

马尔科夫振荡问题

THE MARKOV
OSCILLATION
PROBLEM

戴永隆 著

广东科技出版社

粤新登字 04 号

Maerkefu Zhendang Wenti

马尔科夫振荡问题

编 著 者：戴永隆

出版发行：广东科技出版社

(广州市环市东路水荫路 11 号)

经 销：广东省新华书店

印 刷：粤中印刷公司印刷

规 格：787×1092 1/32 印张：8 字数：19.5 万字

版 次：1993 年 3 月 第 1 版

1993 年 3 月 第 1 次印刷

印 数：1—1000 册

ISBN 7-5359-1004-1/O.67

定 价：12.00 元

本书承广东优秀科技专著出版基金会推荐与资助出版



广东优秀科技专著出版基金会

告 读 者

现代世界的特点是，科学技术已成为综合国力的基础，许多国家都把增强科技实力，夺取科技优势，作为自己国家的重要国策和发展战略的核心。人们预测，在未来二十、三十年里，将是人类社会发展史上的一个巨大变革时期，这是因为，现代科学运动正在引发生产力的巨大发展。谁掌握了科技进步的制高点，谁就掌握发展国民经济的制高点，谁就可以在以科技为基础的综合国力的国际竞争中处于领先地位。

那么，怎样传播科技进步的信息使之引发生产力的进步呢？应该说，在众多信息传递工具中，图书仍然是最有力的载体。可惜，由于种种原因，一个时期以来，图书出版难，科学专著出版更加困难！

问题已经到了非解决不可的时候了！

广东地处我国改革、开放的前沿阵地，又是我国改革、开放先行一步的地区，历史的责任是不容推托的。有鉴于此，1989年，广东科技出版社发起成立广东优秀科技专著出版基金会，为解决科技学术著作出版难的问题，开辟一个新途径。这一倡议，得到科技界、新闻出版界和大专院校的专家、学者以及关心科技事业的人士的热烈响应和支持；并且得到广东省领导部门、社会各界以及海外、港、澳的企业、社会团体、个人的慷慨赞助。在大家的支持下，基金会于1989年10月正式成立，以钱伟长教授为首的一批知名的专家、教授热心地承担了基金会的顾问、评审委员工作，共同商定基金会扶持优秀科技专著出版的原则：依靠专家、公平竞争、择优支持，每年推荐一批符合要求的优秀科技与经济管理专著稿在广东科技出版社出版。基金会希望，通过缓解科技专著出版难，推动广东乃至我国科技事业的发展。

基金会成立以来，从本省以至首都，从海滨以至西北高原，为科学而献身的可敬的作者，纷纷送来珍贵的手稿，其中，许多是他们大半生心血凝聚成的精华；只是由于时间仓促，现在奉献给读者的著作，还未能完全做到遴选和出版来稿中最优秀的部分，不过，我们决心不停顿地努力下去，让更多优秀的科技著作陆续问世。

我们希望海内外各界人士继续大力支持广东优秀科技专著出版基金会的工作；向基金会推荐优秀科技专著；为基金会提供资金、条件；使基金会能在更广阔范围内，资助优秀科技专著的出版，在发展我国科技事业和迎接世界新技术革命挑战中，作出自己的贡献。

广东优秀科技专著出版基金会

**广东优秀科技专著出版基金会
顾问、评审委员会**

顾 问：钱伟长

（以下按姓氏笔画为序）

王 元	卢鸣谷	池际尚	李 辰
李金培	吴中伦	吴良镛	武泽民
郎景和	赵善欢	高由禧	裴维蕃
蒲蛰龙	谭浩强		

评审委员会

主 任：蒲蛰龙

委 员：（以姓氏笔画为序）

马俊林	邓铁涛	卢永根	卢明高
伍尚忠	许学强	刘振群	刘颂豪
李 辰	李任先	李岳生	李宝健
李炳熙	何镇陆	陈兴业	张士勋
张展霞	罗元恺	罗征祥	赵元浩
赵善欢	高由禧	高惠广	徐名滴
徐秉铮	黄衍辉	彭文伟	蒲蛰龙
欧阳莲			

THE MARKOV OSCILLATION PROBLEM

DAI YONGLONG

(Dept. Math. Zhongshan Univ. Guangzhou, China)

ABSTRACT

1. THE PROBLEM

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space. A stochastic process $Z = (Z(t); t \geq 0)$, taking the values 0 and 1, is said to be a regenerative phenomenon if there exists a function p on $(0, \infty)$ (called the p -function of Z) such that, whenever

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

we have

$$P(Z(t_1) = Z(t_2) = \dots = Z(t_n) = 1) = \prod_{r=1}^n p(t_r - t_{r-1})$$

A p -function $p(\cdot)$ is said to be standard if

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = 1.$$

We denote by $\mathcal{D}$ the class of all standard p -functions.

In 1968 R. Davidson posed the following tantalizing problem. Suppose $p \in \mathcal{D}$ with $p(1) = M$, $0 < M < 1$. How small is $m = \inf\{p(t); 0 \leq t \leq 1\}$? In other words, what pairs of (m, M) can occur?

As a special case of the above problem R. Davidson considered the following problem. For $p \in \mathcal{D}$, $0 < M < 1$, define

$$m(p) = \inf\{p(t); 0 \leq t \leq 1\},$$

$$I(M) = \inf\{m(p); p \in \mathcal{D}, p(1) = M\},$$

$$v_\infty = \inf\{M; I(M) > 0\}.$$

Davidson first proved that $v_\infty \geq 1/e$ and conjectured that

$$v_\infty = 1/e.$$

For more than two decades this conjecture has remained unproved but some upper bounds of v_∞ have been obtained by many reseachers.

In 1968 Davidson proved that $v_\infty \leq 3/4$, and which was independently proved by Blackwell and Freedman;

In 1973 Griffeth proved that $v_\infty \leq 2/3$;

In 1973 Cornish proved that $v_\infty \leq 1 - 1/e$;

In 1975 Joshi proved that $v_\infty \leq 0.59$;

In 1977 Joshi proved a better result: $v_\infty \leq 0.56$;

In 1984 Yu Yaoqi proved $v_\infty \leq 0.515$;

In 1986 Zou Jiezhong proved $v_\infty \leq 1/2$.

Up to 1990 the best result was $v_\infty \leq 1/2$.

I. THE MAIN RESULT

In papers [3~6] we used a new method to study the Markov oscillation problem. The most important result of these papers is that, we have succeeded in proving the above Davidson's conjecture completely.

Our final result is the following theorem which was proved in [6].

THEOREM. For any $p \in \mathcal{D}$ we have

$$p(t) \leq p(s) + 1/e, \quad 0 \leq s \leq t \leq \infty.$$

As a direct consequence of this theorem we immediately get

COROLLARY. $v_\infty \leq 1/e$.

REFERENCES

1. A. G. Cornish, Bounds for p -functions, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 169~175.
2. Dai Yonglong, On Kingman's inequalities, Acta Sci. Nat. Univ. Sun. (1987, No 4), 1~4 (Chinese).
3. Dai Yonglong, The oscillation of p -functions with exponential start, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 5 (1989), 161~172 (Chinese).

4. Dai Yonglong & Zou Jiezhong, On the oscillation problem of p -functions I-III, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 6(1990), 77~88, 161~173, 302~308. (Chinese).
5. Dai Yonglong, The Maximal value problem of p -functions, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 7(1991), 311~322 (Chinese).
6. Dai Yonglong, The Maximal oscillation problem of p -functions, Chin. J. Appl. Prob. Stat. 7(1991), 415~424 (Chinese).
7. Dai Yonglong, The Markov oscillation problem (English, to appear).
8. R. Davidson, Arithmetic and other properties of certain Delphic semigroups, Z. W. V. G. 10(1968), 120~172.
9. D. Griffeath, The maximal oscillation problem for regenerative phenomena, Ann. Prob. 1(1973), 405~416.
10. V. M. Joshi, A new bound for standard p -functions, Ann. Prob. 3(1975), 346~352.
11. V. M. Joshi, An improved upper bound for standard p -functions, Ann. Prob. 5(1977), 999~1003.
13. Yu Yaoqi, The new results of the bound of the standard p -functions, Chin. Ann. Math. 5A(1984). 473~482 (Chinese).
14. Zou Jiezhong, The oscillation problem for p -functions, D. Phil. Thesis, 1986 (Chinese).
15. D. Blackwell & D. Freedman, On the behaviour of Markov transition probabilities, Ann. Math. Stat. 39(1968), 2123~2127.

目 录

引论	1
第一章 更新序列与马氏链	11
§ 1 分析方法	11
§ 2 概率方法	21
§ 3 Kingman 不等式	28
§ 4 无穷可分性	33
§ 5 遍历理论	37
§ 6 问题	45
第二章 连读时间再生现象	49
§ 1 再生现象	49
§ 2 标准再生现象	52
§ 3 再生现象的例	56
第三章 p -函数论	61
§ 1 标准 p -函数的拉氏变换	61
§ 2 收敛性	74
§ 3 离散骨架方法	83
§ 4 右导数与左导数	87
§ 5 无穷可分性	92
§ 6 稳定的标准 p -函数	102
§ 7 问题	107
第四章 Kingman 不等式	109
§ 1 (m, M) 图问题与 Davidson 问题	109
§ 2 二、三阶 Kingman 不等式的初步结果	115

§ 3	n 阶 Kingman 不等式	119
§ 4	标准 p - 函数的二阶 Kingman 不等式的改进 及其应用	127
§ 5	问题	145
第五章	标准 p- 函数的最大值问题	147
§ 1	退化 p - 函数	147
§ 2	本章的问题和主要结果	153
§ 3	若干引理	155
§ 4	本章主要结果的证明及其应用	162
§ 5	非稳定标准 p - 函数的情形	174
§ 6	问题	176
第六章	标准 p- 函数和它的退化的 p- 函数的最大差	177
§ 1	本章的主要结果与证明思路	177
§ 2	主要结果的证明(一)	181
§ 3	主要结果的证明(二)	195
§ 4	主要结果的证明(三)	213
第七章	标准 p- 函数的最大振幅问题	217
§ 1	问题和主要结果	217
§ 2	若干引理	219
§ 3	主要结果的证明及其推论	226
§ 4	问题	232
参考文献		233
符号索引		238

CONTENTS

Introduction	1
Chapter I. Renewal Sequences and Markov Chains	11
1. Analytic methods	11
2. Probability methods	21
3. Kingman inequalities	28
4. Infinitely divisible renewal sequences	33
5. Ergodic theorems	37
6. Open problems	45
Chapter II. Regenerative Phenomena in Continuous Time	49
1. Regenerative phenomena	49
2. Standard regenerative phenomena	52
3. Examples of regenerative phenomena	56
Chapter III. Standard p-Function Theory	61
1. Laplace transforms of standard p -functions	61
2. Convergence	74
3. The method of skeletons	83
4. Right and left derivatives	87
5. Infinitely divisible standard p -functions	92
6. Stable standard p -functions	102
7. An open problem	107
Chapter IV. The Theory of Kingman Inequalities	109
1. The (m, M) diagram problem and Davidson problem ...	109
2. Some simple results of the second and third order	

Kingman inequalities	115
3. The n th order Kingman inequalities	119
4. The improvement of the second order Kingman inequalities and its applications	127
5. Open problems	145
Chapter V. The Maximal Value Problem of Standard	
p-Functions	147
1. Degenerate p -functions	147
2. The problem and the main result of this chapter	153
3. Some lemmas	155
4. Proof and some applications of the main result	162
5. the non-stable case	174
6. An open problem	176
Chapter VI. The Maximal Difference Problem between	
Standard p-Functions and Their Degenerations	177
1. The problem and the main result of this chapter	177
2. Proof of the main result (1)	181
3. Proof of the main result (2)	195
4. Proof of the main result (3)	213
Chapter VII. The Maximal Oscillation Problem of Standard	
p-Functions	217
1. The problem and the main result of this chapter	217
2. Some lemmas	219
3. Proof of the main result and some consequences	226
4. An open problem	232
Bibliography	233

引 论

在概率论与随机过程的诸多分支中,马氏过程有它特殊重要的地位:有比较完整的基础理论;有非常丰富的研究内容;在数学和一些其它自然科学领域里有着广泛的应用和应用前景;是一支已经相当成熟并在继续迅速发展的分支学科.

作为马氏过程的重要组成部分,马氏链的研究一直十分活跃.在这一领域,早期提出的某些基本问题已经取得了完满的结果或者获得了重要的进展.例如存在性问题与唯一性问题就已经被彻底解决而大致告一段落.马氏链的构造问题也已经获得了丰硕的研究成果.概括这一理论的重要专著有 Chung (1967)、Hou (1982b)和 Yang (1986).

随着马氏过程理论研究的步步深入,新的研究课题与研究方法不断涌现.早在 60 年代,以剑桥大学为中心的一批英国数学家(如 D. G. Kendall, J. K. C. Kingman, G. E. H. Reuter 和 R. Davidson 等)就提出了一系列扩展马氏过程理论或者与其相关的值得深刻研究的问题.这些问题不仅大大地丰富了马氏过程的研究内容,而且提供了新的研究方法.下面我们仅仅介绍与本书密切相关的两个问题.

为了叙述方便,首先略述某些熟知的定义.

设 S 是可列集. $(p_{ij}(t), t \geq 0, i, j \in S)$ 称为标准马氏链,如果对任意 $i, j \in S, s, t \geq 0$, 有

$$(1) \quad p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j \in S} p_{ij}(t) \leq 1.$$

$$(2) \quad p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t).$$

$$(3) \quad \lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ 1, & \text{当 } i = j. \end{cases}$$

现设 $(E, \mathcal{E})$ 是任意可测空间, 其中 σ 代数 $\mathcal{E}$ 包含 E 的一切单点集. 称 $P(t, x, A)$ ($t \geq 0, A \in \mathcal{E}$) 是马尔科夫转移函数, 如果它满足

i) 固定 $t \geq 0, x \in E$, $P(t, x, \cdot)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的非负测度 (今后我们简称非负测度为测度), 且 $P(t, x, E) \leq 1$;

ii) 固定 $t \geq 0, A \in \mathcal{E}$, $P(t, \cdot, A)$ 是 $\mathcal{E}$ 可测函数;

iii) 对一切 $s \geq 0, t \geq 0, x \in E, A \in \mathcal{E}$ 成立

$$(4) \quad P(t+s, x, A) = \int P(s, x, dy) P(t, y, A).$$

对给定的马尔科夫转移函数 $P(t, x, A)$ ($t \geq 0, x \in E, A \in \mathcal{E}$), 如果对某 $x \in E$ 成立

$$(5) \quad \lim_{t \downarrow 0} P(t, x, \{x\}) = 1$$

则称 x 是标准点. 如果任意 $x \in E$ 都是标准点, 则称 $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ 是跳过程转移函数.

现在我们叙述问题 I.

问题 I

假定 $B(t)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的一个函数. 问题是:

i) B 应具备什么特征, 才存在马氏链 $(p_{ij}(t), t \geq 0, i, j \in S)$ 及状态 i_0, j_0 使

$$(6) \quad p_{i_0 j_0}(t) = B(t) ?$$

ii) B 应具备什么特征才存在马尔科夫转移函数 $P(t, x, A)$ ($t \geq 0, x \in E, A \in \mathcal{E}$) 及 $x_0 \in E, A_0 \in \mathcal{E}$ 使

$$(7) \quad P(t, x_0, A_0) = B(t) ?$$

这是一个十分困难的问题,英国数学家 J. F. C. Kingman 花了7年的时间,仅仅获得上述问题的部分解答.然而,他获得的结果是极其漂亮的,英国数学家 Kendall 在“随机分析”(D. G. Kendall and E. F. Harding 1973)一书的引言中,给 Kingman 的这一研究工作以很高的评价.现在我们就来叙述他所获得的两个完美的结果.

为此,我们首先叙述定义在 $[0, \infty)$ 的两个函数类.

我们恒以 $\mathscr{D}$ 记定义在 $[0, \infty)$ 上而且满足下述条件的全体函数.

i) $p \in \mathscr{D}$, 则 p 在 $[0, \infty)$ 上连续;

ii) $p \in \mathscr{D}$, 则 p 的拉氏变换存在且有形式

$$(8) \quad \hat{p}(\theta) = \int_0^\infty p(t)e^{-\theta t} dt = \left(\theta + \int_{(0, \infty]} (1 - e^{-\theta x}) \mu(dx) \right)^{-1},$$

$$\theta > 0,$$

其中 μ 是 $(0, \infty]$ 上的测度 ($\mu(\{\infty\})$ 可能 > 0), 它满足条件

$$(9) \quad \int_{(0, \infty]} (1 - e^{-x}) \mu(dx) < \infty.$$

以 $\mathscr{D}_M$ 记定义在 $(0, \infty]$ 上而且满足下列条件的全体函数:

i) $p \in \mathscr{D}_M$, 则 p 在 $[0, \infty)$ 上连续;

ii) $p \in \mathscr{D}_M$, 则 p 的拉氏变换存在且有形式

$$(10) \quad \hat{p}(\theta) = \int_0^\infty p(t)e^{-\theta t} dt = \left(\theta + a + \int_0^\infty (1 - e^{-\theta t}) f(t) dt \right)^{-1},$$

$$\theta > 0,$$

其中 $a \geq 0$ 是常数, 而 f 是 $(0, \infty)$ 上的函数且满足

a) f 在 $(0, \infty)$ 上是下半连续的;

$$b) \quad \int_0^\infty (1 - e^{-t}) f(t) dt < \infty;$$

c) 或者 $f \equiv 0$, 或者对一切 $t > 0, f(t) > 0$;

d) 如果 $f \not\equiv 0$, 则存在 $\beta > 0$ 使

$$f(t) \geq e^{-\beta t}, \quad t > 1.$$

显然, $\mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}$ (令 $\mu(\{\infty\}) = a, \mu(A) = \int_A f(t) dt$, 其中 $\infty \notin A$, (10) 就变成(8)).

下述结果见书后参考文献(J. F. C. Kingman (1971)).

命题 I

假定 $B(\cdot)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的函数, 则存在马氏链 $(p_{ij}(t), t \geq 0, i, j \in S)$ 及状态 $a \in S$ 使

$$p_{aa}(t) = B(t), \quad t \geq 0,$$

的充要条件是: $B \in \mathcal{D}_M$.

命题 I 所描述的特征, 称为马氏链对角线元的特征刻划 (我们将马氏链 $(p_{ij}(t), t \geq 0, i, j \in S)$ 的任意元 $p_{ii}(\cdot)$, $i \in S$ 称为对角线元, 而 $p_{ij}(\cdot)$, $i \neq j$ 称为非对角线元).

命题 I 表明, 虽然马氏链的构造问题远未解决而一直困扰着概率论学者, 但是所有马氏链 (不管是否稳定) 的对角线元却被全部构造了出来. 由此人们会自然地提出: 如何刻划马氏链的非对角线元? 换言之, 问题 I 中关于马氏链的对角线元的部分已彻底解决, 而对于非对角线元的特征刻划则仍是一个未解决的问题. 如果这个问题获得解决, 相信对马氏链的构造问题的最后解决会有很大的帮助.

命题 I 的结论对 Polish 空间上的跳过程转移函数也是正确的, 这时它可以表述为:

命题 I' (见 Kingman (1972) 中定理 7.5)

设 E 是一 Polish 空间, $\mathcal{E}$ 是 E 的全体 Borel 集类. 又设 $p(t, x, A) (t \geq 0, x \in E, A \in \mathcal{E})$ 是跳过程转移函数, 则对任意 $x \in E$ 有

$$p(\cdot, x, \{x\}) \in \mathcal{D}_M.$$

对跳过程转移函数 $p(\cdot, \cdot, \cdot)$, 固定 $x \in E$, 我们也称 $(p(t, x, \{x\}), t \geq 0)$ 是 $p(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的对角线元, 因此, 如果 E 是 Polish 空间, $(E, \mathcal{E})$ 上的跳过程转移函数的对角线元属于 $\mathcal{D}_M$, 如果 E 不是 Polish 空间, 命题 I' 的结论尚未被证明.

命题 I (见 Kingman (1972) 中定理 7.1)

假定 $B(\cdot)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的函数. 则存在可测空间 $(E, \mathcal{E})$, 马尔科夫转移函数 $P(t, x, A) (t \geq 0, x \in E, A \in \mathcal{E})$ 和标准点 $x_0 \in E$ 使

$$p(t, x_0, \{x_0\}) = B(t)$$

的充要条件是: $B \in \mathcal{D}$.

命题 II 刻划了马尔科夫转移函数全体标准点对角线元. 从定义容易看出 $\mathcal{D}_M \subset \mathcal{D}$ 但 $\mathcal{D}_M \neq \mathcal{D}$. 由命题 I' 和命题 II 立即推出: 如果 E 是 Polish 空间, 而 $P(t, x, A) (t \geq 0, x \in E, A \in \mathcal{E})$ 是马尔科夫转移函数, x_0 是标准点, $p(\cdot, x_0, \{x_0\}) \in \mathcal{D}$ 但 $p(\cdot, x_0, \{x_0\}) \notin \mathcal{D}_M$, 则 $p(\cdot, \cdot, \cdot)$ 不是跳过程转移函数, 即必定存在非标准点.

本书的研究对象就是 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}_M$. 对于 $\mathcal{D}$, 在第二章我们将要