纯粹数学与应用数学专著 第31号

图的可嵌入性理论

刘彦佩 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第 31 号

图的可嵌入性理论

刘彦佩　著

科 学 出 版 社

1994

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书对于与图的可嵌入性有关的问题提供一个统一的理论框架。内容包括：图的平面性判定与平面嵌入、高斯平面曲线相交、同构性、图的分解；图的曲面可嵌入性；拟阵的正则性以及图性、上图性；和纽结从拓扑学到组合学的发展等问题。书中许多内容和方法是作者本人的研究成果。从中还提出几十个问题供有兴趣的读者做进一步的研究。

本书可供大专学院与图论有关的专业师生阅读和参考。

纯粹数学与应用数学专著 第 31 号
图的可嵌入性理论
刘彦佩 著
责任编辑 刘嘉善
科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
化学工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1994 年 10 月第 一 版 开本：850 × 1168 1/32
1994 年 10 月第一次印刷 印张：16 插页：2
印数：1-1 200 字数：423 000
ISBN 7-03-004442-8/O·767
定价：21.50 元

纯粹数学与应用数学专著 第 31 号

主　编　杨　乐

副主编　（以姓氏笔画为序）

王　元　王梓坤　石钟慈　严士健

张恭庆　胡和生　潘承洞

序

图的可嵌入性的概念导源于平面性，关于后者，至少组合学工作者深知它是图论中重要的研究课题之一. 早在 30 年代初，首先是波兰的数学家 K.Kuatowski, 其后不久，还有美国的数学家 H.Whitney 和 S.MacLane 都作过精湛的研究. 他们在这方面都创立了各自的理论. 时至今日仍不减其生命力. 这些均已被世人所承认. 然而，本书则打算提供另一种看来在文献中还是新鲜的理论.

在 50 年代，中国数学家吴文俊基于代数拓扑学中的上同调理论揭示了判定图的平面性的一个判准. 另一方面，10 多年之后，生于英国的加拿大数学家 W.T.Tutte 基于在 50 年代他本人引进的实域上链群的理论也发现了一个判准. 然，于 80 年代，本书作者基于二元域 ($GF(2)$) 上的空间理论将这二个判准简化为一个. 这就是在 §5.2 节中所说的吴 (文俊)-Tutte 定理.

60 年代初，从 L.Auslander 和 V.Parter 发表用计算机的算法思想判定图的平面性方面的第一篇文章直到 J.Hopcroft 和 R.Tarjan 的第一个线性时间算法的出现，在文献中讨论这一经典课题的文章竟有数百篇之多. 在 70 年代，吴也构造了一种算法将它转化为解一组模 2 方程的问题. 接着，本书作者把这一结果改进到每个方程至多含有两个模 2 变量. 然后，他又得到了一些新的判准，表明从算法复杂性的角度，平面性的问题相当在 §5.3 节中引进的平面性辅助图上求一个支撑树. 在 §5.4

中的主要定理就是这些判准.

第七章提供了第五章中所描述的基本理论的进一步发展. 对于平面性和平面嵌入揭示了基于确向树与确向嵌入的禁用构形的完备集. 这就使我们能够求出节点数和边数均为原图的节点数和边数的线性函数的平面性辅助图. 从而, 在算法复杂性上也达到了线性之顶峰.

第二、三和四章是第五和七章的基础. 在第二章中, 引进了确向树和确向上树以及它们的一些将会用到的性质. 第三章是关于图中的空间. 其中包括循环空间, 上循环空间, 双循环空间以及它们的结构. 第四章处理平面图的至关重要的结果, 例如, 那些由 Euler 公式能导出的唯一性, 直线和凸表示等. 特别是还讨论了 Jordan 曲线定理的离散形式. 当然, 第一章简述了全书所必需的有关集合、序、图、群以及曲面的基本知识.

在第六章中, 可以看出平面性的理论怎样用于研究高斯的平面曲线交叉问题. 虽然, 于 30 年代, 它首先由 M.Dehn 解决. 不过, 他的解答不是像高斯所猜想的. 事实上, 高斯猜想确用不同的方法于以证实. 但, 这里提供了一种新的看上去较为简单的证明.

第八和九章包含了本书作者最近在纵横可嵌入性与网格可嵌入性方面的一系列新结果. 其要旨是使得这种嵌入中每一条边上的折数尽量地小以致没有折. 第八章从事于叁、双和单可嵌入性. 也就是说只允许每边至多有三、二和一个折的情形. 在第九章中, 研究 0- 可嵌入性或者说网格可嵌入性. 它是最难的一种情形. 这里的论题动意于为超大规模集成电路设计中的布局, 特别是布线提供一个理论基础.

第十章是关于确定一个曲面上的二个多面形是否同构的问题. 对于可平面图, 这个问题首先由 L.Weinberg 多项式地解

决了. 现在，根据 J.Hopcroft 和 J.Wong 的说法我们还知道它是线性可解的. 对于一般的多面形，在这里利用确向术处理这个问题. 而且，对于非可平面图可以利用相仿的方法处理.

第十一和十二章着重讨论非可平面图. 第十一章所讨论的分解可分为二个部分. 其一是将一个图分解为各分图均有较高的连通度. 其二是使各分图均为可平面的或者是纵横的并且要求分图之数目愈小愈好或者说每个分图含的边愈多愈好. 第十二章是关于曲面可嵌入性. 它有两个重要组成部分. 其一即所谓上可嵌入性，或者说使得所在曲面的亏格为最大. 其二是下可嵌入性，即使所在曲面的亏格为最小. 前者用确向术构造性地得到了解决. 虽然，在这章中可以看到商嵌入对于确定不少图类的下可嵌入性起了重要作用. 其中包括 Hilbert–Cohn Vossen 的引线问题的解决. 后者距完全解决仍很遥远.

在第十三章中，提出和解决了一些最优化的问题. 其中，人们可能会想到最小折数与最小面积的问题尤其对于那些从事超大规模集成电路布局设计的人不无裨益. 这里，也包括了本书作者的最新的研究进展.

正如人们所意识到的，拟阵是这样的一个对象，当图为非可平面的，它起着对偶图的作用. 第十四章研究一个拟阵是二分的，正则的以及图的或上图的表征. 这些均视为平面性理论的深入发展. 它首先应归功于 W.T.Tutte 的开创性的工作. 这里我们用自己的方式讨论.

最后，在第十五章，着眼于纽结问题从拓扑学到组合学的发展. 对于边上带二元权的平面图提供了二类组合不变量. 由此出发，可导出 Jones 多项式和括号多项式这二类新的拓扑不变量作为特殊情形.

本书的主要目的在于为上面提到的有关可嵌入性的问题提供一种理论处理. 同时，也考虑了算法构造. 为了节省篇幅

每章最后一节均安排为注记以便将有关问题的最新进展，理论与实际的背景，以及一些历史的发展作一简要说明．同时，也提出了一些公开的问题和可能有助于进一步研究的建议以供在有关方面有兴趣的读者猎奇．然，这里不允许我们讨论算法的方方面面，既使可以自然地导出．因为这或许会使本书之预定的页数增加一倍．由于同样的原因我们也只能略去有关地图的理论及其计数．虽然，这方面的结果正灿烂夺目．

在结束之前，我必须对那些在学术上或技术上对本书作过贡献的人们表达对他们的衷心的感谢．由于版面所限只能在这里提到一小部分人的名字．首先，本项研究之初，曾得到吴文俊教授文章的启迪和 W.T.Tutte 教授文章的充实．没有他们的贡献，这本书也许决难在此时问世．同时， P.L.Hammer, 许国志， F.S.Roberts, P.Rosenstiehl, B.Simeone, 万哲先，王元，吴方，越民义等教授一直关心作者的研究进展． E.Aparo, 马仲蕃， P.Marchioro, A.Morgana, P.Petreschi, 徐伟宣，颜基义等教授经常与作者讨论有关问题．在国内外所办的讨论班的听众，例如崔显峰，董峰明，康 羽，李安平，李祥贵，刘 新 (博士), 刘 莹，吕涛军，任 韩，孙晓荣 (博士), C.H.Velasquez(博士), 徐寅峰 (博士), 杨振起，于 濂，郑茂林 (博士) 等部分或全部地勘校此书初稿．当然，现存的任何错处均是我本人的责任．最后绝非次要，我还得特别地感谢加拿大滑铁卢大学的组合学与最优化系，美国罗杰斯大学的运筹学中心，和意大利罗马大学 (主校) 的统计系的热情好客和各国的研究基金以及我国国家自然科学基金对本书中有关各项目的研究资助．

刘彦佩

1994 年 4 月

于北京

目　　录

第一章

预备知识

为方便，全书采用通常的逻辑约定：和，积，否定，蕴意，等价，任意量和存在量分别用符号： $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall$ 和 $\exists$.

在正文中， $(i.j.k)$ 表示在第 i 章的第 j 节中的第 k 项.

在文献中， $[k]$ 表示参考文献中的第 k 项. 其中 k 由该项作者 (们) 姓的前几个字母接着为数字所组成. 姓氏按字母序排. 同样的作者 (们) 则用数字区别不同的文章或其它出版物.

§1.1 集合

一个 *集合* 就是具有共性的一类对象的全体. 这个对象可以是数、符号、字母，甚至还可以为集合. 当然，这个集合不包括所定义的那个集合本身以免自相矛盾. 其中的对象称为这个集合的 *元素*. 我们总是用小写斜体表示元素而大写的字母为集合. 说法 “x 是 (不是) 集合 M 的一个元素” 用如下的符号表示：

$$x \in M (x \notin M).$$

一个集合通常用一种性质所刻划. 例如

$$M = \{x \mid x \le 4, \text{正整数}\}$$
$$= \{1,2,3,4\}.$$

一个集合 M 的 基数(当 M 为有限时即它的元素的数目) 用 $|M|$ 表示. 对于上面定义的 M, 自然, $|M| = 4$.

令 A, B 是二个集合. 如果 $(\forall a)$ $(a \in A \Rightarrow a \in B)$, 则称 A 为 B 的 子集. 记为 $A \subseteq B$. 进而, 定义三个主要的运算: 并、交和差分别如下所示:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}; \tag{1.1.1}$$

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}; \tag{1.1.2}$$

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}. \tag{1.1.3}$$

如果 $B \subseteq A$, 则 $A \setminus B = A - B$ 用 $\overline{B}(A)$ 表示, 并称之为 B 对 A 的 补. 如果所有的集合都是 Ω 的子集, 则集合 A 对 Ω 的补简单地写为 $\overline{A}$. 空集 就是一个没有任何元素的集合, 总是用 $\emptyset$ 表示. 对于 Ω 的子集间的上述运算服从如下的规律.

S1 排中律: $\forall A \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} A \cap A &= A \cup A \\ &= A. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

S2 交换律: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A; \\ A \cap B = B \cap A. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

S3 结合律： $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

S4 吸收律： $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \cup (A \cap B) \\ &= A. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

S5 分配律： $\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{cases} \tag{1.1.8}$$

S6 通界律： $\forall A \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} \emptyset \cap A = \emptyset,\ \emptyset \cup A = A; \\ \Omega \cap A = A,\ \Omega \cup A = \Omega. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

S7 单补律： $\forall A \subseteq \Omega$,

$$\begin{cases} A \cap \overline{A} = \emptyset; \\ A \cup \overline{A} = \Omega. \end{cases} \tag{1.1.10}$$

由这些定律出发，可以得到很多重要结果. 这里仅列出一些将会用的.

定理 1.1.1 $\forall A \subseteq \Omega$,

$$
\begin{cases}
(\forall X \subseteq \Omega) \quad [(A \cap X = A) \vee (A \cup X = X)] \\
\qquad\qquad \Rightarrow A = \emptyset; \\
(\forall X \subseteq \Omega) \quad [(A \cap X = X) \vee (A \cup X = A)] \\
\qquad\qquad \Rightarrow A = \Omega.
\end{cases} \tag{1.1.11}
$$

定理 1.1.2　$\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B. \tag{1.1.12}$$

定理 1.1.3　$\forall A, B, C \subseteq \Omega$,

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C) \\
&\qquad \Leftrightarrow B = C.
\end{aligned} \tag{1.1.13}
$$

定理 1.1.4　$\forall A \subseteq \Omega$,

$$\overline{\overline{A}} = A. \tag{1.1.14.}$$

定理 1.1.5　$\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$
\begin{cases}
\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{cases} \tag{1.1.15}
$$

由上所述，可以看出 $\overline{\emptyset} = \Omega$ 和 $\overline{\Omega} = \emptyset$. 进而，还可以看出对称性 (或者说对偶性): 任何一个关于 $\cup, \cap, \emptyset, \Omega$ 的结论均可通过交换 $\cup$ 和 $\cap, \emptyset$ 和 Ω 而得出另一个结论.

对于 $A, B \subseteq \Omega$, 从 A 到 B 的一个 单射 是指这样的一个映象 α： $A \to B$ 使得： $\forall a, b \in A$,

$$a \neq b \Rightarrow \alpha(a) \neq \alpha(b).$$

单射也称为 $1-1$ 对应. 一个 满射 则是这样的一个映象 $\beta: A \to B$ 使得: $\forall b \in B$,

$$\exists a \in A,\ \beta(a) = b.$$

如果一个映象既是单射又是满射, 则称为 双射. 如果两个集合之间有一个双射, 则称它们是 同构的. 用 $A \sim B$ 表示 A 与 B 同构. 同构的集合具有相同的基数. 对于有限集 A 和 B, 判定它们同构与否是微不足道的. 因为这时有: $\forall A, B \subseteq \Omega$,

$$A \sim B \Leftrightarrow | A | = | B | .$$

§1.2 序

对于一个集合 M, $M \times M = \{\prec x, y \succ | \forall x, y \in M\}$ 称为 M 的 笛氏积. 其中, 当 $x \neq y$ 时, $\prec x, y \succ \neq \prec y, x \succ$.

所谓一个集合 M 上的一个 二元关系, 即指 $M \times M$ 的一个子集. 形容词 "二元" 常被忽略. 如果对于 $x, y \in M$, 满足关系 R, 则记 $\prec x, y \succ \in R$, 或 xRy. 一个 序, 记为 $\preceq$, 就是这样的一个关系 R 使得满足如下的三个定律:

O1 反射律: $\forall x \in M,\ xRx.$

O2 反对称律: $\forall x, y \in M,\ xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y.$

O3 传递律: $\forall x, y, z \in M,\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$

如果一个集合 M 上带有一个序 $\preceq$, 则称之为 偏序集, 记为 $(M, \preceq)$.

定理 1.2.1 对于一个偏序集 $(M, \preceq)$, $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in M$,

$$x_1 \preceq x_2 \preceq ... \preceq x_n \preceq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n. \tag{1.2.1}$$