数理逻辑通俗讲话

王浩著

科学出版社

数理逻辑通俗讲话

王 浩 著

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书是作者在关于数理逻辑的六次讲演的基础上写成的．全书共八章并有三个附录．第一章和第八章是一般性概述．第二章介绍形式系统、谓词演算和 Gödel 不完全性定理以及不可判定的数学问题．第三章介绍计算机的进展、计算机应用的几个例子和四色定理的证明．第四章讨论问题与解，第五章讨论一阶逻辑，第六章讨论理论的和可实现的计算，第七章讨论直线上有多少个点？这些讲演一般是互相独立的，可不必顺序阅读．

本书可供高等学校数学系师生以及有关研究人员参考．

数理逻辑通俗讲话

王 浩 著

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981 年 2 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1981 年 2 月第一次印刷　印张：8 3/8

印数：0001—10,300　字数：216,000

统一书号：13031 · 1424

本社书号：1966 · 13—1

定 价： 1.55 元

出 版 说 明

本书是王浩教授所著“Popular Lectures on Mathematical Logic”一书的中译本，由以下同志翻译和校订：

第一章　张家龙译，晏成书校.

第二章　张家龙译，晏成书校.

第三章　吴允曾译，陆钟万、许孔时校.

第四章　高恒珊译，王世强校.

第五章　黄且园译，王世强校.

第六章　杨东屏译，陆钟万校.

第七章　杨安洲、张锦文译，王世强校.

第八章　张尚水译，晏成书校.

附录A　高恒珊译，吴允曾校.

附录B　陈炳泉译，吴允曾校.

附录C　徐书润译，王世强校.

并由许孔时、陆钟万负责全书的校订工作.

前　　言

一九七七年十月间，我在中国科学院作了六次关于数理逻辑的广泛而通俗的讲演．在为出版而对这些讲演稿进行加工时，我冒昧地表达了许多不成熟的意见，并且，为了适当程度的完备，讨论了有关技术方面的问题，而在这方面我的知识是很有限的．另外，写稿过程中的意外中断起了妨碍作用．因此不可避免会有许多这样那样的错误．每当多样的发展只能通过例子来说明时，我自然选择了我所熟悉的东西．

内容的组织是不容易的．这些讲演一般是互相独立的，因此不必顺序阅读．有时候某些概念和定理在不同的地方重复陈述，交叉引用．三个附录可能是本书中最初等的部分．第三章和第四章也不假定读者要熟悉数理逻辑．第一章和最后一章是一般性概述．其余四章参差不齐，有的部分阅读起来不需要很多的预备知识，另外的部分仅以表面上是简单的方式讲了复杂的内容．

建议读者每当遇到有重大困难的特殊问题时不要花费太多的时间．很可能书中有错，或者在陈述中省略了必要的准备知识．由于本书试图引起各种不同数学训练程度的广大读者的兴趣，而且要在简短的篇幅中讨论很多的问题，有的读者将会觉得某些部分太浅，而另外的读者却觉得太深，这是可以预料到的．

王　浩

目　　录

第 一 章

数理逻辑一百年

我们首先来叙述数理逻辑发展史中的一些中心概念和定理，也将简要地论述数理逻辑与其它学科的关系．本章所讲到的一些成果将在其它几章和附录中更细致地予以考察．

对于现代逻辑概念的片断的预见，我们通常追溯到 Leibniz (1646—1716)．他的排列理论的概念包括关于同一和包含关系的演算，这种演算是和 Boole 代数的方向一致的．他力图建立一种精确的、普遍的科学语言，并寻求一种推理演算，以便能用计算来解决论辩和争论的问题．

1847 年，George Boole (1815—1864) 出版了他的《逻辑的数学分析》一书，这本书发展了一种逻辑代数，现今在数学中通常称为 Boole 代数．作为逻辑来说，它相应于命题演算，并由 C. S. Peirce 和 O. H. Mitchell 在 1883 年扩展到相应于谓词演算的形式；E. Schröder, L. Löwenheim 和 Skolem 在这一传统方面作出了杰出的贡献．

把数理逻辑的创始回溯到 1880 年前不久提出谓词演算(一阶逻辑) 和集合论的时候，这是恰当的[1]．数学的两个研究方向起着

1) 有两部篇幅相当长的形式逻辑史的书：I. M. Bochenski, *A history of formal logic* (I. Thomas 译), 1961; W. and M. Kneale, *The development of logic*, 1962．还有一本计划相当庞大的、比较广泛地讨论逻辑的一个纲要：Heinrich Scholz, Abriss, 1931, 1961 年译成英文，书名是 *Concise history of logic* (中译本：《简明逻辑史》，张家龙译，商务印书馆，1977 年．——译者注)．从 1878 年至 1931 年的数理逻辑原著已编译成一本英文的文集：*From Frege to Gödel*. J. van Heijenoort 编，1967 年．Cantor, Hilbert, Brouwer, Skolem, Herbrand, Gentzen 等人的文集(或选集)都已出版．

不为人们注意的重要作用：一是对公理方法的兴趣；二是有关分析（特别是实数和任意的实函数）基础的研究．1880 年以来的一个主要倾向是谓词演算和集合论之间相互起作用．

另一个重要倾向是研究公理方法，这不但表现在获得和研究数论、几何、分析和集合论的公理系统；而且表现在对形式系统的概念进行了一般研究，这种研究深化了公理系统的概念，并取得了关于形式化的局限性的重要成果[1]．

有一个成就是关于理论上可计算性的精确概念，它产生了递归论的学科并为提出计算理论奠定了基础．计算理论迄今为止对于实际的计算直接有用的成果甚少，大多数的结果只是处理理论上的可判定性和不可判定性．可行计算理论的发展仍处在相当初始的阶段．与计算机的进展最有关的却是两个领域对于要求明显形式化的共同关注：这种形式化使数理逻辑在培养程序设计专业人员特别是培养设计程序语言的专业人员方面成为一门有用的学科[2]．一个比较明显的应用是计算机逻辑电路的设计，因为这些电路在性质上相应于 Boole 表达式或命题演算的表达式．顺便说一下，Boole 代数和一些简单的算法是很简单的，可在中学里讲授．

近年来数理逻辑已在数论（例如，判定 Diophantos 方程是否可解的问题）、代数（例如，群的字问题，Artin 关于 P 进域的猜想的证明）、拓扑（特别是协调性和独立性的证明）以及关于无穷小的精确理论方面得到了应用．上述无穷小理论采用了为给正整数找一个非标准模型而第一次引进的技巧，并且涉及到直观的推论及其严格规范化的广泛的哲学问题．对许多人来说，现今对非标准分析的表述似乎是人为的，因而自然会提出如下问题，即是否有必要用这种绕弯子的办法来论证无穷小的直观应用是正当的．

关于把公理系统看成和形式系统是同一个东西也存在类似的问题．有一种倾向是把公理方法作比较广泛的解释，使得并非样样东西都需要象在形式系统中那样完全是明显的．另一方面，在

1）见第二章．

2）见第三章．

这种较广的意义下，我们并不具有关于公理系统的精确概念.

多年来数理逻辑与学院哲学有错综复杂的联系. 在数理逻辑的早期发展中，与传统哲学的关系曾推动了它的进展. 但是数理逻辑对于学院哲学的影响看起来主要是为逃避同人和自然有关的实在而又复杂的问题提供另外一种借口.

在数学中朝着更可靠的和直观上更显然的推理的趋势，产生了直觉主义及其构造性的概念，产生了证明论及其用构造性方法证明形式系统(它整理了非构造性的推理)的协调性的企图. 发现非构造性命题的构造性解释这种可能性，有助于把证明论同直觉主义相当紧密地联系起来. 但是这整个研究领域，在把非构造性方法归约到构造性方法或用构造性方法来证明非构造性方法的正确性方面，还没有取得特别丰富的积极成果.

除了下述的专门结果外，谓词演算和集合论的相互作用也产生了模型论的学科，它用集合的直观概念来研究在谓词演算框架中精确陈述的理论的解释.

现今，人们通常认为数理逻辑是由下列四个领域组成的[1]：(1) 集合论；(2) 模型论；(3) 递归论；(4) 构造主义和证明论. 此外，有两个不太确定的领域，可以叫做：(a) 逻辑和计算机；(b) “数学基础”.

另外一种刻划逻辑的方法是：把它看成是研究形式语言和形式系统（主要是逻辑和数学的形式系统）的语法(表达式之间的关系)和语义(表达式同它们的意义或解释之间的关系). 粗略说来，递归论和证明论主要与语法有关；集合论和模型论主要与语义有关.

Cantor 在 1869 年开始研究用三角级数表示一个函数的问题，

---

1) 这些领域在本书的以下不同部分加以考察：集合论在第七章和第八章；模型论在第五章；递归论和计算机在附录 C，第六章和第三章；构造主义和证明论在第八章简述. 关于一般的数理逻辑教科书，可提出三本：J. R. Shoenfield, *Mathematical logic*, 1967; Yu. I. Manin, *A course in math. logic*, Springer-Verlag, 1977; J. Bell 和 M. Machover, *A course in math. logic* North-Holland, 1977. 在本书中，我们将经常提到 *Handbook of mathematical logic*, Jon. Barwise 编，1977 年 12 月出版，有一千多页和三十多个撰稿人.

在 1872 年引进了一个点集(实数集)的导出集(极限点的集)的概念. 1880 年,他联系到无穷多次重复形成一个点集的导出集的过程,第一次提出了无穷序数. Cantor 在 1874 年利用一一对应的概念证明了:实数是不可数的. 1883 年他发表了一篇长文(也是一篇独立的专论),第一次系统地展开了他的超穷数理论.

在一个不同的方面, Frege 于 1879 年出版了他的《概念文字》(Begriffsschrift) 一书,在这本书中第一次把谓词演算形式化了. 序列的理论也提出来了,这个理论以后导致用集合论的(或如 Frege 所说的逻辑的)概念来定义整数.

Peano 公理在 1889 年第一次发表,它们也利用了 Dedekind 在前一年的论文. Dedekind 1890 年写的一封信(在 1957 年才第一次发表)对这些公理起了有益的推进作用[1].

Cantor 在 1878 年第一次提出了连续统假设作为一种猜想. 这个假设是说,实数(线段上的点)同可数序数一样多,或者说连续统的基数是第一个不可数基数. 这是 Hilbert 在 1900 年列出的未解决问题中的第一个问题,至今仍未得到解决.

1900 年后的十年间,引进了一些基本概念. Zermelo 明确地表述了选择公理并提供了一个集合论的公理系统. Hilbert 第一次谈到在数论中借助于考察可能的证明方法获得协调性的结果. Brouwer 提出了他那种形式的直觉主义. 根据 Richard 和 Poincaré 提出的"禁止恶性循环原则",Russell 表述了分支类型论,我们可把它看成是明确地用谓词演算来研究集合论的基础.

以后二十多年, Zermelo 的集合论公理由 Mirimanoff, Skolem, Fraenkel 和 von Neumann 加以改进. 特别是 Skolem 把"确定的性质"这个有点模糊的概念等同于在谓词演算中可定义的概念. Löwenheim 和 Skolem 在谓词演算方面做了令人感兴趣的工作. 特别引人注意的成果是"佯谬式的"定理:如果公理集合论有一个模型,那么它就有一个可数模型. 因为我们想要有许多不可数的

---

1) 见第二章.

集合，这一点就显示出形式系统的局限性.

在这个时期之后，Hilbert 本人虽没有获得重要的明确的结果，但他从一个卓越数学家的高位所提出的大胆方案起了巨大的影响. 在他的影响下，Ackermann 和 von Neumann 在证明数论的协调性方面获得了部分结果. 关于谓词演算的判定问题（简称为"Entscheidungsproblem"）只获得有限的结果. Hilbert 本人勾画了证明连续统假设的道路. 对谓词演算形式系统的完全性加以定义，并作为一个未解决的问题提了出来.

从 1930 年开始，Gödel 发表了一些有份量的结果，极大地澄清了所有这些问题，开辟了数理逻辑的新纪元[1]. 在 1930 年，Gödel 发表了他的博士论文，建立了众所周知的谓词演算系统的完全性. 情况表明，Gödel 证明的许多技术性部分在 Skolem 1922 年的一篇文章中已经得到了，但是在 1930 年 Gödel 并不知道. 在 1931 年，著名的不完全性结果发表了，它明确地证实了数论或分析或集合论的形式系统是不完全的和不可能完全的. 此外，其中一个系定理说：一个给定的形式系统的协调性证明需要用到系统外的证明方法. 这些定理给了 Hilbert 方案以致命一击，Hilbert 方案的精神实质是还原主义的和实证主义的，目的在于通过证明数学中丰富的直观和经验同简单的组合概念的协调性，把前者归结为后者. 在同一篇文章中还包含一些结果，即对判定问题和判定 Diophantus 方程的可解性提出了否定的答案.

不完全性结果不是用充分一般的形式给出的，这是因为机械程序和形式系统的一般概念在 1931 年还没有得到. 以后不久，Gödel 根据 Herbrand 的提示引进了一般递归函数的概念，Church 和 Kleene 从那时以来对一般递归函数做了重要的工作. Turing 在 1936 年引进了令人信服的一般机器的概念，它把现已普遍接受的理论上可计算性的概念同机械程序和形式系统的概念统一起来了. 一旦可以使用一般概念，把 Gödel 得到的有关结果予以推广

1）关于这个问题的更详细的说明，见第七章和第八章.

来建立数论和谓词演算的其它不可判定性的结果，那就比较容易了.（注意到下述一点是有趣的：Gödel 也建立了判定问题中极其丰富的、自然的可判定部分情况的可判定性.）

在1930年夏天，Gödel 开始研究分析对数论的相对协调性，用整数的性质或语句(命题函数)表示实数. 他很快陷入同真假性和可定义性相联系的说谎者悖论和 Richard 悖论. 他认识到数论中的真不能在数论中定义，他的相对协调性的证明计划没有实现. 他继续得出如下结论：在相当强的形式系统中，存在不可判定的命题. 因此，他受 Hilbert 方案的影响是明显的.

Gödel 开始考虑连续统假设和第一次听到 Hilbert 提出的证明要点，一定是在1930年. 他感到人们不应当以构造性方式建立分层，对于(相对)协调性的证明没有必要这样做. 他想到了分支分层. 1935年，Gödel 获得了可构成集的概念，证明了集合论的公理（包括选择公理）对它成立，并推测连续统假设对它也成立. 1938年夏，Gödel 把他的结果推广到今天人们所熟知的范围：广义连续统假设不能被集合论的公理否证，这是从 Cantor 在1878年提出连续统问题以来关于它的第一个重大成果.

从 Gödel 不完全性结果得到：对任意一个给定的数论的形式系统来说，存在非标准模型. 有一个较长的时期，Skolem 曾试图找出数论的非标准模型. 在1933年他用一种新方法得到了这样的一个模型，这种方法在很大程度上预示了大约二十年后超积的使用.

在证明论和直觉主义的领域中，除了主要的 Gödel 不完全性定理外，Gentzen 于1936年提出了数论的协调性证明，它从那时以来经历了各种改进和推广. 在1932年，Gödel 提出了古典数论在直觉主义数论中的一种解释(或翻译). 在1942年，他借助原始递归泛函又提出了直觉主义数论的一种解释，这个结果在1958年才发表. 从那时以来，把 Gödel 的解释推广到古典分析方面人们做了很多工作. 关于归纳定义和直谓的(或构造主义的)分析也进行了广泛的研究. Troelstra 和其他一些人对直觉主义的形式研究作

过某些整理工作.

大约在 1950 年以后渐渐形成了模型论. 首先出现的结果是精致地重新表述人们熟知的事实. 以后有趣的定理和应用开始出现. 特别是它也用来研究大基数,结果在 1960 年前后出现了 Hanf 数,而且 Scott 证明了可测基数产生非可构成集. 常常提到的给人深刻印象的结果是 Morley 关于势的范畴性定理,这个定理由 Ax 和 Kochen 应用到代数问题上.

对集合论的进一步发展(包括它和模型论的相互作用)所给予的最强有力的影响,来自 P.J. Cohen 在 1963 年对连续统假设的独立性证明. 且不说这结果的重要性,其所用的方法也表现出有很广的应用范围[1]. 例如,Solovay 不久用弱选择公理证明了下述命题的协调性:每一个实数集是 Lebesgue 可测的.他不得不假定有不可及基数;这个较强的假定能否避免仍是一个没有解决的问题[2]. 除了用 Cohen 方法获得了各种独立性结果之外,还出现了对集合论其它方面兴趣的普遍高涨. 例如,关于决定性公理包括它与大基数的关系以及它们和描述集合论的关系,D.A. Martin, Solovay, H. Friedman 和其他一些人曾作了大量工作[3]. Jensen 和其他人比较细致地考察了可构成集的结构. 划分性质和不可分辨的对象(追溯到 1929 年的 Ramsey 定理,它第一次引进来是为了讨论判定问题的一个简单情况)由 Rowbottom, Silver 和其他人广泛地加以研究. 现在,连续统问题仍然是最有挑战性的专门问题;为了取得一般的进展,人们努力去弄清大基数(特别是那些需要非可构成集的大基数)的性质.

一般递归函数和 Turing 可计算函数的概念曾导致递归论和一些具有特殊兴味的机械上不可解的问题. 从一般理论上,进行了如下研究:不可解性的程度,算术分层,超算术分层,以及怎样推广到可允许序数和可允许集(同集合论和模型论相互作用)上

---

1) 见第七章.

2) Robert M. Solovay, *Annals of math.*, vol. 92 (1970), pp. 1—56.

3) 某些结果的简述在第八章给出.

面. 在特殊的问题中最著名的结果或许是: 在 1970 年解决了的 Diophantus 方程的解的存在问题(Hilbert 第十问题)的不可解性和 1955年解决了的群的字的问题的不可解性.

Turing 应用他的机器通过用谓词演算的语句表示每一部机器,证明谓词演算的判定问题是不可解的. 表示法有如下性质: 当且仅当语句没有模型时,机器从空白带子开始后将最终停下来. 因为没有一部机器对所有机器而言能够判定它是否将停止在空白带子上, 因此没有一种算法能一般地判定谓词演算的语句是否有模型. 在 1962 年, 这种方法大大改进了,以致只用非常简单的形式 $\forall x\exists y\forall z Mxyz$ 的语句($\forall\exists\forall$ 语句)就足够了. 因此,即使是对 $\forall\exists\forall$ 情况而言判定问题也是不可解的[1].

在 1971 年,Cook 能借助一个命题演算的语句以下述方式表示每一部带有给定输入的 Turing 机: 机器能在"多项式时间"内"猜到"输入的问题的答案, 当且仅当语句是可满足的. 用技术性的术语来说就是,判定一个 Boole 表达式是否可满足的问题是 NP 完全的, 这里 NP 代表"非确定性的多项式". 这个结果引起了广泛的兴趣, 因为它很快导致下述结论: 就多项式时间内的可判定性来说,许多不同类的计算问题是等价的.

有一个假设或论题是: 用实际的或可行的计算, 一类问题是可解的,当且仅当我们有一个算法,借助这个算法在这个类中长度为 n 的问题能在时间 $P(n)$ 中判定,这里 $P(n)$ 是一个多项式, n 是其中唯一的变元. 人们作了许多努力, 致力于发现许多等价类中的任何一个类能否在多项式时间内判定. 中心的问题通常表达成: 试问 P = NP 是否成立? 然而在这个尝试中有一些令人感到不安的特点. 首先,多项式时间可能很大, 以致例如, 如果为了解决长度为 n 的问题需要 $n^{10^{20}}$ 步的话, 则算法几乎不能叫做可行的. 其次,问题在很大程度上是未解决的,因为我们甚至连弱得多的否定结果都没有: 例如, 我们甚至不知道 Boole 表达式的可满

1) 见第五章和附录 C.

足性在二项式时间内不是可判定的[1].

利用在数理逻辑中强调形式化这一优点的一个自然的想法，就是试图系统地用计算机证明定理. 到 1960 年,在这方面有出人意料的初步成功. 但是上述计划迄今还没有吸引足够多的人沿着正确的方向来进行研究. 或许除了应用到检验计算机程序(以比较简单的逻辑推导为基础)的正确性而外,直到现在进一步的进展都是不重要的. 另一方面，用计算机帮助证明定理这种比较特别的应用有一些给人深刻印象的结果，尤其是近来证明四色猜想中必不可少地应用了计算机[2].

1) 见第六章.
2) 见第三章.