴负向为正。本书所有图例中的应力分量均按此约定以正方向标出。弹性力学中正应力的约定与材料力学中以材料纤维受拉(压)判断正(负)的方法相对应，而弹性力学中剪应力的约定与材料力学中的判断方法有较大区别，图 2-2 所示微分单元体四个面上的剪应力，按前者的约定都取正号；按后者的判断，左、右面上的剪应力取正号，而在上、下面上剪应力则取负号。

2. 外力(体力、面力)均以沿坐标轴正向为正，面力的正负号与所处的面无关(只与坐标系有关)，初学者需注意这与应力分量

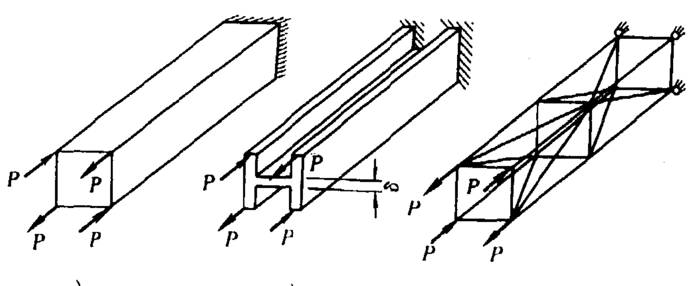
正面正向、负面负向约定的区别。

（二）有关原理的适用范围

1. 叠加原理只适用于小变形、线弹性状态下的对象。对于大变形情况，如梁的纵横弯曲问题，横向荷载引起的弯曲变形将使轴向荷载产生弯曲效应，而叠加原理没有考虑这种效应。此外，对于弹性稳定和弹塑性问题，叠加原理都不适用。

2. 对于圣维南原理，首先，它只能运用于物体的一小部分边界，即面力作用区域的尺寸应小于物体的最小尺寸，其次需注意静力等效原则（主矢、主矩相等）。此外，应用于薄壁杆件和桁架结构时需谨慎对待。如图 1-4a）所示实心杆，其端部受自相平衡的四个集中力作用时，远离杆端处的应力迅速衰减，而图 1-4b）所示工字形薄壁杆，由于腹板厚度 δ 较小，两翼板接近于各自受纯弯曲，此时，应力影响不是局部性的，其可达固定端。对于图 c）所示桁架，端部的四个集中力虽构成平衡力系，但在每根杆件中都将产生应力和位移。最后需指出：圣维南原理不能应用于动力学问题，如杆的一小部分边界上受到扰动，其影响可传到远处。

3. 解的唯一性定理为逆解法和半逆解法提供了理论依据，此定理只有在小变形、无初应力的前提下成立。



a) b) c)

图 1-4

习题与思考

1-1 弹性力学的研究对象、内容是什么？与材料力学比较，有何异同？

1-2 弹性力学中基本假定是什么？基本量的符号和正负号的规定如何？

1-3 按材料力学方法计算图 1-5 所示杆件时，认为横截面上 σ 是均匀分布的，且无剪应力。若在边界上截取一小部分，显然，其无法保持平衡，为什么？

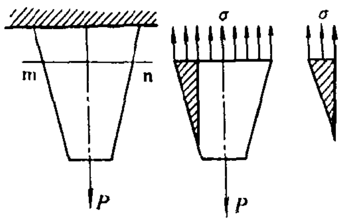


图 1-5

第二章　平面问题的基本理论

一、理论概要

(一) 两类平面问题的概念

当物体的形状和受力具有某些特征时,就能将复杂的三维空间问题简化为二维平面问题。平面问题可分为平面应力和平面应变问题,图 2-1a),b)分别是其典型例子。这两类平面问题的一些特征见表 2-1,八个基本未知量都仅是坐标 x,y 的函数。

表 2-1　　两类平面问题的一些特征

名称	平面应力问题		平面应变问题	
	未知量	已知量	未知量	已知量
位移	u,v	$w\neq 0$	u,v	$w=0$
应变	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$	$\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=0$ $\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$	$\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$	$\gamma_{yz}=\gamma_{xz}=\varepsilon_z=0$
应力	$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$	$\tau_{yz}=\tau_{xz}=\sigma_z=0$	$\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$	$\tau_{yz}=\tau_{xz}=0$ $\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$
外力	体力、面力的作用面平行于 xOy 平面,外力沿板厚均布		体力、面力的作用面平行于 xOy 平面,外力沿 z 轴无变化	
形状	z 向尺寸远小于板面尺寸 (等厚度薄平板)		z 向尺寸远大于 xOy 平面内的尺寸 (等截面长柱体)	

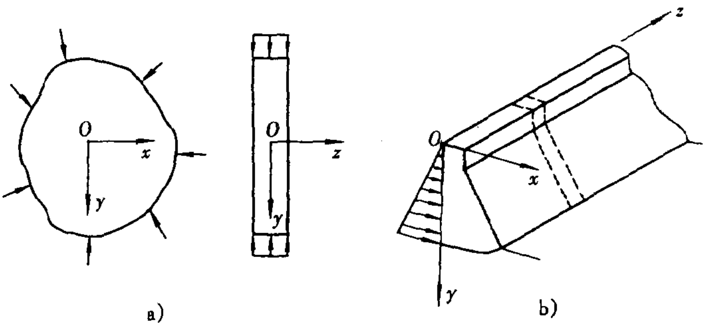


图 2-1

(二) 平面问题的基本方程

平面问题的基本方程共有八个，见表 2-2。其中，E，μ，G 分别是弹性模量、泊松比和剪切模量，$G = E/[2(1+\mu)]$。式(2-1)分别表示图 2-2 所示微分单元体在 x 和 y 方向的静力平衡条件。

表 2-2　　平面问题基本方程及导出时运用的基本假定

名　称	基本方程表达式		运用基本假定
平衡微分方程	$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0,\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$　(2-1)		连续性，小变形，均匀性
几何方程	$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$　(2-2)		连续性，小变形，均匀性
物理方程	平面应力 $\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}$ (2-3)	平面应变 $\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}$ (2-4)	连续性，小变形，均匀性，完全弹性，各向同性。

注：$\tau_{xy} = \tau_{yx}$，$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$

在平面应力问题的物理方程式(2-3)中，将 E,μ 分别换成 $E/(1-\mu^2),\mu/(1-\mu)$，就得到平面应变问题的物理方程式(2-4)。反之，将式(2-4)中的 E,μ 分别换成 $E(1+2\mu)/(1+\mu)^2,\mu/(1+\mu)$，就可得到式(2-3)。

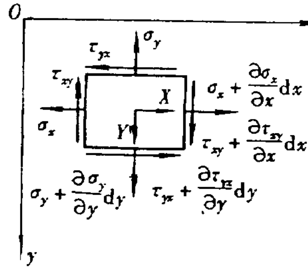


图 2-2

(三) 平面问题的边界条件

弹性力学平面问题的三类边界条件见表 2-3。其中 S_σ,S_u 分别表示面力、位移已知的边界，l 和 m 则是边界面的方向余弦。

表 2-3　　　　平面问题的三类边界条件

位移边界条件	应力边界条件	混合边界条件
$\left.\begin{array}{l}u=\bar{u}\\v=\bar{v}\end{array}\right\}$ S_u 上　(2-5)	$\left.\begin{array}{l}l\sigma_x+m\tau_{xy}=\bar{X}\\l\tau_{xy}+m\sigma_y=\bar{Y}\end{array}\right\}$ S_σ 上　(2-6)	$u=\bar{u},\quad v=\bar{v}$　S_u 上 $\left.\begin{array}{l}l\sigma_x+m\tau_{xy}=\bar{X}\\l\tau_{xy}+m\sigma_y=\bar{Y}\end{array}\right\}$ S_σ 上

(四) 平面问题的两条求解途径

1. 处理平面问题时，常用按位移求解和按应力求解这两条途径。在满足相应的求解方程和边界条件之后，前者先求出位移再用几何方程、物理方程分别求应变和应力；后者先求出应力再由物理方程、几何方程分别求应变和位移，基本思路见图 2-3 所示。

图 2-3

2. 按位移求解平面问题，归结为在给定边界条件下，求解以位移表示的平衡微分方程式(2-7)(平面应力情况)：