Mathematical model

数学模型

陈义华 编著

重庆大学出版社

Mathematical model

数学模型

陈义华　编著

重庆大学出版社

内容提要

本书共分六章：数学模型概述，建模的常用方法，初等模型，微分方程模型，离散模型，工程技术系统的数学模型。通过大量的例子阐述了建立数学模型的思想与方法，旨在培养读者观察问题、分析问题、解决问题的能力。本书内容丰富，例子生动、精彩，涉及数学、物理、化学、医学、人口、经济、军事、体育和工程技术等众多学科和领域。

考虑到不同专业读者需要，书中所选例子具有代表性，文字叙述通俗易懂，对涉及到的数学知识作了适当处理，便于自学。全书共有 66 个例子，每章末附有一定量的习题，供读者练习之用，附录中的国内外数学建模竞赛试题，可供参加大学生数学建模竞赛的师生参考。

本书可作为高等院校工科本科生和研究生教材，亦可供理（包括数学专业）、工、农、医、经济管理等各类专业师生及工程技术人员参考。

数学模型

陈义华　编著

责任编辑　黄开植

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆建筑大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：11.5　字数：287 千

1995 年 1 月第 1 版　1995 年 12 月第 2 次印刷

印数：7001—11000

ISBN 7-5624-0988-9/O・110　定价：9.60 元

（川）新登字 020 号

序　言

最近几十年来，随着各门学科特别是计算机技术的不断进步，数学的应用不仅在物理领域和工程技术中继续取得重要进展，而且迅速进入诸如经济、人口、生态、医学等非物理领域和社会生活。数学，作为一门“技术”，已经成为在发展高科技、提高生产力、实现优化决策、加强系统管理等方面不可缺少的工具。

我们的学校教学对数学是重视的。从小学到大学，数学都是学时最多、份量最重的课程之一。但是在如何跟上社会发展的需要，做到学以致用方面，目前的数学教学远不能适应。越来越多的人们认识到，数学教育不仅要让学生掌握一些数学知识，更应着眼于提高学生的数学素质。而作为运用数学工具分析和解决实际问题的关键之一，所谓数学建模能力，无疑应是数学素质的一个重要方面。

数学素质的培养是数学和其它基础与专业课程的共同任务。作为一种尝试，六七十年代西方国家一些学校开设了一门称为数学建模的课程，着重讲授一些数学建模方法，培养建模能力。80年代初这门课程引入我国一些高等院校，短短十几年来发展非常迅速，反应良好。目前不仅应用数学专业的学生普遍学了这门课程，而且不少院校都面向广大工科学生开设了数学建模的选修课或讲座，受到热烈欢迎。1990年我国开始举办大学生数学模型竞赛，1994年国家教委高教司将这项竞赛作为面向大学生的科技活动向全国高等院校推广，已经并且必将更大地推动数学建模的课程教学。

为了适应蓬勃发展的数学建模教学和竞赛活动的需要，近年来虽然出版了这方面的一些教材和参考书，但是数量较少，风格尚嫌单一，编写面向不同层次、针对各种对象、内容丰富、风格各异的教材和资料，无疑是在这个领域从事教学和研究的教师们的一项重要职责。

据我所知，陈义华同志是我国较早从事数学建模教学和研讨，并且一直坚持下来的少数青年教师之一，他还参加专业教师主持的科研项目，运用数学建模等方法解决工程实际问题。在教学和科研经验的基础上，他编写的这本教材，我以为至少有这样两个特点：一是包含了相当数量的物理和工程技术中的数学模型，容易引起工科学生的兴趣，便于他们接受；二是较全面地介绍了建模方法，特别是类比法，详细分析了能用同一类型数学模型表示的不同物理领域中的问题。

培养数学建模能力，掌握建模技巧，只靠一门课程或一本教材是远远不够的。它不仅需要阅读、钻研成功的建模范例，分析、领会各种建模方法，尤其应该经常参

加研讨活动，组织数学与其它专业人员的交流，并且亲自参加、完成几个建模的全过程。

期待着一本又一本内容丰富、风格独特的数学建模教材和参考书的问世。

姜启源

1994年5月于清华大学

前　言

随着科学技术的发展和电子计算机的广泛应用，数学模型现在已越来越受到人们的重视，这不仅是因为数学、物理等自然学科和工程、经济、生物等领域应用它，而且解决复杂系统性能的控制与管理的问题正面临着越来越大的挑战，各门科学技术日益精确化、定量化，建立数学模型是应用数学方法解决实际问题关键的第一步，是近十年来随着计算机广泛应用而发展起来的新学科。

作者在近几年的本科生、研究生教学以及科研工作中，深感理工科学生在学习数学及专业课时，主要学习理论，在计算技巧训练上下了一定功夫，但一旦接触实际问题，却常常感到不知从何着手，无法建立描述问题特征的数学模型。因为目前的教学使学生在解决实际问题方面训练太少，而且知识面窄，所以想象力差，也缺乏一些必要的数学基础，解决问题的能力比较低，这给当前的数学教学提出了改革的课题。因此，应该开设数学模型课，让学生学习怎么从遇到的实际问题中，做出一些必要而且合理的简化和假设，恰当地运用数学工具得到一个数学结构，通过数学上的结论揭示在实际问题中的含义，即怎么把现实问题抽象成数学问题(这就是建立数学模型)，又怎么返回到实际中去。通过学习这门课，使学生的视野将得到开阔，想象力有所启迪，观察现象、提出问题、分析问题、解决问题的能力得到培养。编写本书，就是向这方面努力和想达到这个目的。

本书共分六章。第一章数学模型概述，主要介绍了数学模型的一些基本概念，建模的一般步骤和原则以及建模能力的培养等内容。第二章建模常用方法，通过例子介绍了建模的理论分析法、模拟方法、类比分析法、数据分析法、人工假设法以及物理系统建模基本方法，涉及系统模型化方法学的若干问题。第三章初等模型，介绍了利用代数法、图解法、量纲分析法、概率法建模。读者应很好地体会建立初等模型的方法、技巧。第四章微分方程模型，介绍了不同领域中建立微分方程模型的基本方法，涉及几何、力学、电学、化学、热学、扩散、医学、人口、体育、社会、经济等问题。在自然科学以及工程、经济、社会等学科中有大量的问题可以用微分方程模型来描述。第五章离散模型，介绍了连续变量与离散变量的相互转化和对应技巧，通过例子介绍了差分法、逻辑法、图论法以及层次分析法建模。由于电子计算机只能对离散变量进行运算，所以离散模型在应用上非常重要。第六章工程技术系统的数学模型，介绍了控制系统、机电系统、热力系统、液压系统的建模方法，给出了工程系统数学模型的通用形式。其中液压系统的模块式建模法，是作者在科研工作中与许仰曾教授、钟孟光博士等共同建立的一种适用于计算机仿真的新建模法。本书实例丰富，共有 66 个例题。

数学模型是本书的主题，重点是强调分析问题和建立模型的方法，不仅关心所用的数学工具，还关心模型的背景，问题的来龙去脉。有的模型没有求解，因为求解不是这里的主要问题。附在每章后面的习题是本书的重要组成部分，有的是正文内容的补充，读者应尽力去完成。附录中的国内外数学建模竞赛试题，可供参加大学生数学建模竞赛的师生参考。

使用本书的读者或学生应具有高等数学、线性代数、概率论以及力学、电学、热学等物理知识，化学知识和一些工程知识。个别地方出现的变分法概念，还有图论等基础，授课教师只要稍

加说明，学生就可以接受。

本书作为教材可以用于 40～60 学时的“数学模型”课程。

本书是作者在给高年级本科生上数学模型课的讲义基础上，参考目前国内外现有的几本数学模型教材，根据近几年收集的较为丰富的资料修改和充实而成的，目前国内的几本教材主要适用于应用数学专业，所以作者力求编写一本能适应工科学生的教材，但限于水平，编写后回顾，自觉这个愿望还未能很好地实现，缺点、错误再所难免，敬请读者批评指教，以便进一步修改。

中国工业与应用数学学会数学模型委员会副主任、清华大学应用数学系姜启源教授对本书的编写和出版给予了热情的指导、鼓励和帮助，并为本书作序，重庆大学应用数学系任善强副教授在百忙之中仔细审阅了全书，提出了许多建设性修改意见，并提供了附录中的数学模型竞赛资料，甘肃工业大学严克明副教授给予了大力支持和帮助，作者在此向他们一并表示衷心的感谢和崇高的敬意。尤其还要感谢我的妻子曾丽同志，不辞辛劳，为我打印了本书的全部手稿，她的出色的协作和宝贵的帮助使我真正知道了什么才是最佳的合作对策模型。

陈义华

1994 年 4 月于兰州

目　录

第一章 数学模型概述

现代科学技术发展的一个重要特征是各门科学技术日益精确化、定量化。数学已经更深地渗透到各种科学技术领域，数学模型正是从定量的角度去分析所遇到的实际问题，为解决实际问题提供一种数学方法，现在已越来越受到人们的重视。例如，为什么发射人造卫星要用三级火箭？在战争还没有消灭的今天，武器的发展方向是大型化还是高精度？人口增长，已成为全球性的社会问题，如何制定我国的人口政策？……，所有这些都需要建立数学模型加以论证，为决策者提供理论依据。

数学模型是本书的主题，重点是讨论如何建立数学模型，学习怎样从碰到的实际问题中，做出一些必要的简化和假设，运用数学工具得到一个数学结构，再通过数学上的结构揭示在实际问题中的含义。

本章将介绍数学模型在科技工程中的作用，模型、数学模型的概念及大致分类，通过建模实例说明建立数学模型的一般步骤和原则。

§1-1 数学模型与科技工程

1. 科学发展与数学模型

科学的发展是离不开数学的，数学模型在其中又起着重要的作用。无论是自然科学还是社会科学，在进行理论研究时，都不是直接研究真实现象，而是先研究它们的模型——忽略一些次要因素的一种近似写照，然后就是通过对模型的研究来阐明真实世界的客观规律的。

自从牛顿将力学法则用数学模型表示出来之后，在包含物理学在内的自然科学领域中，出现了这样一种趋势：致力于用单纯的数学式表示自然法则，求出它们的解，并与实验和观测结果相比较去理解现象。因而在科学发展史上，有一段时间学者们认为："科学的本质是数学"。例如，反映物体机械运动的基本客观规律——牛顿三定律，可用明确而紧凑的数学式子表示；反映电路理论的基本规律——基尔霍夫定律也可用数学式子来表示；马克思用公式 $\mathrm{I}(V+m)=\mathbf{I}\,c$ 来描述社会再生产的基本规律。这种反映某一类现象客观规律的数学式子就是这些现象的数学模型。

一个学科的内容能用数学来分析和表示，这是该学科精密化和科学化的一种表现。利用数学这个有效的工具，可以深刻地认识客观现象的本质，预测未来，促进科学的发展。

随着电子计算机的问世与发展，许多学科的计算分支都在迅速发展，如计算物理学、计算化学等分支的出现和发展，导致需要建立有关系统的数学模型。目前，在许多领域中，要对有关问题进行计算，必须先建立该问题的数学模型，没有数学模型，计算就不可能进行。也可以这样认为：今天，没有数学模型，许多基本的生产活动便无法进行，更不要说计算机的应用了。

2. 工程技术与数学模型

数学模型现在已越来越受到人们的重视，这不仅是因为数理等学科应用它，而且工程学等

领域也视其为一种重要的方法。在工程学领域，以前认为实验方法是至高无尚的，但现在已把数学模型视为与实验同等重要，甚至是更好的一种方法。随着科学技术的进步，数学模型在工程技术上所起的作用也日益增大。

从设计上来看，要进行理论设计首先要建立生产过程的正确的数学模型，否则会给设计以及生产带来很大的损失。如在一些化学工业中，需要通过建立模型、分析计算来决定设备的大小，原料的数量，调节温度等问题。又例如，1979 年 3 月美国原子能委员会关闭了 5 座核电站，这是因为设计中所选取的冷却水管道系统的数学模型不妥，使得模拟计算结果的可靠程度不够，不能承受地震等的冲击而导致关闭，可见数学模型对工程设计十分重要。

在生产过程中，为了分析和改进生产中出现的问题，采用先建立数学模型，然后在计算机上进行模拟计算的办法来代替实验，可以节约较多的人力、财力和时间，还可以避免发生故障或危险，甚至完成实验不可能完成的任务。例如，阿波罗卫星返回地球时在高 120 千米的大气层上空以 11 千米/秒的速度，仅用 30 分种左右时间就回到地面，若用风洞来实验，必须有极大的设备，这实际上无法实现，就只有用建立数学模型的方法来解决。在比较精密的生产中，常用电子计算机控制和指挥生产，这也需要建立反映生产过程的数学模型。

总之，随着科学技术日益发展，生产要求日益精确，在设计、控制生产等各个环节都越来越多地需要了解有关的数学模型。

§1-2 数学模型及其分类

1. 模型及其分类

在自然科学、工程技术和社会科学的许多领域中，定量的系统分析，系统综合已受到人们更多的重视。模型是开展这些工作的有效工具，模型化则是开展这些工作的前提和基础。

一切客观存在的事物及其运动形态统称为实体，模型是对实体的特征及其变化规律的一种表示或者抽象，而且往往是对实体中那些所要研究的特定的特征定量的抽象，可以说，模型是把对象实体通过适当的过滤，用适当的表现规则描绘出的简洁的模仿品，通过这个模仿品，人们可以了解到所研究实体的本质，而且在形式上便于人们对实体进行分析和处理。

通常，对模型有 4 个基本要求：目的性、清晰性、准确性、经济性。

把实体(对象)变为模型的过程称为建模或模型化。

按模型的表达形式，一般可粗略地分为实体模型和符号模型两大类。

实体模型包括：实物模型(如城市模型、作战沙盘、船舶模型等)和模拟模型(如地图、电路图、电路模拟机械运动等)。

符号模型也称语言模型，这是模型中最丰富多采的一大部分。包括数学模型，结构模型，仿真模型及诸如化学、音乐、美术等学科的符号模型，也包括用自然语言表达的直观描述式模型。

除上述分类外，还可按其形式、结构、用途和对象等分类、在众多分类的模型中，数学模型是发展最快，内容最丰富、最受人偏爱的一种。

2. 数学模型及其分类

什么是数学模型？数学模型指对于现实世界的某一特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。它或者能解释特定现象的现

实性态，或者能预测对象的未来状态，或者能提供处理对象的最优决策或控制。

在这里，数学模型被看成是一个能实现某个特定目标的有用工具。从本质上说，数学模型是一个以“系统”概念为基础的，关于现实世界的一小部分或几个方面抽象的“映象”。

数学模型的特征是：

第一，它是某事物为一种特殊目的而作的一个抽象化、简单化的数学结构，这意味着扬弃、筛选，是舍弃次要因素，突出主要因素的主要结果；是事物的一种模拟，虽源于现实，但非实际的原型，而又高于现实。

第二，它是数学上的抽象，在数值上可以作为公式应用，可以推广到与原物相近的一类问题。

第三，可以作为某事物的数学语言，可以译成算法语言，编写程序进入计算机。

通常所谓的处理事物和过程的模型化方法，往往就是为之建立数学模型来处理。

常见的数学模型分类有以下几种：

按数学模型的功能可分为定量的和定性的。

按数学模型的目的可分为理论研究的，预期结果的和优化的。

按数学模型变量之间的关系可分为代数的，几何的和积分的。

按数学模型的结构可分为分析的，非分析的和图论的。

按数学模型所研究对象的特性可分为确定的和随机的，静态的和动态的，连续的和离散的，或线性的和非线性的。

按数学模型所用的数学方法可分为初等模型，微分方程模型，优化模型，控制论模型，逻辑模型，扩散模型，……

按数学模型研究对象的实际领域可分为人口模型，交通模型，生态模型，生理模型，经济模型，社会模型，工程系统模型，……

按数学模型研究对象的了解程度可分为白箱模型，灰箱模型和黑箱模型。

还有一些其他分类方法，这里只是为了叙述和阅读方便起见，列举出几种常见分类方法，而模型的分类问题并没有什么重要意义，本课程主要讨论数学模型的建立，请读者把注意力集中在每个模型本身的内容上，在不致于混淆前提下，以后数学模型就简称模型。

§1-3 建 模 实 例

本节所讲的两个例子，一个是理论上的结果，一个是工程中的问题，对于数学模型的用途和建模方法都有一定代表性，首先介绍给读者，以便对数学模型全貌的了解有所收益。

例1.3.1 万有引力定律

牛顿(Newton Issac1642～1727)是世界上伟大的科学家，在物理学特别是力学中有卓越的贡献，而且在数学上，他是微积分的两大奠基人之一。万有引力定律的发现是牛顿在力学上的重大贡献之一。牛顿在研究力学的过程中发明了微积分，又成功地在开普勒(Kepler Johannes1571～1630)三定律的基础上运用微积分推导了万有引力定律。这一创造性成就可以看作是历史上最著名的数学模型之一。

历史背景 15世纪下半叶，人类社会发展到了一个新阶段，商品经济的繁荣促进了航海业的发展，哥伦布、麦哲伦，……扬帆远航，在强大的社会需要的推动下，天文观测的精确程度不断提高。在大量实际观测数据面前，一直处于天文学统治地位的“地心说”开始动摇了，科学家对“地心说”开始产生了疑惑。

哥白尼在天文观测的基础上，冲破宗教统治和“地心说”的束缚，提出了“日心说”，这是天文学乃至整个科学的一大革命。但是由于历史条件和科学水平的限制，他的理论尚有不少缺陷，如他认为行星绕太阳的运行轨道是圆形的。

丹麦天文学家第谷·布拉赫(Tycho Brahe1546～1601)对行星运动作了大量观测，积累了20年的资料。他的助手开普勒分析研究了这些资料，运用数学工具，发现火星的实际位置与按照哥白尼理论计算的位置相差8弧分。在深入分析的基础上，于1609年归纳出开普勒第一、二定律。为了寻求行星运动周期与轨道尺寸的关系，根据老师的大量而且非常精确的天文观测资料，反复研究，终于在1619年发现了行星运行周期与到太阳距离之间的关系——开普勒第三定律。这就是天文学上至今仍然十分著名的开普勒三定律：

(1)行星的轨道是一个椭圆，太阳位于其中一个焦点上。

(2)行星运行过程中，行星和太阳的连线在单位时间内扫过相等的面积。

(3)各行星公转周期的平方同轨道长半轴的立方成正比。

上述定律只是阐明行星的运动情况，但并没有解释为什么这样运动。那么，是什么力量作用在行星上，使它的速度不断改变并保持在椭圆轨道上运动呢?

牛顿认为一切运动都有其力学原因，开普勒三定律的背后必定有某个力学规律在起作用。他要构造一个模型加以解释。他以微积分(当时称流数法)为工具，在开普勒三定律和牛顿力学第二定律的基础上，演绎出著名的万有引力定律。这一定律成功地定量解释了许多自然现象，已为其后一系列的观测和实验数据所证实，成为物理学中的一个基本定律。

万有引力定律的建立

首先建立以太阳为原点的极坐标系(r,θ)，向径r表示行星位置，如图1-1所示。

再把开普勒三定律作为假设Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，牛顿第二定律作为假设Ⅳ，并分别用数学式子表示：

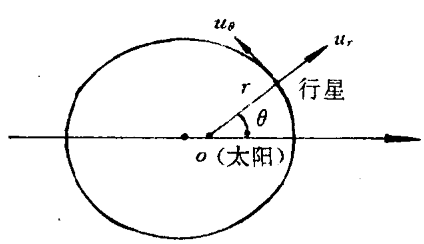

图1-1 极坐标系中的行星运行轨道

Ⅰ. 轨道方程为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \qquad (1.3.1)$$

及

$$p=\frac{b^2}{a},b^2=a^2(1-e^2) \qquad (1.3.2)$$

a为长半轴，b为短半轴，e为离心率。

Ⅱ.
$$\frac{1}{2}r^2\theta'=A \qquad (1.3.3)$$

A是单位时间内向径r扫过的面积，对某一颗行星而言，A是常数，$\theta'=\frac{d\theta}{dt}$。

Ⅲ.
$$T^2=ka^3 \qquad (1.3.4)$$

T是行星运行周期，k是绝对常数。

Ⅳ. $$\boldsymbol{f} \propto \boldsymbol{r}'' \tag{1.3.5}$$

这表示太阳和行星间的作用力 $\boldsymbol{f}$ 与加速度 $\boldsymbol{r}''$ 的方向一致，与 $\boldsymbol{r}''$ 的大小成正比。

以上假设中把所有的行星甚至太阳本身都当作质点来处理。这是进行数学表述时所作的一种近似或理想化，因为太阳的半径比太阳到行星的距离小得多，因而这种近似是合理的。

下面从这四条假设出发，推出万有引力定律：太阳与行星间作用力的方向是太阳和行星连线方向，指向太阳；大小与太阳-行星间距离的平方成反比，比例系数是绝对常数。

为此，如图1-1，选单位向量

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_r = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1.3.6}$$

于是

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r \tag{1.3.7}$$

由(1.3.6)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'_r = -\sin\theta \cdot \theta' \boldsymbol{i} + \cos\theta \cdot \theta' \boldsymbol{j} = \theta' \boldsymbol{u}_\theta \\ \boldsymbol{u}'_\theta = -\cos\theta \cdot \theta' \boldsymbol{i} - \sin\theta \cdot \theta' \boldsymbol{j} = -\theta' \boldsymbol{u}_r \end{cases} \tag{1.3.8}$$

将式(1.3.7)对 t 求导，利用式(1.3.8)便得到行星运动的速度和加速度

$$\boldsymbol{r}' = r'\boldsymbol{u}_r + r\theta'\boldsymbol{u}_\theta \tag{1.3.9}$$

$$\boldsymbol{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\boldsymbol{u}_r + (r\theta'' + 2r'\theta')\boldsymbol{u}_\theta \tag{1.3.10}$$

根据式(1.3.3)，得

$$\theta' = \frac{2A}{r^2} \tag{1.3.11}$$

$$\theta'' = \frac{-4Ar'}{r^3} \tag{1.3.12}$$

由式(1.3.11)和式(1.3.12)可知式(1.3.10)右端第二项 $r\theta''+2r'\theta'=0$，于是式(1.3.10)为

$$\boldsymbol{r}'' = (r'' - r\theta'^2)\boldsymbol{u}_r \tag{1.3.13}$$

再对式(1.3.1)求导，利用式(1.3.11)可以得到

$$r' = \frac{2A}{p}e\sin\theta \tag{1.3.14}$$

$$r'' = \frac{4A^2}{r^3}\left(1 - \frac{r}{p}\right) \tag{1.3.15}$$

将式(1.3.11)、(1.3.15)代入式(1.3.13)整理可得

$$\boldsymbol{r}'' = -\frac{4A^2}{pr^2}\boldsymbol{u}_r \tag{1.3.16}$$

比较式(1.3.5)、(1.3.7)和(1.3.16)可知：太阳对行星的作用力 $\boldsymbol{f}$ 的方向与向径 $\boldsymbol{r}$ 方向正好相反，即 f 在太阳-行星的连线方向，指向太阳；$\boldsymbol{f}$ 的大小与太阳-行星间距离的平方成反比。

因 A，p 都不是绝对常数，它们的数值取决于所讨论的是哪一颗行星，所以还需进一步证明式(1.3.16)中的比例系数 $\frac{A^2}{p}$ 为绝对常数。

由 A、a、b 定义，那么任一行星的运行周期 T 应满足

$$TA = \pi ab \tag{1.3.17}$$

再由式(1.3.2)、(1.3.4)和(1.3.17)可得到

$$\frac{A^2}{p}=\frac{\pi^2}{k} \tag{1.3.18}$$

π 和 k 皆为绝对常数，这说明引力的比例系数对“万物”是同一个常数，从而得到了著名的万有引力定律：$f \propto -\frac{\pi^2}{k}\cdot\frac{1}{r^2}u_r$。

讨论 当牛顿第二定律式(1.3.5)写成 $f=mr''$ 形式，可得引力的大小为

$$f=\frac{4A^2m}{pr^2}$$

常数$\frac{4A^2}{p}$取决于太阳性质(因推导是以太阳为焦点)，m 为行星质量。

牛顿设想这种引力对地球与月球也适用，对任何两块物质都适用。这个大胆的设想立即引出了问题：物体的什么性质决定它对其他物体的引力呢？地球的什么性质决定地球对物体的引力常数$(\frac{4A^2}{p})_{地}$呢？又是什么决定太阳的$(\frac{4A^2}{p})_{太}$呢？或许这常数取决于物体的某一种新性质。如果引力是一切物体的一种性质，那就有理由假设常数$\frac{4A^2}{p}$取决于物体所含的质量，最简单的假设是$\frac{4A^2}{p}$与物体的质量成正比。于是假设

$$(\frac{4A^2}{p})_{太}=G\cdot m_{太} \qquad (\frac{4A^2}{p})_{地}=G\cdot m_{地}$$

这样，便导出我们熟知的万有引力公式

$$F=G\cdot\frac{m_1m_2}{r^2}$$

其中 r——物体间距离，m_1、m_2——两物体质量。

后经实践(包括计算、观察)检验知，G 这个常数与是什么物体无关，与两物体在什么地方及运动状态均无关。G 是质量与$(\frac{4A^2}{p})$的比例因子。据实验测定出万有引力常数

$$G=6.67\times10^{-11}\ 牛\cdot米^2/千克^2$$

评注 简洁优美的数学处理令人惊异，尤其是当这种理论与冗长乏味的观察结果相比较时更是如此。不过，若没有这种冗长乏味的观察结果，能够想象到这一强有力的定律吗？显然，这是不可能的。另外，若没有当时新发明的微分技巧，也不可能作出上述的计算。

“开普勒的全部推理的基础是他最早所觉察到的速度与距离之间反比关系的重要性，这一反比关系乃是一种有朝一日会导致角动量守恒定律的先兆，正是上述预感，引导开普勒通过长达900页的计算得到了比已有的任何理论都要优越的一个行星理论，……撇开机遇与幸运不说，开普勒取得成功的要素是：他认为事物是可知的那种信念；他对事业的献身精神，这促使他作了4年时间的推理和计算；他最初得到的预感的正确性，以及借助于这种正确预感从事物的千头万绪中理出头绪的能力”(摘自1972年3月号 Scientific American(Vol. 226，P. 92))。

从演算角度看到，为了达到我们的结论，“必须自始至终记住所得结果的物理解释，并且要有十分纯熟的运算技巧”。

从万有引力定律产生的历史中，还可得到另一启迪，即进一步证明需要恰当的观念，并且精通数学技巧。牛顿将他的定律应用于月球绕地球的运动上，以此来检验他的定律的正确性便是如此。

在正确假设的基础上，运用数学的演绎方法建立模型，对自然科学的发展能够发挥多么巨

大的作用。

例1.3.2　发射卫星为什么用三级火箭

发射卫星为什么不用一级火箭而必须用多级火箭?为什么一般都采用三级火箭系统?我们希望构造一个数学模型来加以论证。

火箭是一个复杂的系统,为了使问题简单明了,这里只从动力系统及整体结构上分析,并假定引擎是足够强大的。

Ⅰ.为什么不能用一级火箭发射人造卫星

(1)卫星进入轨道,火箭所需的最低速度

将问题理想化,假设

(a)卫星轨道为过地球中心某一平面上的圆,卫星在此轨道上以地球引力作为向心力绕地球作平面圆周运动。如图1-2所示。

(b)地球是固定于空间中的均匀球体,其它星球对卫星引力忽略不计。

设地球半径为 R,中心为 O,地球质量看成集中于球心(据地球为均匀球体假设),曲线 C 为地球表面,C' 为卫星轨道,其半径为 r,卫星质量为 m,据牛顿定律,地球对卫星的引力为

$$F = G \cdot \frac{m}{r^2} \tag{1.3.19}$$

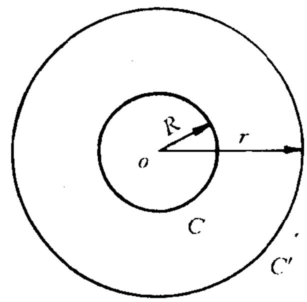

图1-2

其中 G 为引力常数,可据卫星在地面的重量算出,即

$$\frac{Gm}{R^2} = mg, \qquad G = gR^2$$

代入式(1.3.19)得

$$F = mg \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{1.3.20}$$

由假设(a),卫星所受到的引力即它作匀速圆周运动的向心力,故又有

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r} \tag{1.3.21}$$

从而速度为

$$v = R \cdot \sqrt{\frac{g}{r}} \tag{1.3.22}$$

取 $g = 9.81\text{m/s}^2$,$R = 6400\text{km}$,可算出卫星离地面高度分别为100,200,400,600,800和1 000km时,其速度应分别为:7.86km/s,7.80km/s,7.69km/s,7.58km/s,7.47km/s及7.37km/s。

(2)火箭推进力及速度的分析

火箭简单模型是由一台发动机和一个燃料仓组成,燃料燃烧产生大量气体从火箭末端喷出,给火箭一个向前的推力。火箭飞行时要受重力与空气阻力影响,且地球自转与公转,火箭升空后作曲线运动,为使问题简化,仍将问题理想化。

假设　火箭在喷气推动下作直线运动,火箭重力及空气阻力均不计。

设在 t 时刻火箭质量为 $m(t)$,速度为 $v(t)$,均为 t 的连续可微函数。由 Taylor 展式有

$$m(t+\triangle t)-m(t)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\triangle t+o(\triangle t^2) \tag{1.3.23}$$

这个质量的减少，是由于燃料燃烧喷出气体所致。设喷出气体相对于火箭的速度为 u（就某种燃料而言为常数），则气体相对于地球运动速度为 $v(t)-u$。据动量守恒定律

$$m(t)v(t)=m(t+\triangle t)v(t+\triangle t)-(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\triangle t+o(\triangle t^2))(v(t)-u) \tag{1.3.24}$$

从式(1.3.23)、(1.3.24)可得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{1.3.25}$$

由此解得

$$v(t)=v_0+u\cdot\ln(\frac{m_0}{m(t)}) \tag{1.3.26}$$

此处 $v_0=v(0)$，$m_0=m(0)$。

式(1.3.25)表明火箭所受推力等于燃料消耗速度与气体相对于火箭运动速度的乘积。式(1.3.26)表明，在 v_0 和 m_0 一定下，$v(t)$ 由喷发速度（相对于火箭）u 及质量比 $\frac{m_0}{m(t)}$ 决定。这为提高火箭速度找到了正确的途径：提高 u（从燃料上想法），减少 $m(t)$（从结构上想法）。完全合乎实际。

(3)一级火箭末速度上限（目前技术条件下）

火箭-卫星系统的质量可分成三部分：m_p（有效负载，如卫星），m_F（燃料质量），m_s（结构质量，如外壳，燃料容器及推进器）。

在发射一级火箭运载卫星时，最终（燃料耗尽）质量为 m_p+m_s，由式(1.3.26)知末速度为($v_0=0$)

$$v=u\cdot\ln(\frac{m_0}{m_p+m_s}) \tag{1.3.27}$$

由于目前技术条件下，很难做到 $m_s\leqslant\frac{1}{8}m_F$，即 $\frac{m_s}{m_F+m_s}\geqslant\frac{1}{9}$。

假设 $m_s=\lambda(m_F+m_s)=\lambda(m_0-m_F)$，代入式(1.3.27)得

$$v(t)=u\cdot\ln[\frac{m_0}{\lambda m_0+(1-\lambda)m_p}] \tag{1.3.28}$$

根据现有技术条件和燃料性能，u 只能达到3km/s，即使火箭不带卫星，也不计空气阻力及火箭本身重量，取 $\lambda=\frac{1}{9}$，由式(1.3.28)得

$$v\leqslant u\cdot\ln\frac{1}{\lambda}=u\cdot\ln 9\approx 6.6\mathrm{km/s}$$

因此，用一级火箭发射人造卫星，至少目前条件下无法达到在相应高度所需的速度。

原因分析 火箭推进力在加速着整个火箭，其实际效益越来越低，最后几乎是在加速着最终毫无用处的结构质量（包括空油箱）。所以，应该改进火箭设计。

Ⅰ.理想的火箭模型

理想的火箭模型应该是随着燃料燃烧随时抛弃无用的结构。

假设 在 t 到 $t+\triangle t$ 时间内，丢掉总质量为1（包括结构质量和燃掉燃烧质量），设丢弃结构质量为 $\lambda(0<\lambda<1)$，燃掉的质量为 $1-\lambda$，即 λ 与 $(1-\lambda)$ 按比例同时减少。