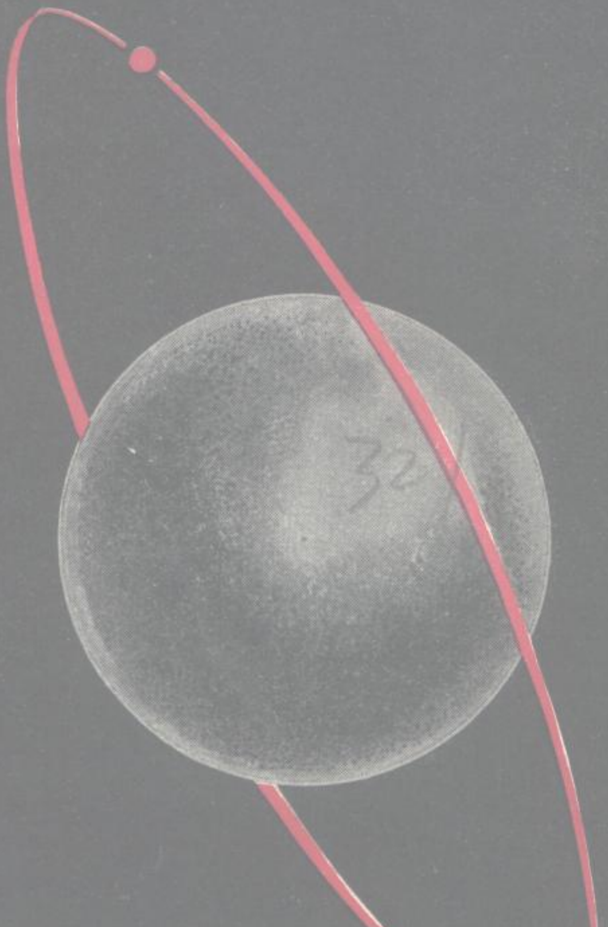
# 理论力学习题分析与解答



姚德生

水利出版社

# 理论力学习题分析与解答

姚 德 生

水 利 出 版 社

## 内 容 提 要

本书根据大学工科和理科理论力学教学内容编写的，内容由静力学、运动学、动力学及分析力学等四部分组成，其中包括最新科学成就如火箭、人造卫星以及部分国外习题。共列500多题解。在各部分前面都有基本理论与主要解题步骤，在内容和编排上也适当考虑到读者的需要。

本书可作为教学和自学参考书。可供工程技术人员阅读；亦可供工科院校、综合大学、高等师范院校物理各专业及其他院校相近专业参考；并可供中学数理教师、电视大学学员、函授业余大学学员及自学者参考。



**理论力学习题分析与解答**

姚 德 生

*

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 $19\frac{3}{4}$印张 527千字

1981年3月第一版 1981年3月北京第一次印刷

印数 00001—60310册 定价 2.45元

书号 15047·4102

# 编 者 的 话

一、理论力学是大学理工科的基础理论课，为了广大读者能学好这门基础理论课，巩固和加深对理论力学基本概念、原理、定理的理解和应用，特编写本书。

二、本书所收集的习题主要选自周衍柏编著《理论力学》及其他大专院校现行理论力学教材，也从美国D·T·Greenwood编《动力学原理》及R·C·Hibbeler编《工程力学》中选编了部分习题，并参考了王铎主编《理论力学习题集》。全书分静力学、运动学、动力学及分析力学等四部分，共收集习题518道，计静力学129题，运动学98题，动力学204题，分析力学87题。其中包括有最新科学成就如火箭、人造卫星和行星运动等方面的习题。

三、为了使读者能系统地集中地掌握理论力学物理概念，每个部分前面都介绍了基本原理、基本公式及解题的主要思路与步骤。解题方法力求做到简明扼要，概念明确，推理严密，步骤完整，有分析、有讨论，由浅入深，绝大部分题解都附有示意图，便于学习和理解。

四、本书可供工程技术人员，理工科院校、电视大学、函授大学、业余大学等师生参考，也可供中学数理教师及自学者参考。

本书在编写过程中天津大学虞润禄同志提出很多宝贵意见，特此表示感谢。由于本人水平有限，书中一定存有不足之处，希望读者批评指正。

编 者

1979年8月于武汉水利电力学院

# 目　　录

# 第一部分 静 力 学

## 一、基本概念与规律

静力学是研究力系的简化规律及物体受力作用下的平衡条件的一门科学。

**（一）四个公理**

1.*两力平衡公理*：欲使作用在同一刚体上的两力平衡，其必要与充分的条件是：此两力的大小相等，方向相反，并且作用在一条直线上。

2.*加减平衡力系公理*：在已知力系中加上（或取出）任一平衡力系，并不改变此力系对刚体的作用。

3.*力的平行四边形公理*：作用在一点的两个力，其合力亦作用在该点上；合力的大小与方向由以这两力为边所组成的平行四边形对角线表示之。

4.*作用与反作用公理*：一物体对另一物体有一个作用力的同时，另一物体必给此物体一个反作用力。作用力和反作用力总是大小相等，方向相反，且作用在一直线上。

**（二）力系**

1.*平面汇交力系*

（1）平面汇交力系的合力等于所有已知力的矢量和，合力的作用线通过所有力的汇交点。

数学表达式：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$

在直角坐标系中 $\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}\boldsymbol{i}+\sum_{i=1}^{n}F_{iy}\boldsymbol{j}=\Sigma X\boldsymbol{i}+\Sigma Y\boldsymbol{j}$

$$R=\sqrt{\Sigma X^2+\Sigma Y^2},\ \cos\alpha=\frac{\Sigma X}{R},\ \cos\beta=\frac{\Sigma Y}{R}$$

式中$\alpha$和$\beta$表示合力与$x$和$y$轴之间的夹角。

（2）平面汇交力系平衡的必要与充分条件：$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=0$，即该力系的力多边形是封闭的。若三个力互相平衡，则力三角形也是封闭的。

在直角坐标系中，$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}F_{ix}=\Sigma X=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}F_{iy}=\Sigma Y=0\end{cases}$

2.平面任意力系

（1）力对点$o$的矩，用$m_0(\boldsymbol{F})=\pm Fd$表示。$o$点为矩心，$d$为力臂。

（2）力偶——由大小相等、方向相反、作用线互相平行、又不重合的两个力所组成的力系。

力偶矩用$m(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F}')=m=\pm F\cdot d$表示，$d$为两平行力间的距离，称作力偶臂。力偶所在平面称作力偶作用面。

（3）平面任意力系向刚体内任一点$o$简化，可得一个力和一个力偶，这个力等于该力系的主矢$\boldsymbol{R}'$

$$\boldsymbol{R}'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$$

这个力偶的矩等于该力系对$o$点的主矩$M_0$，$o$点叫做简化中心，即

$$M_0=\sum_{i=1}^{n}m_0(\boldsymbol{F}_i)$$

如果$\boldsymbol{R}'=0$，$M_0\neq0$，则力系简化为一力偶；如果$\boldsymbol{R}'\neq0$，$M_0=0$，则力系简化为一作用线通过$o$点的力；如果$\boldsymbol{R}'=0$，$M_0=0$，则该力系处于平衡状态。

（4）平面任意力系处于平衡状态的必要与充分条件：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \Sigma X = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \Sigma Y = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F}_i) = 0 \end{cases}$$

若独立的平衡方程数目与未知量数目相等，则属于静定问题，否则属于静不定问题。

若力的作用线都与$y$轴平行，则$\Sigma Y=0$和$\sum_{i=1}^{n} m_0(\boldsymbol{F})=0$，这是平面平行力系的平衡条件。

3．摩擦

（1）摩擦分类：按物体接触部分相互运动分为：滑动摩擦与滚动摩擦；按物体有无相对运动分为：动摩擦与静摩擦；按物体接触面物理性质分为：干摩擦、半干半湿摩擦及湿摩擦等。

（2）滑动摩擦和静摩擦：当物体沿另一物体的表面有相对滑动或有相对滑动趋势时，将出现阻碍滑动的现象，叫滑动摩擦。阻碍滑动的作用，叫滑动摩擦力。其规律为：$f=\mu_k N$，$\mu_k$为滑动摩擦系数，$N$为正压力。

当两物体的接触面只有相对滑动趋势而还保持相对静止时，将产生静摩擦力。静摩擦力的特点是：其大小不定，它的最大值为$f_{max}$，即

$$0<f<f_{max} \qquad f_{max}=\mu_s N$$

$\mu_s$为静摩擦系数，$N$为正压力。

静摩擦力$\boldsymbol{f}$与法向反力$\boldsymbol{N}$的合力$\boldsymbol{R}_A$叫全约束反力，它与法线的夹角的最大值$\varphi$叫摩擦角。摩擦角的正切等于静摩擦系数，即

$$\mu_s=\mathrm{tg}\varphi$$

（3）滚动摩擦：当物体在另一物体上滚动，或有滚动的趋势时，将出现阻碍滚动的现象叫滚动摩擦。阻碍滚动的力偶叫滚

动摩擦力偶。滚动摩擦力偶最大值$M_{max}=\delta N$，$\delta$为法向反力向滚动方向偏移的最大值，用长度表示，它既与法向反力$N$的大小有关，也随辊子半径$R$的尺寸不同而改变。

4.空间力系

（1）空间汇交力系的合力$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i$的作用线通过力的汇交点。

（2）空间力偶系的合力偶$\boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i$。空间力偶系的平衡条件是合力偶矩等于零，即$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_i=0$。

（3）空间任意力系的平衡方程式：

$$\Sigma X=0 \quad (1)$$
$$\Sigma Y=0 \quad (2)$$
$$\Sigma Z=0 \quad (3)$$
$$\Sigma m_x(\boldsymbol{F})=0 \quad (4)$$
$$\Sigma m_y(\boldsymbol{F})=0 \quad (5)$$
$$\Sigma m_z(\boldsymbol{F})=0 \quad (6)$$

对空间平行力系，只用（3）、（4）、（5）式。
对空间汇交力系，只用（1）、（2）、（3）式。

5.重心

（1）平行力系中心的坐标公式：

$$x_c=\frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i},\quad y_c=\frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i},\quad Z_c=\frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i}$$

（2）物体重心的坐标公式：

$$x_c=\frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i},\quad y_c=\frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i},\quad Z_c=\frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i}$$

（3）均质物体重心的坐标公式：

$$
\begin{cases}
x_c = \dfrac{\int x dV}{\int dV} \\
y_c = \dfrac{\int y dV}{\int dV} \\
z_c = \dfrac{\int z dV}{\int dV}
\end{cases}
$$

均质薄板重心的坐标公式：

$$
\begin{cases}
x_c = \dfrac{\int x dS}{\int dS} \\
y_c = \dfrac{\int y dS}{\int dS} \\
z_c = \dfrac{\int z dS}{\int dS}
\end{cases}
$$

## 二、平 面 汇 交 力 系

解平面汇交力系平衡问题有几何法和解析法两种方法。通常碰到的是三个力的平衡问题，以用几何法中的力三角形法求解较方便；用解析法解题时，采用平衡方程式更为方便。两种解题方法的步骤基本相同。但用解析法时可根据约束的性质先假定未知力的方向，在汇交点上取恰当的坐标系并将各力投影到坐标轴上，列出各轴的平衡方程，解出未知力，然后根据结果判断未知力的方向，并与假定的方向比较，看是否相同。

几何法解题基本步骤：

第一步，弄清已知条件，明确所求问题。

第二步，选好研究对象（即平衡对象）。

第三步，对研究对象进行受力分析，若某约束力不能直接定出，则用三力平衡条件，定出此约束反力的作用线。

第四步，按恰当的比例作力系封闭多边形或力三角形，定出未知力。

第五步，用三角公式进行计算，讨论计算的结果。

解析法解题基本步骤：

第一步，弄清已知条件，明确所求问题。

第二步，选好恰当的研究对象，画出脱离体图。

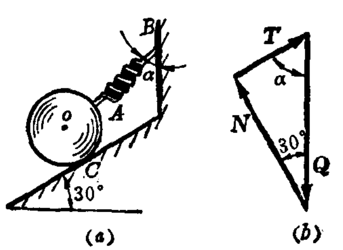
第三步，对研究对象进行受力分析，画出示力图。

第四步，在汇交点上选好坐标系，将各力投影到坐标轴上，建立 $x$、$y$ 轴的平衡方程式。

第五步，解方程，将计算的结果进行分析讨论，确定未知力的方向。

**题 1** 题1图($a$)所示，均质球重20公斤，放在光滑的斜面上，用一绳子维持其平衡。绳子系在固定于$B$点的弹簧秤上，弹簧秤的读数为10公斤。如斜面的倾角为30°，弹簧秤的重量略去不计，求绳子与铅垂线的交角$\alpha$和斜面的反力$N$。

**解** 第一步，按题意本题是平面汇交力系，由图($a$)所示，已知球重$Q=20$公斤，绳子张力就是弹簧秤的读数$T=10$公斤，斜面倾角为30°，求$\alpha$和$N$。




题1图

第二步，选均质球作为研究的对象。

第三步，球受有三个力，即重力$Q$、张力$T$和约束反力$N$，其中$T$的方向是未知的。

第四步，此三力汇交于一点$O$（即球心上），将三力作成封

闭的力三角形如图( $b$ )所示。

第五步，根据三角函数的正弦定理，建立方程：

$$\frac{N}{\sin\alpha}=\frac{T}{\sin 30^{\circ}}=\frac{Q}{\sin[\pi-(\alpha+30^{\circ})]}$$

由此式可得：

$$T\sin(\alpha+30^{\circ})=Q\sin 30^{\circ}$$

由题已知 $Q=20$ 公斤，$T=10$ 公斤，代入上式可得

$$\sin(\alpha+30^{\circ})=1$$

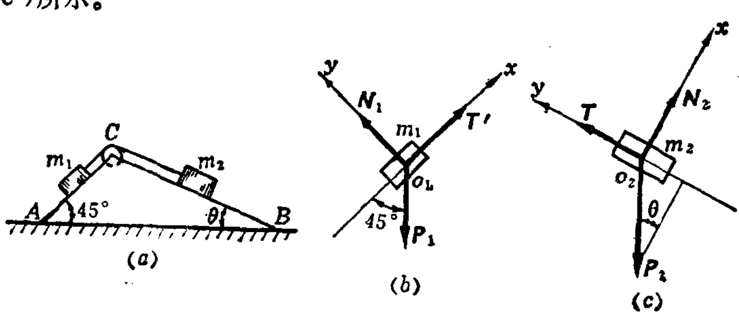
或
$$\alpha+30^{\circ}=\frac{\pi}{2},\quad \alpha=60^{\circ}$$

又约束反力 $N=T\dfrac{\sin\alpha}{\sin 30^{\circ}}=\sqrt{3}\,T=\sqrt{3}\times 10=17.3$ 公斤。

**题 2** 题 2 图( $a$ )所示，在三棱柱 $ABC$ 的斜面 $AC$ 和 $BC$ 上，各放一重物 $m_1$ 和 $m_2$，并以跨过滑轮的细绳相连，$m_1$ 和 $m_2$ 处于平衡状态。已知：$m_1$ 的重 $P_1=50$ 公斤，$m_2$ 重 $P_2=75$ 公斤；$AC$ 斜面的倾角为 $45^{\circ}$。求另一斜面 $BC$ 的倾角 $\theta$。

**解** 第一步，根据题 2 图( $b$ )和图( $c$ )所示，力分别汇交于 $o_1$ 和 $o_2$ 点上。由此可知，此题属于平面汇交力系问题。题中已知 $P_1=50$ 公斤，$P_2=75$ 公斤，$AC$ 斜面的倾角为 $45^{\circ}$，要求角 $\theta$。

第二步，由上述分析，可分别选 $m_1$ 和 $m_2$ 为研究对象，重物 $m_1$ 的脱离体图如题2图( $b$ )所示，重物 $m_2$ 的脱离体图如题 2 图( $c$ )所示。




题 2 图

第三步，$m_1$受有重力$\boldsymbol{P}_1$、约束反力$N_1$和张力$\boldsymbol{T}'$，此三力汇交于$O_1$，示力图如题2图（$b$）。$m_2$受有重力$\boldsymbol{P}_2$、约束反力$N_2$和张力$\boldsymbol{T}$，此三力汇交于$O_2$，示力图如题2图（$c$）。

第四步，分别建立$m_1$和$m_2$的平面坐标系$O_1xy$和$O_2xy$，将各力分别投影到各坐标轴上，可得平衡方程式：

对$m_1$：$\Sigma X=0$，$T'-P_1\cos 45°=0$　　（1）

对$m_2$：$\Sigma Y=0$，$T-P_2\sin\theta=0$　　（2）

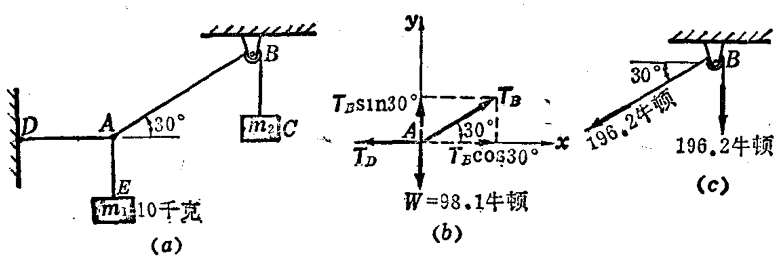
因为绳子是不伸缩的，所以　$T=T'$　　（3）

第五步，联立求解（1）、（2）及（3）式可得

$$\sin\theta=\frac{P_1\cos 45°}{P_2}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0.4714$$

故　$$\theta=28°8'$$

**题3**　题3图（$a$）所示，质量$m_1=10$千克，$AD$绳为水平，绳$ABC$绕过无摩擦的滑轮$B$，并与水平成30°。$C$端挂重物$m_2$使该系统达平衡状态。求绳子$AD$的张力$T_D$和$m_2$的质量为多少？




题3图

**解**　此题属平面汇交力系问题。已知绳$AB$段与水平方向夹角为30°，$m_1=10$千克，求$T_D$和$m_2$。选$A$为研究对象，画出$A$的脱离体如题3图（$b$）所示，在$A$点上作用三个力：$\boldsymbol{T}_D$、$\boldsymbol{T}_B$和$W$（$W=10\times9.8=98$牛顿），此三力汇交于$A$点。选平面坐标系$Axy$[见题3图（$b$）]，此系统达到平衡时，可建立方程式

$$\Sigma X=0,\ T_B\cos 30°-T_D=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y=0,\ T_B\sin 30°-98.1=0 \qquad (2)$$

联立（1）、（2）式，求解得

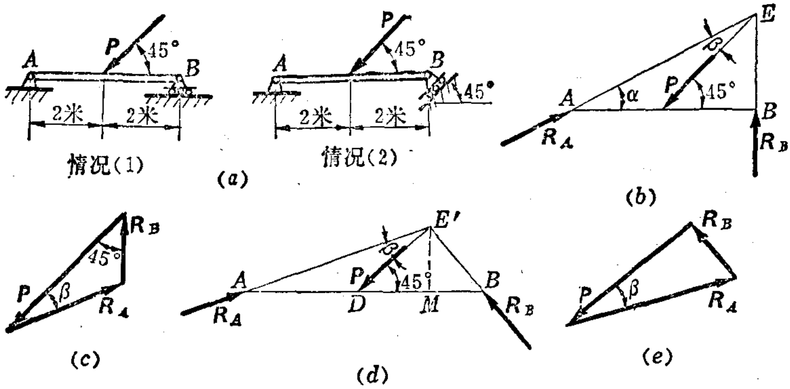
$$T_B=196.2\text{牛顿}$$

$$T_D=169.9\text{牛顿}$$

**讨论**：因绳$ABC$绕过$B$，绳在系统平衡时不伸缩，处处张力相等，如题3图（$c$）所示，故物块的质量

$$m_2=196\text{牛顿}/9.8\text{米}/\text{秒}^2=20\text{千克}$$

**题4** 梁$AB$的支座如题4图（$a$）所示。在梁的中点作用一力$P=2$吨，力的方向与梁的轴线成45°角。如梁的重量略去不计，试分别求在（1）、（2）两种情况下的支座反力。




题4图

**解** 对情况（1）取$AB$为研究对象，它受力：$\boldsymbol{R}_A$、$\boldsymbol{R}_B$和$\boldsymbol{P}$，三力汇交于$E$点如题4图（$b$）所示。按平衡条件作力三角形如题4图（$c$）所示，按正弦定理得

$$\frac{R_A}{\sin 45°}=\frac{R_B}{\sin\beta}=\frac{P}{\sin[\pi-(\beta+45°)]} \qquad (1)$$

按题给尺寸在$\triangle ABE$中有

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad (2)$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\beta=\sin(45^\circ-\alpha)$$

$$=\sin45^\circ\cos\alpha-\cos45^\circ\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos\beta=\cos45^\circ\cos\alpha+\sin45^\circ\sin\alpha$$

$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

将这些数值代入（1）式得

$$R_A=P\frac{\sin45^\circ}{\sin(45^\circ+\beta)}=\frac{P}{\cos\beta+\sin\beta}=\frac{\sqrt{10}}{4}P=1.58\text{吨}$$

$$R_B=R_A\frac{\sin\beta}{\sin45^\circ}=1.58\times\frac{\frac{3}{10}\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0.7\text{吨}$$

对情况（2）取$AB$为研究对象，它受力有：$P$、$R_A$和$R_B$。由于$R_B$是垂直于斜面的，这样$R_A$的作用线必通过$P$和$R_B$的交点$E'$，如图（$d$）所示，故可汇交一点。在$\triangle AE'M$中，

$$AE'=\sqrt{AM^2+ME'^2}$$

$AE'=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 米，$AD=2$ 米。在$\triangle ADE'$中，$\sin(\pi-45^\circ)=\sin45^\circ$，按正弦定理有

$$\frac{AE'}{\sin(\pi-45^\circ)}=\frac{AD}{\sin\beta}$$

按题给尺寸得

$$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

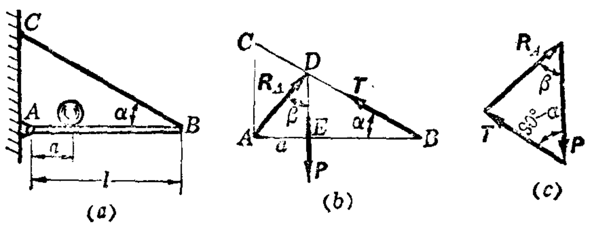
作力三角形如题4图（$e$）所示，可得 $R_B=P\text{tg}\beta=\frac{P}{2}=1$ 吨

$$R_A=\frac{P}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{5}}{2}P=2.24\text{吨}$$

**题 5** 如题5图（$a$）所示，$AB$杆的$A$端用铰链固定，$B$

端用绳吊起，使杆成水平位置。在杆上放置一重量为P的重物，并已知：杆长为$l$，重物距$A$点的距离为$a$；绳子与水平面交角为$\alpha$。如不计杆和绳的重量，求绳的张力$T$。

**解** 选$AB$杆为研究对象，$AB$杆受重力$\boldsymbol{P}$、张力$\boldsymbol{T}$、铰链约束反力$\boldsymbol{R}_A$等构成平面汇交力系，三力汇交于$D$点如图（$b$）所示，由平衡条件可作出三力的力三角形如题5图（$c$）所示，按正弦定理有如下关系。




题5图

$$\frac{T}{\sin\beta}=\frac{P}{\sin[90°+(\alpha-\beta)]}$$

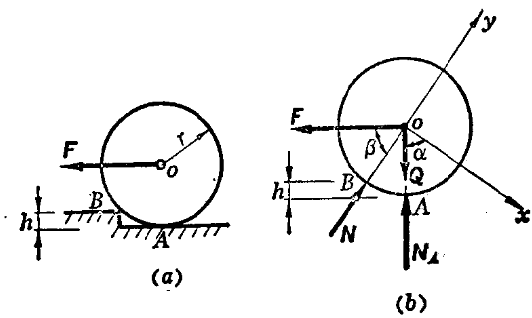
$$T=\frac{P\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{P\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$T=\frac{P}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta}}=\frac{P}{\cos\alpha\operatorname{ctg}\beta+\sin\alpha}$$

在$\triangle ADE$中$\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{(l-a)\operatorname{tg}\alpha}{a}$

故绳的张力$T=\dfrac{Pa}{l\sin\alpha}$

**题 6** 题6图所示，压路机的碾子重2吨，半径为$r=40$厘米，如用一通过其中心的水平力$\boldsymbol{F}$将此碾子拉过高$h=8$厘米的石块，求此水平力的大小。如果要使作用的力为最小，问应沿哪个方向拉？并求此最小力的大小。




题 6 图

**解** 选碾子作为研究的对象，当我们用力$F$拉动碾子时，必然$N_A=0$，此刻碾子受重力$Q$、$F$及$N$作用，它们构成平面汇交力系。在碾子脱离体图上可知此三力汇交于$O$点，如题6图（b）所示。建立平面坐标系$oxy$，按平衡条件列方程有

$$\Sigma X=0, \quad Q\cos\alpha-F\sin\alpha=0$$

$$F=Q\operatorname{ctg}\alpha$$

由图（b）和已知尺寸可得出：$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，故水平力$F=\frac{3}{4}Q=1.5$吨。

为求拉力的最小值，设力$F$与$OB$夹角为$\beta$，如题6图（b）所示。按平衡条件列方程：

$$\Sigma X=0, \quad Q\cos\alpha-F\sin\beta=0$$

或
$$F=\frac{Q\cos\alpha}{\sin\beta}$$

从$F=\frac{Q\cos\alpha}{\sin\beta}$式中得知，当$\sin\beta=1$，即$\beta=90°$时，$F$为最小。这时可得$F$的值，即为

$$F=Q\cos\alpha=2\times\frac{3}{5}=1.2\text{吨}$$

$F$的方向与$OB$垂直。