

总登记号: 145822

分类号: G5.3

作者 朱载堉<明>

有變音無變律第十二

變宮曰和此所謂變音也論理實有而陳暘以爲無冷

子新法  
從陳暘是也而取所謂變律也論理

雖不名執始而名變黃鍾變黃鍾者卽執始之別名也

明朱載堉  
黃鍾變黃鍾  
馬文慈點注

上篇詁之詳矣八十四聲舊圖新圖竝載於後

夫十二律各自爲均一均

焉所謂宮商角徵羽及中

和二首也徵變而爲中宮變而爲和有此中和二首七律備而成

樂是乃樂學千古不刊之正法也

U 151.1  
151.1  
151.1

而黜二變旋宮旣廢黃鍾孤立冬夏聲亡四時失序無以贊化機

而育萬物禮樂崩莫斯爲甚遂使廟堂之上不復得聞治世之

中國古代音樂文獻叢刊

# 律呂新說

資料

3500.53  
145822

〔明〕朱載堉撰 馮文慈點注

封面設計：劉旭

5733/13

中國古代音樂文獻叢刊

**律學新說**

[明]朱載堉撰

馮文慈點注

\*

人民音樂出版社出版

(北京翠微路2號)

新華書店北京發行所發行

北京第二新華印刷廠印刷

850×1168 毫米 32開 189千文字 10.5印張

1986年9月北京第1版 1986年9月北京第1次印刷

印數：0,001—3,035冊

書號：8026·4545 定價：3.65元

## 律學新說及其作者

——紀念朱載堉誕生四五〇周年

馮文慈

律學新說的作者朱載堉，是我國明代著名的樂律學家、曆學家、算學家。在世界律學史上，他第一個解決了十二等比律（十二平均律）的數理和計算，也即我國律學史上所謂「黃鐘還原」的理論難題，完成了劃時代的不朽業績，是值得中華民族引以爲榮的一位傑出人物。

朱載堉，字伯勤，號句曲山人，是明宗室的一位世子。生於嘉靖十五年（公元一五三六年）。在他十五歲時，他的父親鄭恭王朱厚烷以無罪繫獄，後經十八年之久始獲赦免，恢復王爵。此事可能是促使朱載堉矢志不移，終生潛心律呂曆算的一個重要因素。萬曆

十九年（公元一五九一年），朱厚烷去世，朱載堉讓爵不襲，自稱道人，在懷慶繼續傾其心血著述。卒年爲萬曆三十九年（公元一六一一年）。

朱載堉的學術思想，受到他父親與何瑭的影響。據朱氏的律呂精義序和進曆書奏疏，何瑭是他的外舅祖，即其外舅（岳父）何諮的祖父。可見，今日流行的一種說法，認爲何瑭是朱載堉的舅父，並不確實。又，何瑭長朱載堉六十二歲，他去世時，朱載堉才八歲。朱氏說，他的父親壯年時「嘗師友於瑭」，而他本人對於何瑭，則「雖未獲面睹，而亦幸私淑焉。」可見，今日流行的又一說法，認爲朱載堉從何瑭學習過天文、算術等等，也不確實。事實上，是朱厚烷直接受到何瑭的影響，而朱載堉先是在少年時期聽父親談到何瑭的若干學術論點，成年後才讀到何瑭的著作樂律管見，從而進一步受到啟發的。這些情況在朱氏著作中敘述得相當清楚。

朱載堉的主要著作是樂律全書，此外還有嘉量算經、律呂正論等數種。樂律全書是一部綜合性巨著，涉及律學、樂學、舞學、曆學、算學等多種相關學科。其中所收著作的數目和種類，歷來研究者們的看法不大一致，筆者以爲，當以十四種爲是。現依原作順序列出如下：

（一）律學新說，四卷；

- (二) 樂學新說，不分卷；
- (三) 算學新說，不分卷；
- (四) 律呂精義，內篇外篇各十卷；
- (五) 操縵古樂譜，不分卷；
- (六) 旋宮合樂譜，不分卷；
- (七) 鄉飲詩樂譜，六卷；
- (八) 六代小舞譜，不分卷；
- (九) 小舞鄉樂譜，不分卷；
- (十) 二佾綴兆圖，不分卷；
- (十一) 靈星小舞譜，不分卷；
- (十二) 聖壽萬年曆，二卷；
- (十三) 萬年曆備考，三卷；
- (十四) 律曆融通，四卷。

至於樂律全書中的「樂經古文」，乃周禮之摘抄，不應計在朱氏著作之內。

以上十四種著作，從已知年代上看，是陸續完成的。最早的日期見於律曆融通序，爲

萬曆九年（公元一五八一年）正月，最遲的日期見於進律書奏疏，爲萬曆三十四年（公元一六〇六年）七月。樂律全書的全部篇幅，文字約佔一半，有六十萬字左右；另一半爲樂譜、舞譜。

樂律全書中，樂律學以及和律學有關的著作計有四種，依書序或刊刻年代排列如下：

律曆融通——序於公元一五八一年；

律學新說——序於公元一五八四年；

律呂精義——序於公元一五九六年；

算學新說——刊刻於公元一六〇三年。

這四種著作中，都有關於十二平均律的計算成果。音樂史學家李純一根據律曆融通的記述，推測朱載堉完成十二平均律的計算當在一五八一年以前，從而訂正了一五八四年或一五九六年的舊說。這是言之有據的重要論斷。

### 一、律學新說和律呂精義

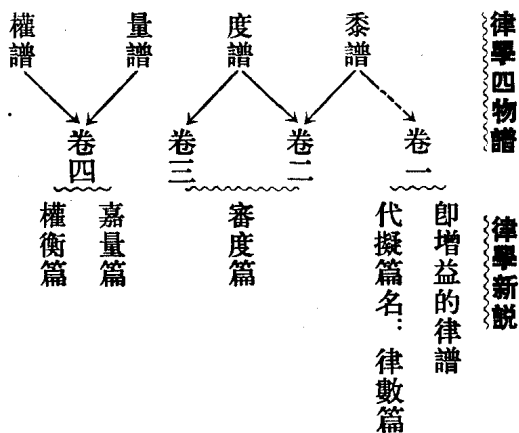
朱載堉最重要的樂律學著作，是律學新說和律呂精義。僅從律學角度對這兩部著作略加比較來看，前者的主要特點在於首倡新說；後者的主要特點在於數理精詳。全面研究

朱氏的律學思想，前者不可不讀，仔細理解朱氏律學的精密數理，後者不可忽略。二者成序的年代雖然相距十二年，但前者行文中却又有四處明確提到參見後者（在序、卷一、卷二）。而且，前者的論辨主旨貫穿於後者，後者的計算成果也貫穿於前者。從律學新說到呂精義，在理論上和數據上雖有所發展，但其基本脈絡是一以貫之。因此，不妨把二者視為互相滲透，大體上同時期成書的姊妹篇。過去的論著常常強調律呂精義的重要性，而對律學新說的歷史地位似乎估計不足，這種偏向值得商榷。

## 二、律學新說和律學四物譜

律學新說是朱載堉長期研究的成果，是在律學四物譜的基礎上刪冗汰繁，改寫而成的。律學四物譜原稿今已不可得見，其序言由於朱氏不忍棄去，附在律學新說之末，可見是有其重要性的。所謂譜，這裏是指多方面的系統論述與辨證。四物譜即指黍譜、度譜、量譜、權譜。我國古代認為，律與度、量、衡（權）密不可分，其主要紐帶是：律和度常常同以黍為最小計量單位。顯然，朱氏的原來意圖是以四物譜作為其律學理論基礎。今天從律學四物譜序中仍可看到其寫作初衷，從律學新說的結構上也仍然可以看到四物譜構思的框架。

值得注意的是，從律學四物譜到律學新說，朱氏的律學思想可能經歷過一番變化，從而將重點轉移到批判劉歆、蔡元定舊說，故改名新說。而且，黍譜之黍，在律學新說的篇目上不見了，同時在卷四（第二三六頁）朱氏又以律譜、黍譜、度譜並提，稱謂前文。看來，所謂律譜當指卷一，是改寫時增益加強的部分。二書的淵源關係，可能略如下表所示：



顯然，律學新說的卷一在全書中佔有中心地位，後三卷是圍繞這一卷而展開的。我們

今天讀到後三卷，雖然不免覺得現實感比較薄弱，但作為研究朱氏全面律學思想來說，它們仍有其不可忽視的歷史意義；另外，從研究我國計量學的歷史來說，可能也有其重要史料價值。

至於朱氏為什麼打亂了四物譜的基礎，似乎還有進一步分析的必要。

### 三、數度是律學的基礎

關於律與度量衡的關係，在我國律學史上曾發生過律與度哪一方起決定作用的爭論。例如宋史律曆志四就記載着尺律本末之爭：「律之起尺與尺之起律孰是？」

這個問題，以史實論證，是個難題，但以理論推斷，或不難認識。以我國來說，尺、斛等度量衡器，應是伴隨着商品交換而產生、發展，並逐步規範化而來的。而禮樂制度的形成，從而使律（黃鐘律管）上升到獨尊地位，並統率度量衡器，則應當是奴隸制國家形態比較成熟以後的事情。顯然，商品交換的歷史要比奴隸制國家的歷史長遠得多。因此，尺、斛一類度量衡器的歷史也要比黃鐘律管取得獨尊地位的歷史悠久得多。正如恩格斯所說，人們首先必須吃、喝、住、穿，然後才能從事政治、科學、藝術、宗教等。（在馬克思墓前的講話）尺、斛等等，正是從屬於前一方面，而黃鐘律管則從屬於後一方面。但是，後來者居上，

以律爲本，以度量衡爲末，這種情況在歷史上確實存在。這當然是由於國家政權爲了統一度量衡，爲了便於商品交換，爲了社會生產和社會秩序的穩定。由此，代表禮樂，代表統治階級精神力量的黃鐘律管，統率了度量衡。朱載堉在律學新說序中，首先引用的尚書的記載「同律度量衡」，不論是按照「使律、度、量、衡統一」來理解，或按照「使度量衡統一於律」來理解，律都處於領先地位。而且到了後世，後一種解釋顯然居優勢，正史律曆志的記載，就可以說明這一點。關於最早統一度量衡的年代，雖然難以說得準確，但這種文獻記載，應該是有其歷史可信性的，其中並無神秘可言。

進一步說，無論是律或尺，在生產力和科學技術還處在相對落後的社會條件下，往往又都要向現實物質生活中微小而又常見的黍粒求援，以便計量，這也是很容易理解的。正是在以農業爲主、以小生產爲基礎的社會歷史條件下，形成了這種律學計量的傳統特點，而朱載堉正是在這種傳統之中，撰寫律學四物譜的。

但是值得注意的是，從律學四物譜到律學新說的過程中，朱載堉對於律的認識可能逐步深化。一方面，他在力求描畫歷史本來面貌，削弱律統率度量衡的獨尊地位。他明確地說：「古人以度定量，以量定權，必相參得而後黃鐘之律可求。然則律與度量衡相須爲用，非度量衡生於律也。」（律學四物譜序）另一方面，他又力求使律只建立在數度之上。在律

學四物譜序的開頭，朱氏引用了新唐書禮樂志十一的一大段精闢議論。他強調了律的根本是數，「以有數之法，求無形之聲」，可以千秋萬代永存不朽。從歷史文獻中，朱氏找到依據，受到啟示，並發展了它。這種數爲律本的思想，時有表述。例如卷一：「夫音生於數者也，數真則音無不合矣。」（第一九頁）又如律呂精義序：「夫樂也者，聲音之學也；律也者，數度之學也。」等等。

黍當然是不大可靠的，所謂「黍粒有小有大，容受有虛有實」，「觸動振搖，陷虧不定，一時再校，卽無同者。」因此，朱氏認爲：「以黍驗其容受，未若以算術推其容受也。以竹考其聲音，未若以算術定其聲音也。聲音、容受，皆形而下者也，安能出於算術之範圍哉！」（卷二第一六八頁）律學新說篇目中，黍的稱謂已了無痕迹，消融在數度之中了。這種削弱和擺脫的企圖，可以看作是一種離經叛道性質的思想萌動，應予珍視。雖然律學新說舊痕累累，度量衡資料相當冗贅，但如果我們粗略回顧一下律學史，就不難理解朱氏所承擔的這種歷史性的重負；同時我們又會充分肯定朱氏力求使律建立在數度基礎之上的積極努力。朱氏對於音與數的關係，有些話講得非常精彩。他說：「數乃死物，一定而不易；音乃活法，圓轉而無窮。音、數二者，不可以一例論之也。」（卷一第四四頁）這裏似乎是講到了音樂實踐中律的靈活性問題。但是我們也應看到，這種論點以及他所批評的「惑於數而昧

於聲音」的傾向，並非泛指，而是針對三分損益律而說的。他認為，三分損益律是「以聲遷就於數」，而「新法所算之律，一切本諸自然之理」，是「以數求合於聲」。（出處同上）即在密率新法原則之下，他是絲忽必爭，甚至計算到二十五位數的。可見，「音乃活法」之論，並不妨礙他對於十二平均律數度之強調，這是我們應該仔細分析，仔細體會朱氏原意的。

總之，朱載堉志在黃鐘還原，旋宮無誤，因此強調數度，力求精密。這是明中葉以後資本主義生產萌芽，生產力空前發展，科學技術和算術水平相應提高的一種反映。至於十二平均律計算的發明，是否為音樂實踐推動的結果，似乎仍是一個有待深入探討的問題。雖然民間和宮廷都各有其解決旋宮實踐的悠久歷史，但這些實踐和朱氏的創造間有些什麼直接或間接的關係，至少在現在我們尚未見到具體的史料來證實。

#### 四、最重要的兩個數值

律學新說中計算公式和數值相當多，但其計算範圍大體上不過圓及其半徑、直徑，其內接正方形、外切正方形，圓周率，圓面積，正圓柱體體積，以及算法方面的比例、乘方、開方、勾股定理，等等。如果出於今天核算音分值的需要，再加上常用對數也就大體够用了。還有朱氏算術的兩個特點須稍加留意：一是當時的開平方、開立方，須先形象地建立起平

方積、立方積。二是不用小數算法，所以時常見到加大倍數進行演算的情況。

在律學新說的許多數值中，有兩個最重要，即二的十二次方根和二的二十四次方根，它們也可以說是全部朱氏律學中最重要的兩個數值。

朱載堉最先揭示出：十二平均律，不論弦律或管律，某一律（如黃鐘正律）的長度比其相鄰較低一律（應鐘倍律）的長度的比值，是二的十二次方根的倒數。這個比值是個常數，其所以如此，原因就在於任一組形成純八度的二律，高者的長度比低者的長度的比值永遠是二分之一。又，所謂甲律到乙律的音程等於丙律到丁律的音程，乃是對應的律長的比值相等，即在長度方面，甲比乙等於丙比丁。因此，在十二平均律，即把純八度分成十二份相等的音程的律制，其中某律比其相鄰較低一律的長度的比值，必然是二的十二次方根的倒數。就是說，十二個律的長度形成等比數列（其對數則形成等差數列，據此又可折算成音分值等）。在律學新說中，這個比值最多計算到十位數字，而在律呂精義中則計算到二十五位數字。朱載堉不但在世界律學史上首先解決了十二平均律的計算問題，就是從世界數學史上看來，他的等比數列的計算成果也居先列地位。十二平均律的上述比值是顛扑不破，世所公認的。只不過現代律學表示律高不再應用長度，而改換成頻率罷了。當這種長度的比例關係改換成頻率的比例關係時，二者的各自比值互為倒數。即，十二平均律的某

一律（如黃鐘正律）的頻率比其相鄰較低一律（應鐘倍律）的頻率的比值，是二的十二次方根。上述兩個互爲倒數的比值，當然是個理論性數值，實踐中造成誤差的因素或調整的需要等，均未估算在內。（參見算注<sup>⑩</sup>）

第二個數值是二的二十四次方根，只和管律有關。管律，以開口管來說，由於振動發聲時其氣柱長度長於管長，因而帶來複雜問題。我國晉代樂律學家荀勗，創造了調整律管長度的管口校正法。朱載堉沒有繼承這種方法，他另闢蹊徑，主張以異徑的辦法來解決，創造了獨特的計算公式。即十二平均律逐律由低到高的型制，一方面如前所述，在律管的長度上相繼除以二的十二次方根，逐步縮短；另一方面則律管的內直徑相繼除以二的二十四次方根，逐步變細。亦即十二平均律的管律，相鄰二律間除長度比值外，某一律（如黃鐘正律）的內直徑比其相鄰較低一律（應鐘倍律）的內直徑的比值，是二的二十四次方根的倒數。關於管律異徑是否必要，如果必要，那麼上述比值是否正確，目前在國內樂器製造實踐方面還是一個存在爭議、尚待驗證的問題。但朱氏提出異徑管律及其數據，在律學史上無疑是一個十分重要的創見。（參見算注<sup>⑪</sup>）

還有另外一些比較次要的數值，例如二的六次方根（參見算注<sup>⑫</sup>）等，是從上述重要比值引申而來的，這裏從略。

## 五、兩種進位制的算術思維及其珠算法

我國古代樂律學，黃鐘或宮的律數常常被賦予三的乘方之數，定爲九（三的二次方），定爲八十一（三的四次方），定爲一七七一四七（三的十一次方）等。這顯然是隨同三分損益法的產生和發展，爲了便於計算而形成的。朱載堉據何瑭之說，稱呼這種命數之法爲「算家立率」形成的「假如之法」（卷一第一一、一二頁），意即從十進位制的角度來看，這類數值是虛設的。在我國古代以算籌爲計算工具的條件下，在十進位制的範圍內推衍三分損益，勢必常常不能除盡，由此發展了九進位制的算術思維和演算方法，以求律數之盡除。這種演算方法和律數成果，稍早於明代的，我們可以在南宋蔡元定的律呂新書中看到。雖然今天有的同志根據北宋張擇端的清明上河圖，提出北宋時已有算盤，但從律呂新書的記載來看，尚難以判斷蔡元定的有關律數究竟是用算盤還是算籌計算出來的。

朱載堉依從何瑭之說，認爲黃鐘九寸實際上和十寸（一尺）等長。這裏姑且不論朱載堉的這種判斷是否符合歷史，十分重要的是，他由此出發，託古於河圖洛書的傳說，並繼承了蔡元定的九進位制律數成果，發展了九與十兩種進位制的算術思維，創造了縱黍律長（九進位制）和橫黍度長（十進位制）相互間以珠算折算的簡捷方法（參見算注⑦⑧⑪），這

是律呂新書中所沒有的。朱載堉的這一成就，超出了律學範圍，從世界數學史的角度來評價，可能也是名列前茅的。

當然，在律學新說中，朱氏有時又表現出對於九進位制的否定，對於黃鐘九寸之說的否定（卷一第二〇頁），到律呂精義內篇卷一不宗黃鐘九寸第二就更爲明顯。但這並不妨礙其對於非十進位制算法的貢獻。

#### 六、託名周公嘉量，實爲鼎新創造

在我國漫長的封建社會裏，尊古賤今的風氣是一種無形的遏制人們創造力的精神枷鎖。爲此，有所發明創造的人們，也常常自覺或不自覺地託名古代聖賢，以便於他們的成果立足於世。這一類事實，在歷史上屢見不鮮。朱載堉雖然也未能脫此窠臼，但其偉大的創造精神却不難透視。

朱氏在律學新說中多次表達他對周公嘉量的肯定與贊揚，說他的新法密率出於此，並進一步具體化，兩次提到新法密率「出於勾股求弦之術」（卷四第二二三頁、二三七頁）。而在律呂精義內篇卷一不用三分損益第三中，則更爲明確：「新法算律與方圓皆用勾股術。其法本諸周禮桌氏爲量，內方尺而圓其外」，等等。他認爲黃鐘律長一尺，本於周輔內方邊