人造卫星的运行理论

汪 家 訸 著

科 学 出 版 社

人造衛星的運行理論

汪家訸 著

內容簡介

本書主要是應用力學理論來討論人造地球衛星的運行問題，同時也討論了由觀察人造地球衛星所引起的問題。本書又可說是有關人造地球衛星的天體力學。

本書應用萬有引力定律和力學定律求出人造衛星的軌道方程、周期、機械能表式，並討論速度變化、發射角等問題；用球面三角法及矩陣法推出人造衛星經緯度的變化公式，並將計算結果與報載比較；考慮觀察人造衛星的瞬時共同觀察區，被太陽的照亮問題，決定可觀察時間及舉出預測人造衛星飛臨時間的近似法；討論高空稀薄氣體的阻力影響，日月對它的攝動，廣義相對論的近地點轉動問題。

人造衛星的運行理論

汪家訸著

*

科學出版社出版（北京朝陽門大街117號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1959年1月第一版　書號：1602　字數：112,000

1959年1月第一次印刷　開本：850×1168.1/32

（滬）0001—6,704　印張：4 3/8

定價：(10) 0.75元

序　言

自去年10月4日蘇聯發射了世界上第一顆人造地球衛星以後，不到一個月的時間，蘇聯又發射了載着狗的第二顆人造地球衛星．今年5月15日蘇聯又發射了重達1327公斤的第三顆人造衛星(以下人造衛星皆指人造地球衛星)．從下列"蘇聯人造衛星和美國人造衛星比較表"中可以看出：蘇聯的第三顆人造衛星一顆的重量就比美國三顆人造衛星的總重量還大45.5倍．可見蘇聯火箭的發射能比美國火箭的發射能大得多．這是蘇聯科學技術的偉大成就，這是社會主義制度優越性的具體表現，這是共產黨英明領導的結果．讓我們熱烈地向蘇聯科學家及工程技術人員們祝賀，並向他們致以崇高的敬意．

本書祇討論人造衛星運行的理論和觀察人造衛星所發生的各種問題．對於用無綫電研究高空電離層的情況，用計數器研究宇宙綫，火箭的發射原理等問題不在本書討論範圍以內．本書關於已經發射的人造衛星的數據都是從國內報上得來的．

由於作者學識膚淺，見聞不廣，本書不妥之處請同志們提供寶貴的意見．

汪家訸　於杭州浙江大學

1958年7月28日

蘇聯人造衛星和美國人造衛星比較表

	蘇 1	蘇 2	美“探險者一號”	美“先鋒號”	美“探險者三號”	蘇 3
發射日期	1957年10月4日	1957年11月3日	1958年2月1日	1958年3月17日	1958年3月26日	1958年5月15日
重量	83.6千克	508.3千克	13.4千克	1.5千克	14.29千克	1327千克
大小	直徑58厘米的圓球		直徑15厘米長203厘米圓筒	直徑16.3厘米的小圓球	同“探險者一號”	底直徑173厘米，長357厘米圓錐體
最初運行週期	96.17分	103.7分	114.8分	134分	115分	106分
軌道平面與赤道交角	65°	65°	35°	33°.5	33°.3	65°
裝備的儀器	兩台無綫電發射機	實驗動物(狗)研究太陽輻射和宇宙綫的儀器．兩台無綫電發射機	兩台無綫電發射機和觀測宇宙綫裝置	兩台無綫電發射機，一部化學電池，一部太陽能電池	基本上同“探險者一號”	研究一系列地球物理問題的儀器，遙測系統，一台無綫電發射機，化學電源裝置，太陽能電池
亮度	相當於5.5等星，肉眼可以看到	有時比1等星還亮，很容易看到	肉眼很難看到	肉眼根本看不見	肉眼很難看到	比蘇2更容易看到

(註：本表錄自1958年5月16日的人民日報)

目　録

1. 地球的形狀和作用於人造衛星的力

我們知道一切星球與星球間的作用力都是“萬有引力”. 這引力是任何兩個物體間都存在的. 像人和人之間也有萬有引力作用着，祇是引力很小罷了. 地球上各種物體向地心落下就是由於這種引力的作用. 人造衛星和月球所以能繞地球旋轉主要就是靠地球對它的引力作用. 人造衛星爲什麼能繞地球旋轉而不落下來呢? 原因是地球對它的引力 $\mathbf{F}$ 的法綫方向的分量 $\mathbf{F}_n$ 就是人造衛星作橢圓運動的向心力(圖 1). 引力在切綫方向的分量 $\mathbf{F}_\tau$ 有時和人造衛星的速度方向相同，有時相反. 方向相同時引力使人造衛星速度增加，方向相反時引力使人造衛星速度減小.

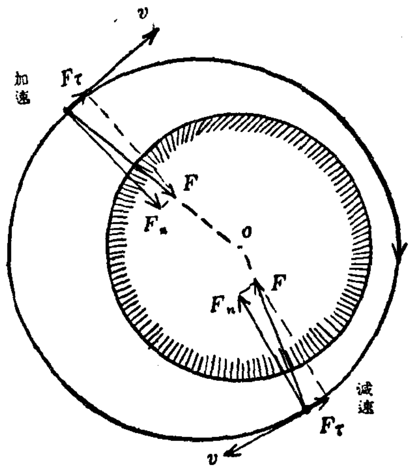

圖 1

牛頓的萬有引力定律是：宇宙間任何二質點間恆存在着相互吸引之力，此力和二質點的質量的乘積成正比，和二質點間的距離平方成反比，此引力的方向沿二質點的聯綫.

設二質點的質量是 m_1 和 m_2，二質點的距離是 r，那末萬有引力的大小是

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

其中 $\gamma = 6.66 \times 10^{-8}$ (秒，克，厘米單位).

例如把體重 50 仟克和 60 仟克的兩個人看作兩個質點，相距 1 米，他們的引力是

$$F = 6.66 \times 10^{-8} \times \frac{50000 \times 60000}{100^2} = 0.01998 \text{ 達因.}$$

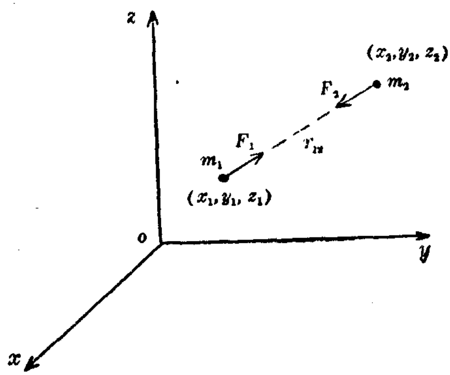

圖 2

可見這引力是小得微不足道的.

為了將二質點的萬有引力的大小和方向同時表出, 可應用坐標法. 設 $oxyz$ 是固定於空間的直交坐標. 質量為 m_1 和 m_2 的二質點在這坐標中的坐標分别是 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2) (圖 2). 那末它們的距離 r_{12} 是

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

這二點連綫的方向餘弦是

$$\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \qquad \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \qquad \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}.$$

質點 m_2 吸引 m_1 的力表以 $\mathbf{F}_1 = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$, 那末

$$X_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \qquad Y_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{y_2 - y_1}{r_{12}},$$

$$Z_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}. \tag{2}$$

上式可合寫成以下矢量式:

$$\mathbf{F}_1 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} [(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}] =$$

$$= \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \tag{3}$$

其中 $\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$ 是自質點 m_1 到質點 m_2 的單位矢量. 由反作用定律, 質點 m_1 吸引 m_2 的力 $\mathbf{F}_2$ 的大小和 $\mathbf{F}_1$ 相等, 方向相反.

所以

$$\mathbf{F}_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{4}$$

公式(1),(3),(4)是祇對兩個質點而言的. 要求兩個物體間的引力可將二物體同時分成許多小塊 dm_i, dm'_j 然後積分(圖 3). 若 A, B 二物體相比較, B 物體比 A 物體小得多(像人造衛星與地球), 那末它們的引力公式祇要積分 A 物體(圖 4). 設 σ 是 A 物體

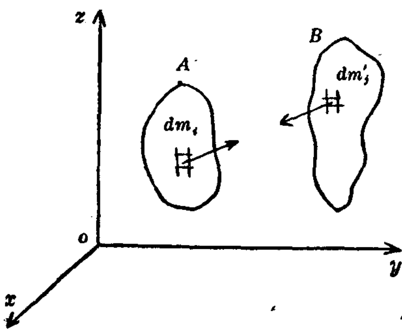

圖 3

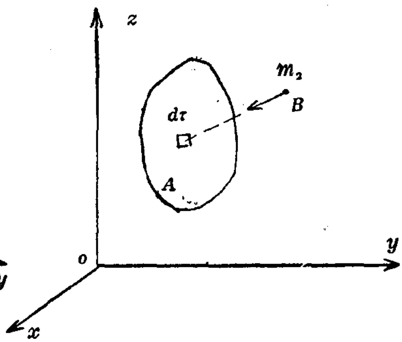

圖 4

的密度函數, 假定 σ 是位置 (x, y, z) 的連續函數; $d\tau$ 是 A 物體被分割的體積元, 那末 $d\tau$ 中的質量是 $dm = \sigma d\tau$. 所以

$$\left.\begin{aligned} X &= -\gamma m_2 \int_A \frac{x_2 - x}{r^3}\sigma d\tau, \\ Y &= -\gamma m_2 \int_A \frac{y_2 - y}{r^3}\sigma d\tau, \\ Z &= -\gamma m_2 \int_A \frac{z_2 - z_1}{r^3}\sigma d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中

$$r = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}.$$

例如: 一均質桿 AC 長 $2l$, 單位長的質量是 σ. 在這桿的垂直平分綫上有一質點 B 的質量是 m_2(圖 5). 此點距桿的中點 o 的距離是 r. 現在求桿吸引質點引力的合力的大小如下:

將平面直交坐標 oxy 的 y 軸沿桿, x 軸沿桿的垂直平分綫, 則 B 點受桿上"坐標爲 y 的一段 dy"的吸引力是

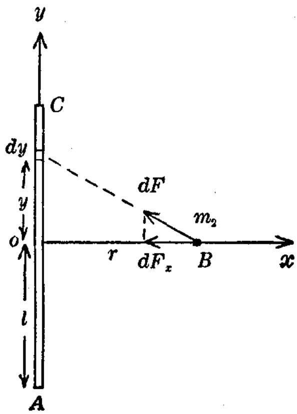

圖 5

$$dF = \gamma m_2 \frac{\sigma dy}{y^2 + r^2}.$$

這力在 x 軸方向的分量是

$$dF_x = -\gamma m_2 \frac{\sigma dy}{y^2 + r^2} \frac{r}{\sqrt{y^2 + r^2}}.$$

由於質點 B 正好在桿的對稱位置, 所以 dF 在 y 方向的分量正好和"$-y$ 處 dy 段的引力在 y 方向的分量"相對消. 於是桿吸引質點 B 的力 F 沿 x 軸, 而爲

$$F = \int dF_x = -\gamma m_2 \sigma r \int_{-l}^{l} \frac{dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}}.$$

應用積分公式

$$\int \frac{dy}{(y^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{y}{r^2 \sqrt{y^2 + r^2}} + C$$

得

$$F = -\gamma m_2 \sigma r \frac{2l}{r^2 \sqrt{l^2 + r^2}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{r}\right)^2}}.$$

從上式可見, 引力 F 不能用公式(1)的形式來表示, 即公式(1)對一般物體間的引力是不適用的. (1)式是屬於二質點間的引力公式. 但是若 A 物體是均質球殼, B 物體是質點, 那末公式(1)依舊適用. 這結論可用積分式(5)來證明. 現在改用湯姆孫(Thompson)和泰脫(Tait)的方法來證明更有物理意義. 首先將這結論寫成下面定理:

定理一. 質量爲 M 的匀質球殼對球殼外質量爲 m 的一質點的引力 F, 可看成"將球殼質量集中在球心的質點對球外質點的引力", 即

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}, \tag{6}$$

其中 r 是球外質點到球心的距離.

證：設 PC_1, PC_2 是從球殼外質點 m 的所在點 P 到球面上的兩根切綫．這兩根切綫在“通過 P 和球心 O”的平面上(圖 6)．連接 C_1, C_2 交 PO 於 A．則因直角三角形 $\triangle OAC_1$ 和直角三角形 $\triangle OPC_1$ 有一角 $\angle AOC_1$ 公共，所以 $\triangle OAC_1 \sim \triangle OPC_1$.
所以

$$OC_1 : OP = OA : OC_1, \text{ 即 } \overline{OP} \cdot \overline{OA} = a^2,$$

其中 a 是球殼的半徑． 這球殼的厚爲 Δa，密度是 σ．以 A 爲頂點，作一無限小立體角 $\Delta\omega$ 的錐面．這錐面截球殼於 B_1, B_2 二部． 將這二部分的質量分別表成 m_1 和 m_2．令 θ 爲 OB_1 和 AB_1 的夾角，則 B_1 部的高是 $\Delta a \cdot \sec\theta$，底面積是 $\overline{AB}_1^2 \Delta\omega$， 所以 B_1 部的體積是 $\Delta\omega \cdot \overline{AB}_1^2 \Delta a \cdot \sec\theta$.

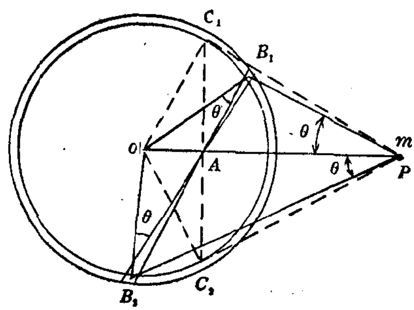

圖 6

於是

$$m_1 = \sigma \Delta\omega \cdot \overline{AB}_1^2 \Delta a \cdot \sec\theta.$$

同樣

$$m_2 = \sigma \Delta\omega \cdot \overline{AB}_2^2 \Delta a \cdot \sec\theta.$$

這二部對 P 點的引力分別是

$$F_1 = \nu\sigma \cdot \Delta\omega \cdot \Delta a \cdot \sec\theta \cdot \left(\frac{AB_1}{B_1P}\right)^2 m,$$

$$F_2 = \nu\sigma \cdot \Delta\omega \cdot \Delta a \cdot \sec\theta \cdot \left(\frac{AB_2}{B_2P}\right)^2 m.$$

$\triangle OB_1A$ 和 $\triangle OPB_1$ 有一角 $\angle O$ 公共，這角的夾邊成比例．

即由 $\overline{PO} \cdot \overline{OA} = \overline{OB}_1^2 = a^2$ 得 $\overline{PO} : \overline{B_1O} = \overline{B_1O} : \overline{AO}$.

所以

$$\triangle OB_1A \sim \triangle OPB_1.$$

於是得

$$\angle OPB_1 = \theta \quad 及 \quad \frac{AB_1}{B_1P} = \frac{OB_1}{OP} = \frac{a}{OP}.$$

同樣可證

$$\angle OPB_2 = \theta \quad 及 \quad \frac{AB_2}{B_2P} = \frac{a}{OP}.$$

將上二式代入 F_1, F_2 的表式,得

$$F_1 = \gamma\sigma \cdot \Delta\omega \cdot \Delta a \cdot \sec\theta \cdot \left(\frac{a}{OP}\right)^2 m = F_2.$$

由於 $F_1 = F_2$,所以這二力的合力沿 $\angle B_1PB_2$ 的平分綫,即沿 PO.這合力 ΔF 的大小是

$$\Delta F = 2F_1\cos\theta = \gamma\frac{2\sigma a^2\Delta a \cdot m}{\overline{OP}^2}\Delta\omega.$$

因由上式看出 $\Delta\omega$ 的係數是常數,所以上式適用於過 A 的任何立體角.於是即可對過 A 的半球殼求總和,此時 $\Sigma\Delta\omega = 2\pi$. 又因球殼的總質量 $M = 4\pi\sigma a^2\Delta a$,所以

$$F = \Sigma\Delta F = \gamma\frac{2\sigma a^2\Delta a \cdot m}{\overline{OP}^2}\Sigma\Delta\omega = \gamma\frac{mM}{r^2},$$

而定理一得證.

應用定理一,容易證明以下定理:

定理二. "密度是點到球心距離 a 的函數 $\sigma = f(a)$" 的球體,它對球外一質點的引力也可用(6)表示,其中 M 是球的質量,m 是質點的質量, r 是質點到球心的距離.

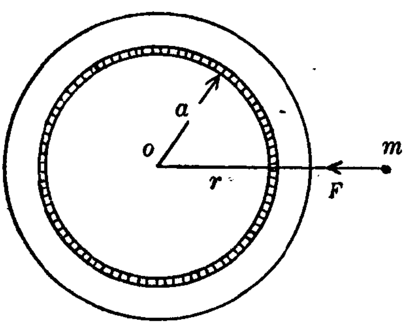

圖 7

證:如將球體看成是許多勻質球殼合成的(圖 7),則每一球殼對質點 m 的引力都可用(6)表示,那末顯然它們的合力也可用(6)表示. 因設 M_i 是"距離球心是 a_i" 的球殼的質量,則此

球殼對質點 m 的引力是

$$F_i = \gamma \frac{mM_i}{r^2}.$$

所以各球殼對質點的引力的合力是

$$F = \Sigma F_i = \gamma \frac{m}{r^2} \Sigma M_i = \gamma \frac{mM}{r^2}.$$

現在說明地球對人造衛星的引力，近似地也可用公式(6)表示．理由有下面幾點：

(A) 地球是橢球形體，是繞地軸的一個旋轉體．它的半長軸(赤道半徑) $a = 6378.24$ 公里．半短軸(極半徑) $b = 6356.86$ 公里．它們的差是 $a - b = 21.38$ 公里．(圖 8)

$$\text{地球的橢率} = \frac{a-b}{a} = \frac{21.38}{6378.24} = \frac{1}{298.3},$$

可見地球的形狀是相當圓的．

(B) 世界上最高山峯珠穆朗瑪峯海拔 8.882 公里，太平洋中最深處深 10.899 公里．它們和地球平均半徑 $R = 6370.937$ 公里比較，僅約 $\frac{1}{637}$．所以地面上的高山深海的凹凸變化，對地球來說，表面還是可看作理想的面．

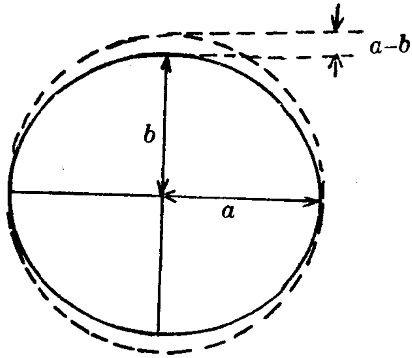

圖 8

(C) 由於地球內部的物質必須保持動力平衡，所以地球各處密度(除去極薄的地殼以外)，σ 僅是地心距 a 的函數．密度的等值面和等位面相合，是中心在地心的同心球(精確地說是橢球形)．若氏(Roche)曾提出以下計算式就是一例：

$$\sigma = 10.1(1 - 0.764\, a^2),$$

其中 a 用地球半徑作單位．事實上，由地震波的研究知道 σ 不是

a 的連續函數．不過 σ 祇是 a 的函數是確定的．

總結以上理由知道地球吸引人造衛星的力相當精確地可用下式表示：

$$F=\gamma\frac{mM}{r^2}, \tag{7}$$

其中 r 是人造衛星至地心的距離，M 是地球的質量，m 是人造衛星的質量．

2. 人造衛星的勢函數

自公式(1)或(2)可看出，二質點間的萬有引力由二質點的位置完全確定．若質點 m_2 的位置是固定不動的，則由(2)得

$$X_1=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{x_1-x_2}{r_{12}},\qquad Y_1=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{y_1-y_2}{r_{12}},$$

$$Z_1=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{z_1-z_2}{r_{12}}.$$

可知 X_1, Y_1, Z_1 完全隨 m_1 的位置而決定．我們稱 m_1 在"m_2 所產生的力場"中．因

$$r_{12}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

所以

$$2r_{12}\frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}=2(x_1-x_2), \text{ 或 } \frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}=\frac{x_1-x_2}{r_{12}}.$$

同理

$$\frac{\partial r_{12}}{\partial y_1}=\frac{y_1-y_2}{r_{12}},\qquad \frac{\partial r_{12}}{\partial z_1}=\frac{z_1-z_2}{r_{12}}.$$

於是

$$X_1=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{x_1-x_2}{r_{12}}=-\gamma\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{\partial r_{12}}{\partial x_1}=$$

$$=m_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\gamma m_2}{r_{12}}\right).$$

同樣

$$Y_1 = m_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\gamma m_2}{r_{12}}\right), \qquad Z_1 = m_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\gamma m_2}{r_{12}}\right).$$

令

$$V = \frac{\gamma m_2}{r_{12}} = \frac{\gamma m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}. \tag{8}$$

那末

$$X_1 = m_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad Y_1 = m_1 \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad Z_1 = m_1 \frac{\partial V}{\partial z_1}. \tag{9}$$

這樣的函數 V 稱爲 m_1 的勢函數. m_2 作用於 m_1 的力 $\mathbf{F}_1$ 雖然是矢量,但是 V 不是矢量,是祇爲位置(x_1, y_1, z_1)的函數的純量.

現在再來求一個質點 m 在一質點系 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 所產生的力場的勢函數. m 與 m_i 的距離是 r_i, 則

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2.$$

將質點系 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 吸引 m 的合力寫成

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

則

$$X = \sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{m m_i}{r_i^2} \frac{x_i - x}{r_i} = -m \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i^2} \frac{\partial r_i}{\partial x} =$$

$$= m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma m_i}{r_i}\right) = m \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i},$$

同樣

$$Y = m \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i}, \qquad Z = m \frac{\partial}{\partial z} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i}.$$

但

$$\frac{\gamma m_i}{r_i} = V_i$$

是質點 m 純由 m_i 所產生的勢函數. 以 V 表示總質點系所產生在“m 質點所在位置”的勢函數, 那末

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{r_i} = \sum_{i=1}^{n} V_i = V. \tag{10}$$

於是

$$X = m \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = m \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = m \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{11}$$

自(10)可見:"質點系在 m 質點處的總勢函數 V 是各質點在 m 質點處勢函數的代數和". 事實上這是"V 是純量函數"的基本性質, 與力的矢量性質不同.

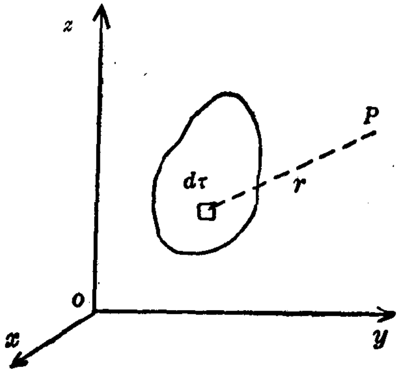

圖 9

要計算一質點在一物體所產生的力場中的勢函數, 可用積分法. 將物體分成許多小塊 $dm = \sigma d\tau$ (圖 9). 那末總和公式(10)的極限變成如下積分公式:

$$V = \int \frac{\gamma \sigma d\tau}{r} = \gamma \int \frac{\sigma d\tau}{r}. \tag{12}$$

得到了 V 就可用(11)求出 X, Y, Z.

應用(11), 引力 $\mathbf{F}$ 可寫成

$$\mathbf{F} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) = m \operatorname{grad} V, \tag{13}$$

其中 grad V 稱爲勢函數 V 的梯度. 它是由下式定義的矢量,

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{14}$$

自(13)式看出, $\mathbf{F}$ 的方向和矢量 grad V 的方向相同.

在力場中, V 值相同的點形成一曲面, 稱爲等勢面. 如圖 10 中, 不同的 V 值 $V_0, V_1, V_2, \cdots$ 形成不同的等勢面. 自微積分公式, 勢函數 V 的無限小改變 dV 爲

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz =$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) =$$
$$= \operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{r}, \tag{15}$$

其中 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ 是質點 m 的無限小位移．若質點 m 在等勢面內行動(圖 10)，那末 V 不變化，所以 $dV = 0$． 於是由(15)得

$$\operatorname{grad} V \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

上式表示：$\operatorname{grad} V$ 的方向和 V 的等勢面垂直．但 $\mathbf{F}$ 與 $\operatorname{grad} V$ 的方向相同，所以"$\mathbf{F}$ 和 V 的等勢面垂直"．

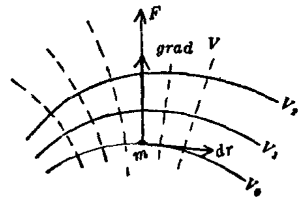

圖 10

現在證明：質量爲 M 的均質球殼在球外距球心爲 r 處的勢函數是

$$V = \frac{\gamma M}{r}. \tag{16}$$

證明上式的成立，事實上就是證明定理一的成立． 因爲(16)成立後自(11)得

$$X = m\frac{\partial V}{\partial x} = m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma M}{r}\right) = -\frac{\gamma m M}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\gamma m M}{r^2}\frac{x}{r},$$

$$Y = -\frac{\gamma m M}{r^2}\frac{y}{r}, \qquad Z = -\frac{\gamma m M}{r^2}\frac{z}{r}.$$

上三式表明：X, Y, Z 是引力 $\dfrac{\gamma m M}{r^2}$ 在 x, y, z 軸方向的分量，這就證明了定理一．

設球殼的半徑是 a，單位面積的質量是 σ．自圖 11，先求球上

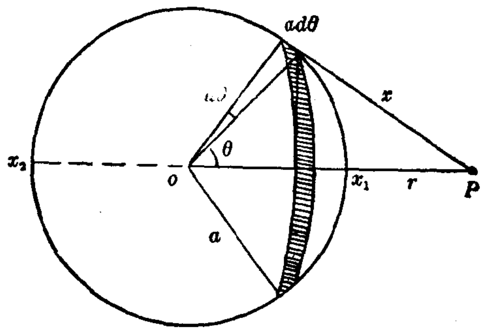

圖 11