非线性电路分析

胡健栋　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书对近年来发展的分段线性分析作了系统而完整的叙述和讨论，书中有些部分是编者多年研究和教学实践的结果。全书共五章，第一章讨论非线性电路的一般问题；第二章讨论非线性网络的分段线性逼近、函数的性质和求解方法；后三章分别讨论分段线性函数的三种不同的表示方法、性质和求解问题。本书是目前对分段线性分析法讨论得比较完整的第一本书。

分段线性分析广泛适用于各学科对非线性现象的分析。对电子、通信、信息科学以及动力、自动控制、机械、土木、管理工程等学科领域有关专业高年级学生，研究生和科技人员都是一本有益的参考书。

责任编辑　王忠民

非线性电路分析

胡健栋　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.25 字数 270 000

1990 年 6 月第 1 版　1990 年 6 月第 1 次印刷

印数 0001—2,000

ISBN7-04-002217-6/TN·116

定价 3.00 元

目　录

第一章　非线性电路

§1　非线性多端元件……1
1-1　n端口和$n+1$端体……1
1-2　允许信号偶……2
1-3　代数n端口和动态n端口……3
1-4　四种基本非线性电路元件……3
§2　n端口的性质……4
2-1　两端元件的表示……4
2-2　代数n端口的表示……6
2-3　广义坐标……7
2-4　n端口的控制量……8
2-5　n端口的映射关系……8
2-6　动态n端口的表示……10
2-7　混合表示的存在定理……12
2-8　代数n端口的特性……13
§3　电路的方程……15
3-1　电路的电压图和电流图……15
3-2　图形的矩阵……18
3-3　列表分析……21
3-4　节点分析……22
3-5　割集分析……24
3-6　回路和网孔分析……27
3-7　改进节点分析……29
3-8　混合分析……31
3-9　非线性电阻网络的混合方程……34
§4　非线性电阻n端口的性质……36
4-1　非线性电阻n端口的完备性……36
4-2　动态非线性网络的状态方程……41
4-3　自治与非自治网络……43

4-4 自治网络的稳定性……45
4-5 非自治网络的解的性质……46
附录 A……48
§1 集合……48
1-1 笛卡儿积……48
§2 映射……49
2-1 映射……49
2-2 函数的图形……50
2-3 值域……51
2-4 合成函数……52
2-5 反函数……53
2-6 同胚……54
2-7 C^k 微分同胚……55
附录 B……55
§1 矩阵的正定性……55
1-1 二次型……55
1-2 标准型……56
1-3 正定二次型……57
§2 P 和 P_0类矩阵……58
2-1 P矩阵……58
2-2 P_0 类矩阵……58
2-3 性质……59
本章参考文献……59

第二章 网络的分段线性模型

§1 非线性元件的线性化模型……60
1-1 非线性元件的分段线性表示[4]……60
1-2 非线性元件的分段线性模型[1]……64
1-3 分段线性模型的建立[1][2]……67
§2 线性插值逼近[3]……69
2-1 线性插值……69
2-2 线性插值的误差……71
2-3 等间距的插值公式……73

2-4 极小极大逼近……………………………………………………75
§3 分段线性函数[5]……………………………………………………78
3-1 空间的分割……………………………………………………78
3-2 分段线性函数……………………………………………………80
3-3 利普希茨(Lipschitz)条件……………………………………………………81
3-4 连续性……………………………………………………84
3-5 同胚……………………………………………………87
3-6 全局同胚的充分条件……………………………………………………90
3-7 同胚的必要和充分条件[6]……………………………………………………95
3-8 同胚的另一充分条件……………………………………………………98
§4 分段线性网络的求解……………………………………………………100
4-1 定义……………………………………………………100
4-2 网络方程的性质……………………………………………………102
4-3 求解说明[5]……………………………………………………104
4-4 过境的充分条件[5]……………………………………………………107
4-5 过境的动态过程[10]……………………………………………………108
4-6 角点问题[5][6]……………………………………………………117
4-7 起始点摄动法[10]……………………………………………………118
4-8 角点问题的特性[10]……………………………………………………121
4-9 奇异Jacobi矩阵[10]……………………………………………………125
4-10 算法……………………………………………………128
本章参考文献……………………………………………………129

第三章 单形插值分段线性分析

§1 单纯复形和映射;多面体[1]……………………………………………………130
1-1 单形……………………………………………………130
1-2 单形的点的表示……………………………………………………132
1-3 单纯复形……………………………………………………136
1-4 映射……………………………………………………139
1-5 三角剖分和多面体……………………………………………………141
§2 非线性多端口的单形插值表示[2][4]……………………………………………………142

2-1 电路变量空间的单形剖分……………………………… 142
2-2 分段线性逼近……………………………………………… 145
2-3 非线性两端元件的单形插值逼近……………………… 148
2-4 n 端口的单形插值表示………………………………… 150
2-5 分段线性函数的有效区………………………………… 152
§3 分段线性电阻电路的方程[2][3][4]……………………… 156
3-1 列表法…………………………………………………… 156
3-2 节点法…………………………………………………… 160
3-3 割集法…………………………………………………… 165
3-4 网孔和回路法…………………………………………… 166
3-5 改进节点法……………………………………………… 168
§4 分段线性方程的解[2][5]………………………………… 172
4-1 求解曲线………………………………………………… 172
4-2 过境的单形插值描述…………………………………… 174
4-3 算法……………………………………………………… 176
4-4 举例……………………………………………………… 177
4-5 算法的收敛……………………………………………… 180
4-6 结论……………………………………………………… 182
本章参考文献……………………………………………… 183

第四章 规范分段线性分析

§1 分段线性函数的规范形式……………………………… 185
1-1 导言……………………………………………………… 185
1-2 连续的一维标量函数 $f: R^1 \to R^1$[1]……………… 187
1-3 带有限跳跃的不连续一维标量函数[1]………………… 191
1-4 多值关系的规范表示[1][4]……………………………… 194
1-5 n 维标量函数 $f: R^n \to R^1$[2]……………………… 198
1-6 n 维矢量函数 $\boldsymbol{f}: R^n \to R^n$[3]………………… 203
§2 规范表示的性质[1][5]…………………………………… 206
2-1 性质 1…………………………………………………… 207
2-2 性质 2…………………………………………………… 207

2-3 性质 3 …… 208
2-4 性质 4 …… 209
2-5 性质 5 …… 211
§3 运算规则[1][5] …… 212
3-1 导言 …… 212
3-2 求反函数规则 1 …… 214
3-3 求反函数规则 2 …… 216
3-4 合成规则 3 …… 216
3-5 合成规则 4 …… 219
3-6 合成规则 5 …… 223
3-7 合成规则 6 …… 224
3-8 举例 …… 224
§4 常用元件的规范模型[5] …… 225
4-1 分段线性单变量控制元件 …… 225
4-2 分段线性多端口 …… 227
4-3 开关支路 …… 228
4-4 分段线性多值特性元件 …… 228
§5 电路方程的规范式 …… 231
5-1 列表分析 …… 232
5-2 节点分析 …… 233
5-3 割集分析 …… 237
5-4 回路和网孔分析 …… 238
5-5 改进节点分析 …… 241
§6 规范Katzenelson算法[3][7] …… 243
6-1 收敛条件 …… 243
6-2 说明[5][6] …… 245
6-3 算法 …… 248
6-4 举例 …… 250
6-5 角点问题[3] …… 257
6-6 格形结构[7] …… 259
6-7 多解问题[7] …… 265

本章参考文献…………………………………………268

第五章 分段线性电路的状态模型法

§1 分段线性网络[1]…………………………………………270
1-1 状态模型的一般概念…………………………………………270
1-2 负载为理想两极管的多端口网络模型[4]…………………………………………272
1-3 多端口的解的意义…………………………………………275
1-4 P 和 P_0 矩阵的等效网络性质…………………………………………278
1-5 混合表示的变换…………………………………………281
1-6 多端口 $\hat{N}$ 的混合结构…………………………………………284
1-7 网络性质…………………………………………290
§2 分段线性映射的状态模型[1]…………………………………………294
2-1 映射的状态模型…………………………………………294
2-2 状态模型的网络性质…………………………………………299
2-3 状态模型的结构…………………………………………300
2-4 状态模型与仿射映射…………………………………………303
2-5 在最小状态模型中的邻接区域…………………………………………306
§3 常用器件的分段线性模型[1][3]…………………………………………309
3-1 电压控制开关…………………………………………309
3-2 MOS 管…………………………………………311
3-3 数字门…………………………………………316
3-4 阈门…………………………………………318
3-5 运算放大器…………………………………………319
3-6 分段线性模型的连接…………………………………………320
§4 状态模型的解…………………………………………327
4-1 Katzenelson 算法…………………………………………328
4-2 补主元法…………………………………………331
4-3 Lemke 算法…………………………………………332
4-4 互补解的条件…………………………………………335
4-5 多解的确定…………………………………………339
4-6 角点跟踪算法…………………………………………343
本章参考文献…………………………………………346

第一章 非线性电路

在讨论非线性电路的分段线性分析之前，先研究一下非线性电路的表示方法，非线性电路的数学模型的一些特性。在第二章可以看到，这些性质与分段线性电路的性质是类似的，它们是求解非线性电路的理论基础。

为了得到非线性电路的表示方法，我们先介绍多端元件的一般表示。

§1 非线性多端元件

一个电路包含哪怕一个非线性元件就构成非线性电路。非线性元件的性质和它在电路中的拓扑连接影响电路的性质。

一般的元件是两端体，但是为了普遍起见，我们讨论 $n+1$ 端元件或 n 端口。

1-1 n 端口和 $n+1$ 端体[1]

一个电路有 n 个端口接受信号，可以是 $n+1$ 端体或 n 端口如图 1-1 所示。

在图 1-1(a) 中，$n+1$端体有一公共端(第$n+1$端)作为参考端，其它各端的电压 u_j, $j=1,2,\cdots,n$ 都相对它测量。同时，各端的电流 i_j, $j=1,2\cdots,n$ 都通过公共端，也即 $i_{n+1}=\sum\limits_{j=1}^{n}i_j$。

在图 1-1(b) 中，n 端口有 n 对端子。每对端子有一对变量$(u_j$,

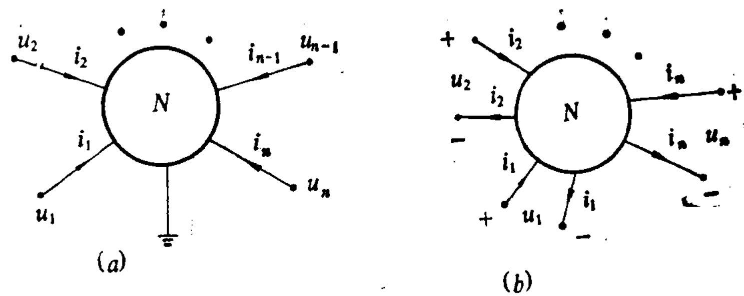


图 1-1　多端电路　　(a) $n+1$ 端体　　(b) n 端口

i_j), $j=1,2,\cdots,n$。n 端口有 $2n$ 个端子。

如果把 $n+1$ 端体的第 $n+1$ 个端子看作 n 个短连的端子，则 $n+1$ 端体就是 n 端口。所以从基本性质着眼，$n+1$ 端体与 n 端口是相同的，因此，下面只从 n 端口出发讨论多端体的性质。

1-2　允许信号偶

令 N 表示 n 端口。N 的每个端口有一对电磁变量，称端口变量偶。电磁变量可以是电压 $u_j(t)$、电流 $i_j(t)$、磁通（或磁链）$\Phi_j(t)$ 或电荷 $q_j(t)$, $j=1,2,\cdots,n$。

由于这四个变量中，u_j 与 Φ_j 和 i_j 与 q_j 这两对变量在任何 N 中有积分关系：

$$\Phi_j(t) \triangleq \Phi_j(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_j(\tau)\,d\tau$$

$$q_j(t) \triangleq q_j(t_0) + \int_{t_0}^{t} i_j(\tau)\,d\tau$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

所以称 u_j 与 Φ_j 和 i_j 与 q_j 是动态相关的。

端口变量偶是从四个电磁变量中选出一对变量，这是有约束条件的。它必须从电压系 $u_j(t)$ 和 $\Phi_j(t)$ 选一个，从电流系 $i_j(t)$ 和 $q_j(t)$ 中选一个，总共有四种组合：(u_j, i_j)、(i_j, Φ_j)、(u_j, q_j)

和 (Φ_j, q_j)。满足这种约束条件的变量偶称动态无关变量偶，为了一般化起见它们用偶(ξ,η)表示。(ξ,η)的成分是

$$(\xi_j, \eta_j) \in \{(u_j, i_j), (i_j, \Phi_j), (u_j, q_j), (\Phi_j, q_j)\} \qquad (1\text{-}1)$$

如在整个时间区间$[t_0, \infty)$内测得 N 的端口变量偶 (ξ,η)是一对动态无关的矢量波形$(\xi(t), \eta(t))$，则它称容许信号偶。

相对同一时刻 t_0 测得的所有容许信号偶 $(\xi(\cdot), \eta(\cdot))$ 的全体叫做 N 的端口关系。

1-3 代数 n 端口和动态 n 端口

设 N 是 n 端口，其端口关系可用动态无关矢量偶(ξ,η)表示。于是，假定存在两个容许信号偶 $(\xi_1(\cdot), \eta_1(\cdot))$和$(\xi_2(\cdot), \eta_2(\cdot))$，则对任一 $T \in [t_0, \infty)$，如毗连偶

$$(\hat{\xi}(t), \hat{\eta}(t)) \triangleq (\xi_1(t), \eta_1(t)) \quad t \leq T \qquad (1\text{-}2a)$$

$$\triangleq (\xi_2(t), \eta_2(t)) \quad t > T \qquad (1\text{-}2b)$$

也是容许信号偶，此 N 称作代数 n 端口。否则，N 称动态 n 端口。

简言之，N 的端口关系用 ξ 和 η 之间的代数关系表示的是代数 n 端口，用 ξ 和 η 之间的动态关系表示的称动态 n 端口。大体说，代数 N 的端口的 ξ 与 η 之间的关系在任何时刻 t 可以用只包含 $\xi(t)$和$\eta(t)$的代数方程表示，不包含它们的导数和积分。电阻多端元件是最常用的代数 n 端口。

1-4 四种基本非线性电路元件

代数 n 端口 N 可以用 $R^n \times R^n$ 中的点的子集表示：

$$D \subset R^n \times R^n \qquad t \in [t_0, \infty) \qquad (1\text{-}3)$$

而 N 的容许信号偶$(\xi(\cdot), \eta(\cdot))$有

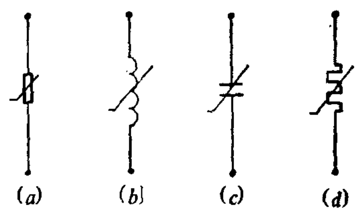
$$(\xi(t),\ \eta(t))\in D \qquad \forall t\in[t_0,\infty) \tag{1-4}$$

如果(ξ,η)的各分量属于同一类型，则(ξ,η)只能是下列四种组合的一种，即

$$(\xi,\eta)\in\{(u,i),(i,\Phi),(u,q),(\Phi,q)\} \tag{1-5}$$

因此，N 可以按它的端口关系是 u,i 之间、Φ,i 之间、q,u 之间，还是 Φ,q 之间的代数关系而分为 n 端口电阻器、电感器、电容器或忆阻器。

在 $n=1$ 时，N 变为一端口或两端元件。它的四种基本元件的符号见图 1-2。



(*a*)电阻器　(*b*)电感器　(*c*)电容器　(*d*)忆阻器

图 1-2　四种两端元件的符号

实际的非线性器件可以用这四种基本元件模拟。有许多非线性器件在一定条件下可以用其中的一种模拟[1]。这四种非线性元件中，头三种在实际电路中用得最多。

§2　n 端口的性质

2-1　两端元件的表示

设两端元件的容许信号偶是$(\xi(t),\eta(t))$，$t\in[t_0,\infty)$。在同一起始时刻 t_0 测得元件的所有容许信号偶$(\xi(\cdot),\eta(\cdot))$的集合称为它的元件关系，可表示为隐式：

$$f(\xi(t),\eta(t))=0 \tag{1-6}$$

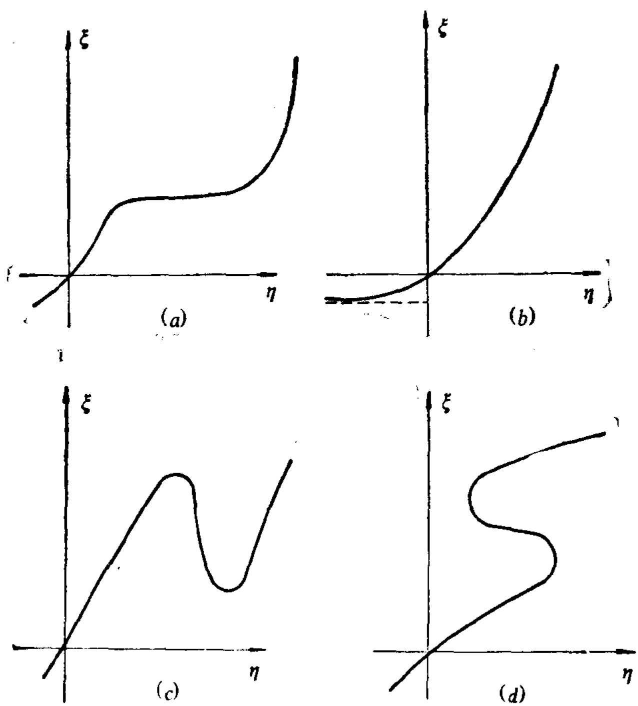
或显式:

$$\xi(t)=\xi(\eta(t)) \tag{1-7}$$

$$\eta(t)=\eta(\xi(t)) \tag{1-8}$$

非线性元件采用 (1-7)式还是 (1-8)式，根据它的控制参量是 $\eta(t)$还是 $\xi(t)$而定，决定于元件的性质。

如果元件关系满足叠加原理，它称为线性的；否则称为非线性的。用特性曲线表示时，如果元件的特性可以用一条通过原点的直线表示，则它是线性的，否则是非线性的。非线性特性的常见典型形式见图 1-3 所示。它们可以分单调型和非单调型两大类。



(a)单调型　(b)严格单调型　(c)(d)非单调型

图 1-3　典型非线性两端元件的特性

单调型又分单调和严格单调两类。

对于非严格单调型元件，显式表示(1-7)式或(1-8)式不是都可以适用的。例如，对于图 1-3(c)的特性，ξ 对 $\eta\in R$ 是对应的，即 $\xi=f(\eta)$ 是单值的。相反，η 对 $\xi\in R$ 则可能有三个对应点，所以 $\eta=\eta(\xi)$ 是多值的。因此，此特性代表的元件采用 $\xi=f(\eta)$ 表示，称为η控制的。同样理由，图 1-3(d) 的特性是ξ控制的，只能用 $\eta=\eta(\xi)$ 表示。

对于严格单调型元件，ξ 和 η 有一一对应关系。如此关系在 R 中都满足，则元件可以用 $\xi=\xi(\eta)$ 表示或 $\eta=\eta(\xi)$ 表示。元件称为互控制的。

在图 1-3(b)中所示严格单调型元件有 $\xi\in D\subset R$，虽然 ξ 与 η 有一一对应关系，但对某些 $\xi\in R$ 可能没有 η 值。因此，这种元件是η 控制的。

2-2 代数 n 端口的表示

令 n 端口N 的 j 端口的参量为(ξ_j,η_j)，它是动态无关变量偶中的一个：

$$(\xi_j,\eta_j)\in\{(i_j,u_j),(u_j,q_j),(i_j,\Phi_j),(\Phi_j,q_j)\},\ j=1,2,\cdots,n$$

于是，N 的端口关系可表示为隐式：

$$f_j((\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\cdots,(\xi_n,\eta_n))=0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1-9}$$

如果用矢量表示，令

$$\boldsymbol{\xi}=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]^t\in R^n \tag{1-10a}$$

$$\boldsymbol{\eta}=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]^t\in R^n \tag{1-10b}$$

则(1-9)式可记作

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{0} \tag{1-11}$$

$\boldsymbol{f}:R^n\times R^n\to R^n$ 表示由 $2n$ 维欧氏空间中的点到 n 维欧氏空间的

映射。

用显式表示时，N 的端口方程可以记作

$$\xi_j=\xi_j(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{1-12}$$

或

$$\eta_j=\eta_j(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{1-13}$$

采用(1-10)式的矢量，(1-12)式和(1-13)式可记作

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(\eta),\eta\in R^n,\xi:\ R^n\to R^n \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{\eta}=\eta(\xi),\xi\in R^n,\eta:\ R^n\to R^n \tag{1-15}$$

2-3 广义坐标

n 端口还可以用混合变量表示：

$$\left.\begin{aligned}&\xi_i=\xi_i(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots,\xi_n),\\&\qquad i=1,2,\cdots,k\\&\eta_j=\eta_j(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots,\xi_n)\\&\qquad j=k+1,\cdots,n\end{aligned}\right\}\tag{1-16}$$

用矢量表示，令

$$\boldsymbol{\eta}_x=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k]^t\in R^k$$
$$\boldsymbol{\xi}_x=[\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots,\xi_n]^t\in R^{n-k}$$
$$\boldsymbol{\xi}_y=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k]^t\in R^k$$
$$\boldsymbol{\eta}_y=[\eta_{k+1},\eta_{k+2},\cdots,\eta_k]^t\in R^{n-k}$$

于是(1-16)式可记作

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\xi}_y=\boldsymbol{\xi}_y(\eta_x,\boldsymbol{\xi}_x),\boldsymbol{\xi}_y:R^k\times R^{n-k}\to R^k\\&\boldsymbol{\eta}_y=\eta_y(\eta_x,\boldsymbol{\xi}_x),\boldsymbol{\eta}_y:R^k\times R^{n-k}\to R^{n-k}\end{aligned}\tag{1-17}$$

令

$$\boldsymbol{x}=[\eta_x,\boldsymbol{\xi}_x]^t\in R^n$$
$$\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{\xi}_y,\boldsymbol{\eta}_y]^t\in R^n$$

$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 称为广义坐标。采用广义坐标时，(1-17)式可记作

$$y = h(x) \tag{1-18}$$

它与其它显式表示(1-14)和(1-15)式有相同形式，后者也可看作是前者的特殊情况。

2-4 n 端口的控制量

与两端元件一样，n 端口 N 满足叠加原理的是线性的，否则是非线性的。设它有两个容许信号偶 $(\xi_1(t), \eta_1(t))$ 和 $(\xi_2(t), \eta_2(t))$。如果

$$(\xi(t), \eta(t)) = (\alpha\xi_1(t) + \beta\xi_2(t), \alpha\eta_1(t) + \beta\eta_2(t))$$

也是它的容许信号偶，则 N 是线性的。否则，N 是非线性的。

在显式表示时，n 端口 N 可以是 η 控制的或 ξ 控制的。如 $\boldsymbol{\xi}$ 是 η 的单值函数，则采用(1-14)式 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\eta)$，称 N 为η 控制的。如 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的单值函数，则采用(1-15)式 $\eta = \eta(\boldsymbol{\xi})$，称 N 为 ξ 控制的。如上述函数的反函数也是单值的，则 N 称互控制的，N 可以用(1-14)或(1-15)式表示。N 用广义坐标表示时，情况也一样。此时控制变量 x 或 y 将包含不同性质的量。

2-5 n 端口的映射关系

令 N 的端口关系为 $y = f(x)$。设

$$x \in D \subset R^n$$

$$y \in E \subset R^n$$

式中 D 和 E 分别为函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域。

如果 $f: D \to E$ 是双射的*，则对每个 $y \in E$ 有唯一的一个 $x \in D$ 使 $y = f(x)$，因而可以定义 $f^{-1}(y)$ 使 $x = f^{-1}(y)$。换言之，双射函数必有其反函数。因此，满足双射函数的 n 端口 N 是互控制的；

* 见附录 A.

否则 N 有单射或满射*的函数，是 x 或 y 控制的。

例 1-1 n 端口 N 有一个端口的特性如图 1-4 中所示，则它的端口关系的分量的方程将分别为：图 1-4(a)的特性是双射的，是互控制的；图 1-4(b)的特性是单射映射，是 η_k 控制的；图 1-4(c)的特性是满射映射，是 η_k 控制的，图 1-4(d)的特性是满射的，是 ξ_k 控制的。 □

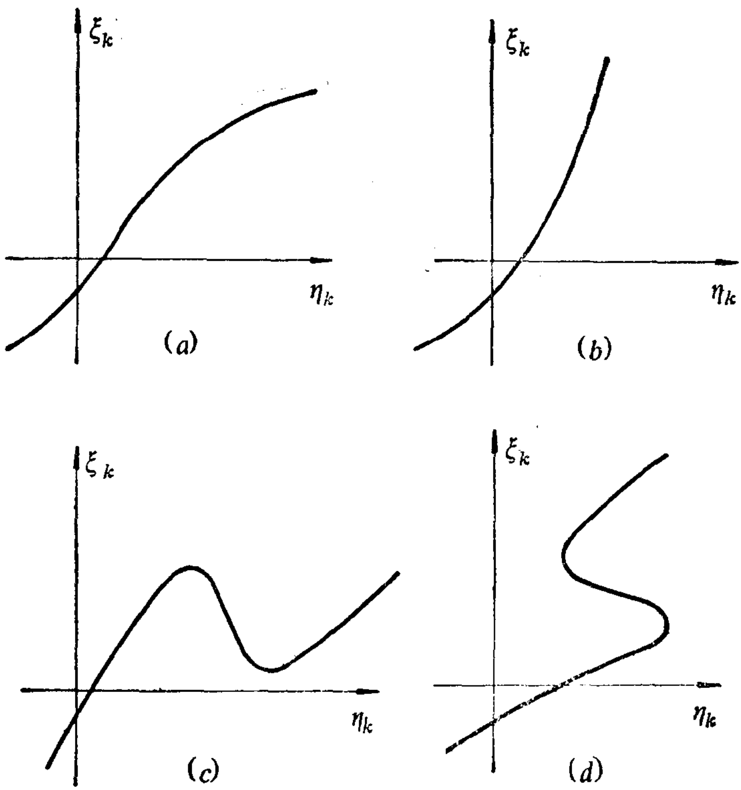


图 1-4 n 端口 N 的一个端口特性

* 见附录A.