应用概率统计方法

朱燕堂　杨敬娟　赵选民 编

西北工业大学出版社

内 容 提 要

本书共分十章，前五章主要介绍了随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、极限定理、参数估计、假设检验等概率统计的基本知识，后五章着重介绍了正交试验设计、方差分析、回归分析、正交多项式回归及其在正交设计中的应用、非线性回归的样条函数拟合法等常用的数据处理方法。本书各章均配有适量的习题，并附有习题答案。

本书可作为高等工业院校各专业概率统计课的教材，亦可作为电大、函授、夜大、专科各专业的教学参考书，还可供有关工程技术人员参考使用。

应用概率统计方法

朱燕堂　杨敬娟　赵选民　编

责任编辑　　柴文强

*

西北工业大学出版社出版

陕西省新华书店发行

西北工业大学印刷厂印装

*

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 15.5 字数 376 千字

1986 年 4 月第一版 1986 年 4 月第一次印刷 印数 0001—5500 册

统一书号 13433·024 定价：2.95 元

目　　录

第一章　随机事件及其概率

§1　随机事件的概念

一、随机现象和随机事件

1. 必然现象和随机现象。在自然界和人类社会中，人们观察到的现象大体可分为两种类型，一类是在相同条件下，多次观察，总是有相同的结果。我们把这类现象称为确定性现象或必然现象。例如在一个大气压下，水加热到100℃，不管谁来做试验，每次试验结果都是相同的，“水沸腾了”。在没有外力作用的条件下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动等。早期的科学就是研究这一类现象的数量规律性，所应用的数学工具是诸如数学分析，几何，代数，微分方程等。但随着科学技术和生产的发展，人们逐渐发现还广泛存在着与必然现象有着本质区别的另一类现象，例如：用同一仪器多次测量一物体的重量，所得到的结果总是略有差异；在相同条件下，多次抛掷一枚匀称的硬币，其结果可能是正面（有国徽的一面为正面）朝上，也可能是正面朝下；远距离射击较小的目标，可能击中，也可能击不中；自动车床加工出来的零件可能是合格品，也可能不是合格品等等。类似的例子还可举出很多。

所举这类现象的共同特点是在相同条件下，经多次试验或观察会得到一系列不同的结果，而且每次试验之前不知道会出现哪种结果，这类现象称为随机现象。

人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象虽然就每次试验或观察结果来说，它具有不确定性，但在大量重复试验或观察下它的结果却呈现出某种规律性。例如，多次重复抛掷一枚匀称硬币得到正面朝上大致有半数，多次远距离射击同一小目标的弹着点按照一定规律分布等等。这种在大量重复试验中所呈现出的规律性称为统计规律性。

这样，随机现象可更确切地解释为：在个别试验中可能出现这种结果或那种结果，即呈现出不确定性，但在大量重复试验中，又具有统计规律性的现象。

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的数学分支。

2. 随机试验。前面所说的对随机现象进行观察总是在一定条件下进行的。若把一次观察视为一次试验，观察的结果就是试验结果。在概率论中把满足下列三个条件的试验称为随机试验：Ⅰ）允许在相同的条件下重复地进行，Ⅱ）每次试验结果不一定相同，Ⅲ）试验之前不知道会出现哪种结果。今后我们所指的试验都是随机试验，它是个广泛的名词，包括各种各样的科学实验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验。例如：1)掷一枚匀称的硬币，观察出现正面或反面的情况；2)掷一颗骰子，观察出现的点数；3)记录某电话总机在一天内所接到的呼唤次数；4)在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命等等都是随机试验的例子。

3. 随机事件、基本空间

定义 1：在随机试验中，可能出现、也可能不出现的事情叫做随机事件。例如：

1） 在掷硬币的试验中，“正面朝上”这一事情，便是随机事件。

2） 在掷一颗骰子的试验中，“出现偶数点”，“出现一点”，“出现两点”等都是随机事件。

3） 在一分钟内，一个电话总机“至少接到 10 次呼唤”是随机事件。

4） 测得“灯泡寿命为 1000 小时”是随机事件。

由上可知，随机事件可以是随机试验的某一个结果（如“正面朝上”，“出现一点”等）也可以是若干个试验结果组合而成的事件（如“出现偶数点”便是由“出现两点”，“出现四点”，“出现六点”组成的）。

在随机试验中，每一个可能出现的结果都是随机事件，它是这个试验的最简单的随机事件，称为基本事件。其它的一些随机事件可由若干个基本事件组成。

例如，掷硬币试验中，“出现正面”，“出现反面”是这个试验的基本事件。掷骰子的试验中，“出现一点”，“出现两点”，……，“出现六点”就是这个试验的基本事件。而“出现偶数点”也是随机事件，它是由“出现两点”，“出现四点”，“出现六点”三个基本事件组成的。

在随机试验中必然会出现的事情叫做必然事件，必然不出现的事情叫做不可能事件。例如，在掷骰子试验中，“点数不大于 6”是必然事件，“点数大于 6”是不可能事件。必然事件和不可能事件是随机事件的两个特例，本来这两类事件没有不确定性，也就是说它们不是随机事件，但为了今后讨论方便起见，把它们当作一种特殊的随机事件。

今后，把随机事件常简称为事件，并用大写字母 A，B，C……等表示随机事件。用 U 表示必然事件，用 V 表示不可能事件。

定义 2：为了研究随机试验，我们把所有可能的试验结果（或所有基本事件）的全体所构成的集合叫做基本空间（或样本空间），记为 U，而把每一个可能出现的结果（或每一个基本事件）称为一个样本点。

一般地说，基本空间 U 可以由有限个基本事件（样本点）所组成，也可以由无限个基本事件（样本点）所组成，甚至是某范围内的全体实数所组成。如：

在例1)中　$U=\{$出现正面，出现反面$\}$；

在例2)中　$U=\{1,2,3,4,5,6\}$；

在例3)中　$U=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$；

在例4)中　$U=\{t \mid t\geqslant 0\}$。

由于随机事件是基本事件或由若干个基本事件所组成，因而它是基本空间的子集，事件 A 出现，就是当且仅当 A 所包含的某一样本点出现。特别地，必然事件就是基本空间 U；不可能事件就是空集 V。

二、事件间的关系及其运算

在实际问题中，往往不只研究随机试验的一个事件，而要研究很多事件，而这些事件之间又有一定的联系。例如，在检查某些圆柱形产品时要求它的长度及直径都符合规格才算合格。这时要考虑“产品合格”，“产品不合格”，“直径合格”，“直径不合格”，“长度合格”，“长度不合格”，“长度合格但直径不合格”等等事件，显然这些事件之间是有一

定联系的。为了表述类似于上述事件之间的联系，下面引进事件之间的几种主要关系以及事件的运算。

1． 事件的包含和相等。设有事件A及B，如果事件A出现必然导致事件B出现，则称事件B包含事件A，或称A是B的子事件。记作

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

例如，令A表示“直径不合格”，B表示“产品不合格”，显然，若“直径不合格”这一事件A出现，则“产品不合格”这一事件B就必然出现，故$A \subset B$。对任一事件A，规定$V \subset A$，显然对任一事件A，必有$V \subset A \subset U$。

如果事件A包含事件B，同时事件B也包含事件A，即$B \subset A$和$A \subset B$同时成立，则称事件A与事件B相等，记作$A = B$。

2． 事件的和与积。设A，B是两个事件，“事件A与B至少有一个出现”这一事件称为事件A与事件B的和事件，记作$A \cup B$。这就是说，$A \cup B$出现，它意味着A，B中至少有一个出现，也就是表示事件A出现或事件B出现或它们两者都出现。因此$A \cup B$也可记为“A或B”。例如，若用A表示“直径不合格”，B表示“长度不合格”，则$A \cup B$表示“产品不合格”，即“产品不合格”是“直径不合格”与“长度不合格”两事件的和事件。

一般地，“事件A_1，A_2，……，A_n，……中至少有一个出现”这一事件，称为事件A_1，A_2，……，A_n，……的和事件，记作$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$。

“事件A与事件B同时出现”这一事件称为事件A与事件B的积事件，记作$A \cap B$（或记作AB）。例如，用A表示“直径合格”，B表示“长度合格”，则$A \cap B$表示“产品合格”，即“产品合格”是“直径合格”与“长度合格”两事件的积事件。

类似地，“事件A_1，A_2，……，A_n，……同时出现”这一事件称为事件A_1，A_2，……，A_n，……的积事件（或称为交），记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$。

3． 事件的互斥与互逆。如果事件A与事件B不能同时出现，即A，B的积事件为不可能事件，则称A，B为互斥事件（或称为互不相容事件）。记为$AB = V$。

对于互斥事件A，B，可以把和事件$A \cup B$记作$A + B$。例如在一批包含有正品，次品的产品中，任意抽取三个，“三个都是次品”这一事件记为A，“三个都是正品”这一事件记为B，显然A与B是互不相容事件。

如果两事件A，B同时满足关系式：$A \cup B = U$，$AB = V$（即A，B中必出现其一，但A与B不能同时出现），则称A，B两事件互逆或对立。并称A是B的逆事件（或对立事件），或称B是A的逆事件（或对立事件）。把事件A的逆事件记作$\bar{A}$。例如，掷一枚硬币时，“出现正面”与“出现反面”是互逆事件，检查圆柱形产品时，“直径合格”与“直径不合格”是互逆事件等等。

对任一事件A，显然有$\bar{\bar{A}} = A$，即A也是$\bar{A}$的对立事件。我们看到：在一次试验中，A与$\bar{A}$不会同时出现（即它们互斥），而且A，$\bar{A}$至少有一个出现，就是说A和$\bar{A}$满足：

$$A\bar{A} = V，\quad A + \bar{A} = U。$$

4． 事件的差。“事件A出现而事件B不出现”这一事件称为事件A与事件B的差，记作$A - B$。例如：“直径合格”记为A，“长度合格”记为B，“直径合格但长度不合格”记为C，于是有$C = A - B$。又如，在一批包含有正品，次品的产品中，任取三个，“至少有一个次品”记为A_1，“至少有两个次品”记为A_2，“恰有一个次品”记为A_3。于是$A_3 =$

$=A_1-A_2$。

显然有$A-B=A\bar{B}$，$\bar{A}=U-A$。

下面把事件间的关系及其运算用图形表示出来，更为直观些，这种图称为文(Venn)图。

事件U，A，$\bar{A}$，$A\cup B$，AB，$A-B$在图1-1中分别以阴影部分表示，不难理解，$B\supset A$相应于A的图形完全包含在B的图形中；A和B互不相容，则相应于A和B的图形不相交。

上述图形也可以用打靶的例子来说明，事件A代表命中小圆内，事件B代表命中大圆内，则$A\cup B$代表命中图1-1中$A\cup B$的阴影部分，其他也可类似说明。

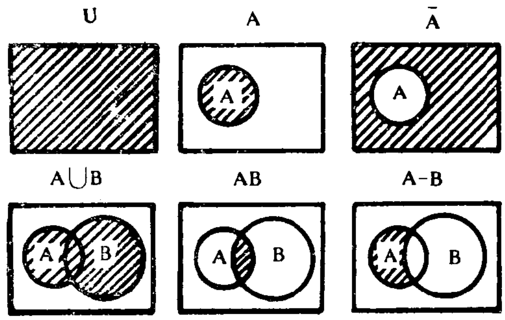

图 1-1

熟悉集合论的读者或许早就发现，事件间的关系及运算与集合论中集合间的关系与运算是完全相似的。若把概率论中的基本事件看作集合论中的元素，由若干个基本事件组成的事件，便可看作包含若干元素的集合。而把由基本事件的全体构成的基本空间看作集合论中的全集或空间。为了便于对照，把它们的术语列表如下：

符　号	概　率　论	集　合　论
U	基本空间，必然事件	空间，全集
V	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A的对立事件	集合A的余集
$A\subset B$	A是B的子事件	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等
$A\cup B$	事件A与B至少有一个出现	A与B的并集
AB	事件A与B同时出现	A与B的交集
$A-B$	事件A出现而B不出现	A与B的差集
$AB=V$	事件A与事件B互不相容	A与B没有相同元素

对于事件来说，也有类似于集合的一些运算规律：

1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(AB)C=A(BC)$；

3）分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC$，

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$，$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

这样，我们可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算关系来分析事件间的关系。不过还要注意学会用概率论的语言来解释这些关系及运算，并且会用这些运算

关系来表示一些事件。下面举例说明之。

【例 1】 设A，B，C为三个事件，则

1） A出现而B与C都不出现可表示为：$A\bar{B}\bar{C}$（或$A-B-C$，或$A-(B\cup C)$）；

2） A与B都出现而C不出现可以表示为：$AB\bar{C}$（或$AB-C$，或$AB-ABC$）；

3） 所有这三个事件都出现可以表示为：ABC；

4） 这三个事件恰好出现一个可以表示为：$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}$；

5） 这三个事件恰好出现两个可以表示为：$AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$；

6） 这三个事件至少出现一个可以表示为：$A\cup B\cup C$；或$A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+ABC$；或$U-\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

7） 这三个事件中不多于一个事件出现可表示为：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$；或$\overline{AB\cup BC\cup AC}$。

【例 2】 在两次射击靶子的试验中，令A表示第一次射击而击中目标，B表示第二次射击而击中目标，则

1） $C=A\cup B$表示射中目标的事件，不管它是第一次射中或第二次射中或两次都射中目标。

2） $C=AB$ 表示两次射击都射中目标的事件。

3） $C=\bar{A}\bar{B}$ 表示两次射击都未射中目标的事件。

§2　随机事件的概率

随机事件虽然有其不确定性的一面，即在一次试验中，可能出现，也可能不出现，但在大量重复试验中，人们发现它是有内在规律性的，即它出现的可能性大小有所不同，而且是可以度量的。例如，在一次试验中，掷一枚匀称的硬币出现“正面朝上”比掷二枚匀称的硬币出现“两个都是正面朝上”的可能性大；在多次重复试验中，“射击 10 次而命中靶子”比“射击 2 次而命中靶子”的可能性大。这说明随机事件出现的可能性大小是客观存在的。其次，许多实际问题也希望了解某些事件出现的可能性有多大。例如，要在某河流上建筑一座防洪水坝，为了确定水坝的高度，就要知道该河流在造水坝地段每年最大洪水达到某高度的可能性的大小。最大洪水达到某一高度是随机事件。这样，很自然地，人们想用一个数p来衡量事件出现的可能性的大小，且当事件A出现的可能性较大，就用较大的数表示，出现的可能性较小，就用较小的数来表示。这个数p我们称为事件A出现的概率，通常记为$P(A)=p$。因此，随机事件A的概率就是用来描述随机事件出现的可能性大小的一个概念，它是概率论中最基本的概念之一。

对于已给事件A，怎样来确定$P(A)$的值呢？我们先从随机事件的频率出发，引进一般情形下确定$P(A)$的值的方法，即概率的统计定义，然后提出在一些简单的随机试验情况下确定$P(A)$的值的方法，即概率的古典定义及几何定义。最后以公理的形式引入概率的一般定义，并由此推出概率的一些常用性质。

一、概率的统计定义

我们先以掷一枚匀称硬币这个随机试验为例来说明确定“出现正面”这一事件的概率的

方法，将硬币抛掷 n 次，观察在 n 次试验中"出现正面"的次数m，m/n 称为出现正面的频率。

历史上有些人作过成千上万次抛掷硬币的试验，下表列出他们的试验记录：

表 1-1

实验者	投掷次数 n	出现"正面朝上"的次数m（即频数）	频率$=\frac{m}{n}$
德莫根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1-1 看出，不管什么人去投掷，当实验次数逐渐增多时，"正面朝上"的频率越来越明显地稳定并接近于 1/2。这个数能反映出"出现正面"的可能性的大小。所以，我们将用表 1-1 中最后一列中的频率作为投掷硬币"出现正面"的概率的近似值，并认为$P(A)$近似等于 1/2。

再来分析一个例子，在一个口袋中装有 6 只球（4 只白球，2 只红球），从袋中任取一球，问取到白球的可能性有多大。设A表示取出的球为白球这一事件。现在作许多次试验，观察取到白球的次数，并算出它出现的频率。有人做 600 次试验（从袋中任取一球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再任取一球观察其颜色，这样继续下去），得数据如表 1-2 所示。

表 1-2

试验次数 n	100	200	300	400	500	600
频数m	69	139	198	261	337	401
频率 m/n	0.690	0.695	0.660	0.653	0.674	0.668

从表 1-2 中可以看出，频率在 $0.66\cdots=2/3$ 附近摆动，如再继续下去，将逐渐稳定于 2/3。这个数能反映事件A出现的可能性的大小。这一事实不因人而异，这就是说在相同条件下，不论谁，只要做大量的重复试验（尽管具体数字有出入），其频率总是稳定于这个常数。

经验证明，任何随机事件A，只要试验是在相同条件下多次重复进行的，那么事件A出现的频率就具有稳定性，就是说，当试验次数充分大时，事件A出现的频率总在$[0,1]$区间上的某个确定的数字p附近摆动。因为频率总是介于 0 与 1 之间的一个数，这个常数p是客观存在的，这也是我们下面定义事件概率的客观基础。

定义　在一个随机试验中，如果事件A出现的频率m/n随着试验次数n的增大，它在区间$[0,1]$上的某个常数p附近摆动，那末定义事件A的概率为

$$P(A)=p$$

概率的这种定义，称为概率的统计定义。

由概率的统计定义可以推得概率的下列性质：

1)　对任一事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

这是因为频率 m/n 总是在区间$[0,1]$上，所以相应的 $p=P(A)$也总在区间$[0,1]$上。

2） $P(U)=1$，$P(V)=0$

这是因为对于必然事件U，不可能事件V，频率依次固定为1，0，所以相应的$p=P(A)$也依次为1，0。

3） 对于两两互斥的有限多个随机事件A_1，A_2，……，A_n，有

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

这是由于A_1，A_2，……，A_n两两互斥，所以A，A_1，A_2，……，A_n的频率$r/n,r_1/n,r_2/n$，……，r_n/n满足等式（其中$A=A_1+A_2+\cdots+A_n$）

$$\frac{r}{n}=\frac{r_1}{n}+\frac{r_2}{n}+\cdots+\frac{r_n}{n}$$

相应的概率应该满足

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

概率的统计定义虽然直观，但据此计算某事件的概率是困难的，仅能以A的频率作为$P(A)$的近似值，而且当试验次数n越大时越能准确地定出近似值。然而n要多大，准确到什么程度，都没有确切的说明，但在实际问题中有许多随机现象满足一些条件，使得能直接计算概率，这就是下面要引进的概率的古典定义。

二、概率的古典定义

若随机现象有下列一些特征：

1） 试验结果的个数是有限的，就是说，该试验的所有可能结果仅有有限个，即仅有有限个基本事件。

2） 每个试验结果出现的可能性相同。

3） 在任一次试验中，只能出现一个结果，也就是有限个基本事件是两两互斥的。

这类现象在概率论发展初期曾是主要的研究对象，一般把这类现象的数学模型称为古典概型。例如，掷骰子试验，掷硬币试验，袋中摸球，产品质量检查等实际问题都属于古典概型。

对于古典型的情形，设试验的所有可能结果为n个，即有n个基本事件，而事件A包含有其中的m个试验结果，即A中有m个基本事件，于是定义事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}} \tag{1-1}$$

概率的这种定义，称为概率的古典定义。由等可能性的假定，便容易理解上述定义确实客观地反映了随机事件出现的可能性的大小。

【例 1】 掷一颗骰子，求得奇数点的概率。

【解】 显然，$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，即基本事件的总数$n=6$，而$A=\{1,3,5\}$，即事件A——得奇数点所包含的基本事件数$m=3$，于是由定义，所求概率为

$$P(A)=\frac{3}{6}=0.5$$

【例 2】 设箱中装有100件产品，其中有3件次品，为检查产品质量从中任意抽取5件，求所取5件产品中恰有1件次品的概率。

【解】 从100件产品中任意抽取5件产品，共有C_{100}^5种抽取方法，即基本事件总数$n=C_{100}^5$，设A表示“取到的5件产品中恰有1件次品”这一事件，则A中所包含的基本

事件数可以这样计算：1件次品从3件次品中取得，共有C_3^1种取法，又4件正品从97件正品中取得，共有C_{97}^4种取法。因而事件A所包含的基本事件数$m=C_3^1\times C_{97}^4$。这样，所求的概率为

$$P(A)=\frac{C_3^1\times C_{97}^4}{C_{100}^5}\approx 0.138$$

【例 3】 续例2，求抽取的5件产品中至多有一件次品的概率。

【解】 设A表示"所取5件产品中至多有一件次品"的事件，则A中所包含的基本事件数为：$m=C_{97}^5+C_3^1\times C_{97}^4$，因此，所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{97}^5+C_3^1\times C_{97}^4}{C_{100}^5}\approx 0.994$$

【例 4】 设有0，1，2，……，9十个数字，在这十个数字中顺次有放回地抽取5次（即抽了第1个数字后放回去，再抽第2个数字），求抽到的5个数字全不相同的概率。

【解】 设A表示"抽到的5个数字全不相同"的事件，第一次抽取方式有10种；因有放回，所以第2次抽取方式也有10种；这样，直至第5次抽取方式仍有10种，所以连续5次有放回的抽样方式共有

$10\times10\times10\times10\times10=10^5$种，即基本事件总数$n=10^5$，而抽到5个数字都不相同的抽取方式有$A_{10}^5$种，即$A$中所包含的基本事件数$m=A_{10}^5$，这样，所求的概率为

$$P(A)=\frac{A_{10}^5}{10^5}\approx 0.3024$$

【例 5】 有n个可辨的球，随机地放入$N(N\geqslant n)$个盒子中的每一个盒，试求：

1） 指定的n个盒中各有一球的概率；

2） 任何n个盒中各有一球的概率；

3） 某指定的一个盒中恰有$m(m\leqslant n)$个球的概率。

【解】 设球以同样的可能性落入N个盒中的每一个，N个盒中落一个球一共有N种方法，n个球可以有$N\times N\times\cdots\times N=N^n$种方法，这就是基本事件总数

1） 以A表示"指定的n个盒中各有一球"的事件，今固定某n个盒，第一个球可以落入这n个盒中任何一个，有n种方法，第二个球可落在余下的$n-1$个盒中的任何一个，有$n-1$种方法，……，第n个球落在最后一个盒，只能有一种方法，因此事件A共含有$n!$个不同的基本事件数，故所求的概率为：

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

2） 以B表示"任何n个盒中各有一球"的事件。因为任何n个盒可以从N个盒中任意选取，共有C_N^n种选法，选出这n个盒后，再按问题1可知事件B共含$C_N^n\cdot n!$个不同的基本事件数，故所求的概率为：

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

3） 以C表示"某指定的一个盒中恰有m个球"的事件，因为m个球可以从n个球中任意选出，共有C_n^m种选法，其余$n-m$个球可以任意落入其余$N-1$个盒中共有$(N-1)^{n-m}$种落法，因此事件C共含$C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$个不同的基本事件，故所求的概率为

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

由以上各例可以看到，在古典概型的概率计算中常用到一些排列组合的有关知识，熟悉这方面的知识是必要的。但古典概型中的许多问题的求解并非都如此容易，而是富有技巧的。

由概率的古典定义可知，概率也具有下列三个性质：

1） 对任意事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

2） $P(U)=1$，$P(V)=0$；

3） 设事件 A_1，……，A_n 两两互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

证：1） 由定义显然成立，因为包含在 A 中的基本事件数 $0 \leqslant m \leqslant n$，故 $0 \leqslant P(A)= =m/n \leqslant 1$

2） 因为 U 中所含的基本事件数就是总的基本事件数，所以 $P(U)=n/n=1$，同理 $P(V)=0$。

3） 为简单起见，仅就 $n=2$ 的情形进行证明。

设 A_1 由 r 个基本事件组成，A_2 由 s 个基本事件组成，由于 A_1 与 A_2 互斥。所以 A_1+A_2 由 $r+s$ 个基本事件组成，基本事件总数设为 n，于是

$$P(A_1+A_2)=\frac{r+s}{n}=\frac{r}{n}+\frac{s}{n}=P(A_1)+P(A_2)$$

【例 6】 袋中有白球 5 个，黑球 3 个，现从中接连取两个球，第一次取出的球不放回去，求取得两球为一白一黑的概率。

【解】 设 A 为“取得两球为一白一黑”的事件；

A_1 为“第一次取得白球，第二次取得黑球”的事件；

A_2 为“第一次取得黑球，第二次取得白球”的事件。

显然，A_1，A_2 互斥且 $A=A_1+A_2$，于是所求的概率为

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{5\times3}{8\times7}+\frac{3\times5}{8\times7}=\frac{15}{28}$$

三、概率的几何定义

根据概率的统计定义求事件的概率，需作大量重复试验，这在实际问题中往往是很麻烦的，甚至是不可能的。在概率的古典定义中，不需要试验可直接根据公式求出事件的概率，这是它最大的优点，但是，它也有局限性，因为它要求试验的全部可能结果的数目是有限的，而且每个试验结果出现的可能性相等。如果试验的全部可能结果是无限的，古典定义就不适用了，必须从另外的角度来考虑这类事件的概率。

下面看一个试验的全部可能结果数目是无限的，而各个可能结果具有等可能性的一个典型例子。

例如，设有一平面区域 G，其中有一小区域为 g，如图 1-2。今若向区域 G 内任意抛掷一点 M，试问此点落于 g 内的概率为多少？这里，“在区域 G 内任意投掷一点”这句话应理解为：被投掷的点落在区域 G 内任一点处都是等可能的，并且落在区域 G 内的任何部分内的概率只与这部分的面

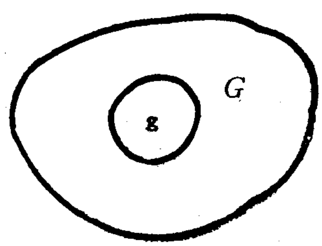

图 1-2

积成正比例，而与其位置和形状无关。于是，在区域G内任意投掷一点而该点落在区域g内的概率就可定义为：

$$p=\frac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}$$

这样借助于几何上的度量（比如面积）来合理地规定的概率称为概率的几何定义，此定义不仅对平面区域适用，对直线区域、空间区域也适用，只不过将几何度量相应地改为长度和体积，于是概率的几何定义可更一般地叙述为：

设有一区域G（这个区域可以是直线区域，也可以是平面区域或空间区域），向域G内任意投一点，此点落于G内任一位置是等可能的，又域G中有小区域g，则所投之点落于g中的概率为：

$$p=\frac{g\text{的几何度量}}{G\text{的几何度量}}$$

这里几何度量应这样理解：当域是直线域时它表示长度；当域是平面域时它表示面积；当域是空间域时它表示体积。

由此可见，概率的几何定义实际上是概率的古典定义的推广，这个公式里的G的几何度量和g的几何度量分别代替了古典定义中的n和m。

【例 7】 在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间$[0,3)$上的诸数字，旋转这个陀螺，求当陀螺停下来时其圆周与桌面接触点的刻度位于区间$[1/2,2]$上的概率。

【解】 由于陀螺及刻度的均匀性，它停下来时其圆周上各点与桌面接触的可能性相等，即接触点的刻度位于在$[0,3)$内的一个区间上的可能性与这区间的长度成比例，于是，所要求的概率为：

$$p=\frac{\text{区间}[1/2,2]\text{的长度}}{\text{区间}[0,3)\text{的长度}}=\frac{2-1/2}{3-0}=\frac{1}{2}$$

【例 8】 （会面问题）甲，乙二人相约在0到T这段时间内，在预定地点会面，先到的人要等候另一人t分钟（$t<T$）后方可离去，试求这两人能会面的概率。

【解】 设甲，乙二人在时间T内到达预定地点的时刻分别为x及y，它们可取区间$[0,T]$内的任一值，即

$$0\leqslant x\leqslant T,\ 0\leqslant y\leqslant T$$

则二人能会面的充要条件是

$$|x-y|\leqslant t$$

将x与y表作平面上点的坐标，则所有可能结果都被一个边长为T的正方形内的点所代表，而代表能会面的点介于直线$x-y=\pm t$之间的区域（图1-3中阴影部分）内，故所求的概率为阴影域的面积与正方形域的面积之比

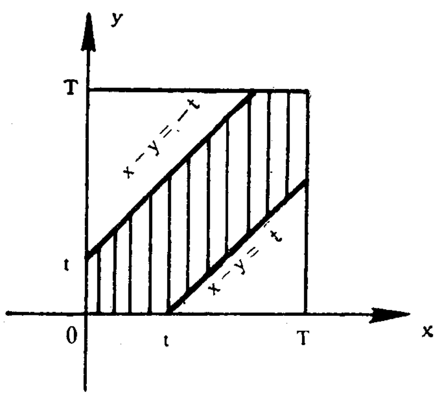

图 1-3

$$p=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

由概率的几何定义可知，概率同样具有如下性质：

1） 对任何事件A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

2） $P(U)=1$，$P(V)=0$

3） 若事件 A_1，A_2，……两两互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots\cdots$$

四、概率的公理化定义及性质

概率的统计定义虽然一般而且直观，但在数学上不严密，因为它所依据的是试验次数很大时频率所呈现出的稳定性这一事实，然而次数应该多大，摆动应如何理解都没有确切的说明。要直接估计某一事件的概率也非常困难，甚至是不可能的。概率的古典定义或几何定义是在一种特殊的情形下给出的，这就是试验的所有可能结果需有限（或无限）且等可能。而实际问题往往不满足这些条件，这时就不能用古典定义（或几何定义）来计算概率了。因此，人们希望找到一个一般的概型，以便更广泛更确切地描述随机现象，通过对随机现象的数学本质的研究和对上述三定义的分析，知道了概率具有一些基本性质，我们就把它作为公理，并由此得到新的更严格的定义。

定义 设A为随机事件，$P(A)$为定义在所有随机事件组成的集合上的实函数且满足下列三条公理：

公理 1 对任一事件A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

公理 2 $P(U)=1$

公理 3 对于两两互斥的可数多个随机事件 A_1，A_2，……有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称函数$P(A)$为事件A的概率。

这个定义称为概率的公理化定义，可直接验证，它包含着概率的统计定义，概率的古典定义和概率的几何定义。

在概率公理化定义的基础上，可推出概率的一些性质。

性质 1 不可能事件的概率为 0，即$P(V)=0$。

证
$$U=U+V+V+\cdots$$
$$P(U)=P(U)+P(V)+P(V)+\cdots$$

因此
$$P(V)=0$$

性质 2 设有限多个事件 A_1，A_2，……，A_n 两两互斥，那末

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

证 在公理 3 中，令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=V$。按 $P(V)=0$，便得

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n+A_{n+1}+\cdots)$$
$$=P(A_1)+\cdots+P(A_n)+0+0+\cdots=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

此性质称为概率的有限可加性。习惯上，统称公理 3 及性质 2 为概率的加法定理。

性质 3 设A为任一随机事件，那末

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

证 由于A与$\bar{A}$互斥，由性质 2（令其中 $n=2$），

得
$$P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

但
$$A+\bar{A}=U,\quad P(U)=1,\ \text{所以}$$
$$P(A)+P(\bar{A})=1,$$

即 $$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

性质 4 设A，B为两事件，且$A \supset B$，则

$$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

证 当$A \supset B$时，有

$$A = B + (A-B)，且 B(A-B) = V$$

故有 $$P(A) = P\{B+(A-B)\} = P(B) + P(A-B)$$

即 $$P(A-B) = P(A) - P(B)$$

由上式及$P(A-B) \geqslant 0$，可立即推得若$A \supset B$，则$P(A) \geqslant P(B)$

性质 5 对任意两个随机事件A，B有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证 因为$A \cup B = A + (B - AB)$，

且$A(B-AB) = V$，

因而得

$$P(A \cup B) = P\{A + (B-AB)\} = P(A) + P(B-AB)$$

而$AB \subset B$，由性质4得

$$P(B-AB) = P(B) - P(AB)$$

从而 $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

由于$P(AB) \geqslant 0$，所以由性质5推得

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

对于三个事件A_1，A_2，A_3有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - \\ - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

更一般地有 $$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_iA_j) + \\ + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n)$$

【例 9】 设事件A、B的概率分别为$\frac{1}{3}$与$\frac{1}{2}$。求下列三种情况下$P(B\bar{A})$的值。

1） A与B互斥；

2） $A \subset B$；

3） $P(AB) = \frac{1}{8}$。

【解】 1） 由于A与B互斥，$B \subset \bar{A}$，所以$B\bar{A} = B$。

即得 $$P(B\bar{A}) = P(B) = \frac{1}{2}$$

2） 当$A \subset B$时，

$$P(B\bar{A}) = P(B-A) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

3） 因为$A \cup B = A + B\bar{A}$，而

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A + B\bar{A}) = P(A) + P(B\bar{A})。$$