高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

（水土等类型专业部分）

天津大学等 27 所高等工业学校集体编写

人民教育出版社

[illegible]

高等数学

GAODENG SHUXUE

[illegible]

[illegible]

[illegible]

高等学校教学用书

高　等　数　学

GAODENG SHUXUE

（水土等类型专业部分）

天津大学等27所高等工业学校集体編写

人民教育出版社

本书是天津大学等 27 所高等工业学校集体编写的，由同济大学主编。

本书内容包括微分几何、复变函数、常微分方程补充、变分法、概率論、数理統計。可供高等工业学校水土类专业使用。

簡装本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本书暂以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相应减少20%。希鉴諒。

高 等 数 学

（水土类型专业部分）

天津大学等27所高等工业学校集体编写

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

人 民 教 育 印 刷 厂 印 装

新华书店科技发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·882 开本 787×1092 1/32 印張 10 15/16 插頁2

字数 286,000 印数 25,001—55,000 定价（6）¥0.90

1960 年 11 月第1版 1961 年 5 月北京第 3 次印刷

目　录

第一章　微分几何

引　言

水利工程中的双曲拱壩或土木工程中的薄壳結构，都有节省材料的优点，因而为工程界所乐于采用。要分析这样一些曲面形状結构的应力，就必須掌握曲綫和曲面的几何性质。本章的任务就是对空間的曲綫和曲面进行必要的研究，为学习力学作好准备。根据这一目的，我們主要讲述曲率理論。

§1.1. 空間曲綫的曲率及撓率

横梁中央受力就产生弯曲（图 1.1），在研究其应力情况时，需要考虑到横梁纵向纖維层的弯曲情况。本章第一个任务就是对曲綫的弯曲程度给以定量的估計。

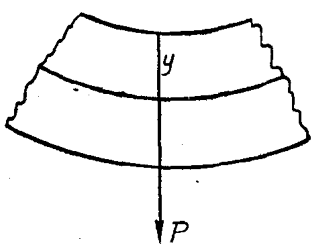

图 1.1

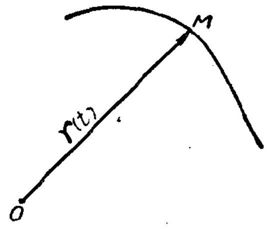

图 1.2

一条曲綫可看成有固定始点的变动矢量$\boldsymbol{r}(t)$的端点之軌迹(图1.2)，即用变动矢量 $\boldsymbol{r}(t)=\{\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)\}$ 来描繪曲綫，其中 t 为数量性参数。以后我們都取始点为坐标原点，并取弧长 s 作为参变量，曲綫也叫做变矢量 $\boldsymbol{r}(s)$的矢端曲綫。

我們提出单位矢量的两个性质，这在下面是很有用的。

1. 单位矢量 $\boldsymbol{r}(t)$的导数 $\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ 垂直于 $\boldsymbol{r}(t)$;

2. 单位矢量 $\boldsymbol{r}(t)$的导数 $\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ 的模，等于这矢量的方向之改变率,即

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right|=\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

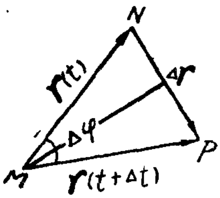

图 1.3

现在来証明 2。$\Delta\varphi$ 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 与 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$的交角。由图 1.3 得到:

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t},$$

由于 $\boldsymbol{r}(t)$ 是单位矢量，故图 1.3 中 $\overline{MN}=\overline{MP}=1$。由此有

$$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{2}\right|=\frac{\overline{NP}}{2}=\sin\frac{\Delta\varphi}{2},$$

从而

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right|=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{2}\cdot\frac{1}{\Delta t}\right|=\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|,$$

証毕。

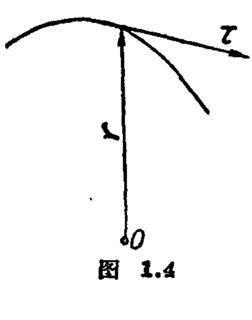

图 1.4

已經知道,矢量 $\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$ 的方向是沿着曲綫的切綫，特别是若取曲綫的弧长 s 作参变量，且弧长是由曲綫上一个定点依照指定方向来計算的,則导数 $\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$ 給出**單位切綫矢量** $\boldsymbol{\tau}$（图 1.4），它的方向与沿着这曲綫参变量 s 增加的方向一致:

$$\frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}=\boldsymbol{\tau}. \tag{1.1}$$

我們用单位切綫矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 之方向改变的快慢来衡量曲綫的弯曲。注意到前述单位切綫矢量的性质，把矢量

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\boldsymbol{N}. \tag{1.2}$$

称为曲綫的**主法綫矢量**，这矢量的模等于切綫的方向对弧长的改变率 $\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$，因而叫做曲綫的**曲率**，記以

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=|\boldsymbol{N}|=\frac{1}{\rho}, \tag{1.3}$$

其中 ρ 叫**曲率半徑**。

此外，主法綫矢量垂直于切綫（卽沿法綫方向）而指向曲綫的凹側（图 1.5），因为当 $\Delta s>0$ 时，差 $\boldsymbol{\tau}(s+\Delta s)-\boldsymbol{\tau}(s)$ 的方向指向这一側。

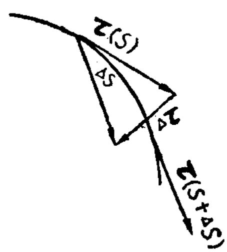

图 1.5

用 $\boldsymbol{\nu}$ 表示 $\boldsymbol{N}$ 方向上的单位矢量，則可以写成

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}. \tag{1.4}$$

对于平面曲綫，矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 都位于曲綫所在的平面上，于是矢量

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu} \tag{1.5}$$

是一个单位矢量，恒垂直于曲綫所在的平面；对于非平面曲綫，$\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向可以随点而异，因之矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 也随点而异（图 1.6），$\boldsymbol{\beta}$ 称为**單位次法綫矢量**。

导数 $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$——矢量 $\boldsymbol{\beta}$ 对弧长的变化率——表現出曲綫离开平面形式的偏差度，把它叫**撓率矢量**。現在来証明撓率矢量平行于主法綫矢量。将式(1.5)两端对 s 求导数，就有

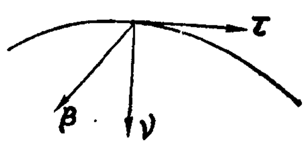

图 1.6

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds},$$

由于 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向一致，故 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{\nu}=0$，于是

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}. \tag{1.6}$$

由此推出 $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直。另方面单位矢量的导数 $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ 垂直于 $\boldsymbol{\beta}$，因此，$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$，实际上就是平行于 $\boldsymbol{\nu}$。于是我們有

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}=\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}, \tag{1.7}$$

其中 $\frac{1}{\kappa}$ 叫曲綫的撓率，当 $\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向相同时 κ 取正値，相反时取負值。

在曲綫上每点都有三个单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{\nu}$、$\boldsymbol{\beta}$，彼此互相垂直而且有与坐标軸相同的轉向，通过它們构成了一个三面形。当一点沿曲綫移动时，这个三面形作为一个刚体来运动，它称为曲綫的**伴随三面形**。

玆举一例說明上述概念在力学上的应用。质点沿曲綫运动时，它的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}.$$

加速度可表为

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu},$$

即加速度可沿切綫及主法綫方向分解。可以看出，曲率半徑 ρ 愈小，沿主法綫的分量就愈大，而沿次法綫的分量則恒为零。

II 以下讲計算曲率及撓率的公式。引用坐标軸 ox, oy, oz 以及对应于它們的单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$。可以写成

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{dx}{ds}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{ds}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{ds}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{d^2x}{ds^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\boldsymbol{k}.$$

由此对于 N 的模 $\frac{1}{\rho}$ 得到:

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{1.8}$$

再来求撓率 $\frac{1}{\kappa}$。由(1.7)式得到 $\frac{1}{\kappa}=\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\cdot\boldsymbol{\nu}$,再以(1.6)的关系代入此式,有:

$$\frac{1}{\kappa}=\left(\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}\right)\cdot\boldsymbol{\nu}=\left(\boldsymbol{\tau}\times\frac{d(\rho\boldsymbol{N})}{ds}\right)\cdot\rho\boldsymbol{N}=$$

$$=\left[\boldsymbol{\tau}\times\left(\frac{d\rho}{ds}\boldsymbol{N}+\rho\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}\right)\right]\cdot\rho\boldsymbol{N}=$$

$$=\rho\frac{d\rho}{ds}(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{N}+\rho^2\left(\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}\right)\cdot\boldsymbol{N},$$

不过矢量 $\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{N}$ 垂直于 $\boldsymbol{N}$,故末式右端第一項为零,于是得到:

$$\frac{1}{\kappa}=\rho^2\left(\boldsymbol{\tau}\times\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}\right)\cdot\boldsymbol{N}.$$

或以 $\boldsymbol{r}'$、$\boldsymbol{r}''$、$\boldsymbol{r}'''$ 分别表 $\boldsymbol{r}(s)$ 对 s 的一、二、三阶导数,即

$$\boldsymbol{r}'=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{\tau};\quad \boldsymbol{r}''=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\boldsymbol{N};$$

$$\boldsymbol{r}'''=\frac{d\boldsymbol{N}}{ds};\quad \frac{1}{\rho}=|\boldsymbol{r}''|,$$

则上式可写成

$$\frac{1}{\kappa}=\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''')\cdot\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}''|^2}=-\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''}{|\boldsymbol{r}''|^2}. \tag{1.9}$$

例 求圓 $\boldsymbol{r}=\left\{a\cos\frac{s}{a},\ a\sin\frac{s}{a},\ 0\right\}$ 的 $\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta},\ \frac{1}{\boldsymbol{r}}$ 及 $\frac{1}{\boldsymbol{\rho}}$。我們有

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau}=\left\{-\sin\frac{s}{a},\ \cos\frac{s}{a},0\right\},$$

$$\boldsymbol{r}''=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\left\{-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a},\ -\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a},0\right\}$$

$$\boldsymbol{r}'''=\left\{\frac{1}{a^2}\sin\frac{s}{a},\ -\frac{1}{a^2}\cos\frac{s}{a},0\right\},$$

于是
$$\frac{1}{\rho}=|\boldsymbol{r}''|=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{\kappa}=-\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''}{|\boldsymbol{r}''|^2}=0,$$

$$\boldsymbol{\nu}=\rho\boldsymbol{N}=a\boldsymbol{r}''=\left\{-\cos\frac{s}{a},\ -\sin\frac{s}{a},0\right\},$$

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -\sin\frac{s}{a} & \cos\frac{s}{a} & 0\\ -\cos\frac{s}{a} & -\sin\frac{s}{a} & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{k}.$$

其实 $\boldsymbol{\beta}=\{0,0,1\}$，这个結論从几何图形也可看出，由 $\boldsymbol{\tau}$ 及 $\boldsymbol{\nu}$ 的表达式知道，它們在 Oz 軸方向的分量等于零，故 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{\nu}$ 都平行 xOy 平面，故 $\boldsymbol{\beta}$ 必然垂直 xOy 平面，卽应为 $\boldsymbol{\beta}=\{0,0,1\}$。

須提請注意者，当应用一般的参数 t（而不是弧长 s）时，以上計算公式不能直接应用。現推出对用任何参量給定的曲綫求曲率的公式。把 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 t 的一阶与二阶导数記作 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 与 $\ddot{\boldsymbol{r}}$，$\frac{ds}{dt}$記为 $\dot{s}$，則

(1)
$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{\dot{s}},$$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\frac{dt}{ds},$$

把(1)式关系代入上式后，得：

(2)
$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}\dot{s}-\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{s}}{\dot{s}^3},$$

現在来求 $\dot{s}$ 与 $\ddot{s}$。从式子

$$ds^2=d\boldsymbol{r}^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2dt^2 ①$$

得到

(3)
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\dot{\boldsymbol{r}}^2,$$

① $ds^2=d\boldsymbol{r}^2$ 可由 $d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$ 及 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ 得出。

或

(4) $$\dot{s}=|\dot{\boldsymbol{r}}|.$$

再把(3)式对 t 求导数:

$$2\dot{s}\ddot{s}=2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}},$$

注意到(4)式就得:

(5) $$\ddot{s}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}.$$

把(4)与(5)代入(2),則得

$$\frac{1}{\rho^2}=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|^2=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2-(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^6},$$

如应用矢量公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$ (証明参考§ 1.5 公式 1.27),則上式化为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3},$$

这就是最終的形式。

§1.2. 富利耐公式

我們引入一組公式，它是三个基本矢量 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{\nu}$、$\boldsymbol{\beta}$ 与其导数及曲率、撓率之間的关系式。不仅在以下的演算中会用到它們，而且也是曲綫論的基本公式（在我們这一簡短的教材中当然还不能充分显示出它們的作用)。

現在求$\dfrac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}$。由 $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\tau}$ 两边对 s 求导数，得到:

$$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\times\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\beta}\times\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\tau}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\nu}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu},$$

所以 $$\frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau}-\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\beta}.$$

前面已經导出:

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{\rho}\nu,$$

$$\frac{d\beta}{ds}=\frac{1}{\kappa}\nu,$$

最后这三个等式叫做富利耐公式。

§1.3. 曲面的参数方程,曲綫坐标

我們知道空間曲面可用直角坐标的显式方程

$$z=f(x, y) \tag{1.10}$$

表示,亦可用隐式方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{1.11}$$

表示。

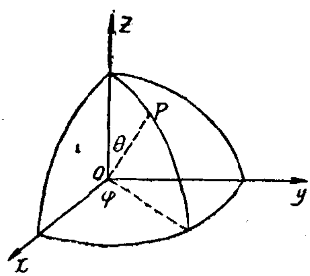

图 1.7

曲面除了上述的表示法外，还可用另一种方式給出，例如在讲空間球坐标的时候，我們有

$$\left.\begin{aligned} x&=\gamma\sin\theta\cos\varphi\\ y&=\gamma\sin\theta\sin\varphi\\ z&=\gamma\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

若給定 $\gamma=a$, 則(1.12)給出以原点为中心，a 为半徑的球面上的点的坐标:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\sin\theta\cos\varphi\\ y&=a\sin\theta\sin\varphi\\ z&=a\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

这样,球面上的点的坐标(x, y, z)就通过两个参数 φ, θ 表出来,而方程(1.13)就称为这个球面的参数方程。

回到一般情形,方程

$$x=\varphi(u, v),\ y=\psi(u, v),\ z=\omega(u, v) \tag{1.14}$$

在一定的条件下,代表一个曲面(s)。当 u, v 的值給定时，(1.14)就給

出曲面(s)上的一个确定的点，因此(u, v)可以取作曲面上点的坐标。当u固定而令v变动,則方程(1.14)成为v的单参数方程,它代表曲面(s)上的一条曲綫，改变u的值,就得(s)上的一族曲綫，同理給v以不同的常数值，就得(s)上的另一族曲綫；这两族曲綫在(s)上构成一个曲綫网(图1.8),称为曲面(s)上的曲綫坐标网，而(u, v)就称为曲面上点的**曲綫坐标**。

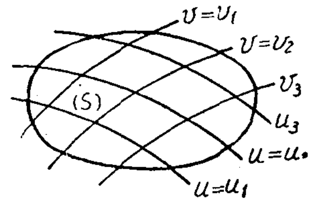

图 1.8

对于球面方程(1.13)，它的坐标綫就是通常所称的經綫($\varphi=$常数)，和緯綫($\theta=$常数)。

例 1. $x=g(u)\cos v \quad y=g(u)\sin v \quad z=f(u)$ (1.15)

这是把平面曲綫

$$y=g(u) \quad z=f(u)$$

繞z軸回轉而得的回轉面(图1.9)。

坐标綫是圓周($u=$常数)和与原平面曲綫形状相同的曲綫($v=$常数),仍然分别称为回轉面上的緯綫和經綫。

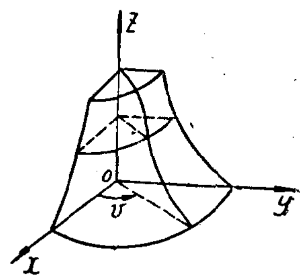

图 1.9

注意：球面方程(1.13)是这里的特殊情形，平面曲綫就是圓周 $y=a\sin\theta$, $z=a\cos\theta$。

例 2. $x=a(u+v)$, $y=b(u-v)$, $z=uv$

消去参数u, v得x, y, z的关系式:

$$4z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

这是双曲抛物面(图1.10)，按原来的参数表示，坐标綫是两族直綫。

注意:曲面的显式方程

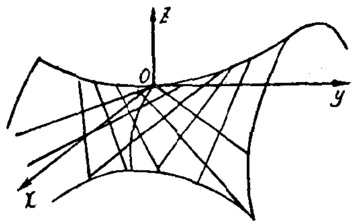

图　1.10

$$z=f(x,y) \tag{1.10}$$

可以看作是参数表示(1.14)的特殊情形，这只须把 x, y 取作参数便得：

$$x=x, \quad y=y, \quad z=f(x,y)$$

最后指出，曲面上任意一条曲綫（L）可由 u, v 之間的关系而确定，或者表作 $v=v(u)$的形式，或者表作

$$u=u(t), \quad v=v(t)$$

的形式。

§1.4. 曲面的切平面及法綫

以下我們假定方程中出現的函数，在討論的范圍內，有連續的偏导数。

已經証明，曲面

$$(s):\ F(x,y,z)=0 \tag{1.11}$$

在偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ 不同时为零的点处，其切平面的方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-z)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0 \tag{1.16}$$

法綫的方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \tag{1.17}$$

其中(x, y, z)是曲面上的給定点，$\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ 取在这点上的值。

現設曲面(s)的参数方程为

$$x=\varphi(u,v);\ y=\psi(u,v);\ z=\omega(u,v), \tag{1.14}$$

把它代回到(1.11)中，就应該得到关于 u, v 的恒等式，由此对 u 和 v 求导数得

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

这是 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ 的齐次方程，按齐次方程組的解法，只要

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \tag{1.18}$$

不全为零，則 $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ 与这組行列式的值成比例，把这組比值代入(1.16)，則得参数方程(1.14)表示的曲面的切平面的方程：

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}(X-x)+\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}(Y-y)+$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}(Z-z)=0. \tag{1.19}$$

它可写成如下的行列式

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=0. \tag{1.19'}$$

同理，由(1.17)得法綫的方程

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}, \tag{1.20}$$