# 电磁场与电磁波解题方法

罗澄侯　寇廷耀　编

電子工業出版社

PHEI

# 电磁场与电磁波解题方法

罗澄俣　　寇廷耀　编

電子工業出版社

Dt16/08

## 内 容 提 要

本书内容包括静电场、恒定电流磁场、边值问题的计算、交变电磁场与平面电磁波等。全书共分五章，前四章的开头都有基本理论的概述和有关计算公式，第五章为供研究生选用的综合例题，书末附有附录。

本书可作为高等院校无线电与微波技术专业的学生参考书，亦可供有关工程技术人员参考使用。

**电磁场与电磁波解题方法**

罗澄侯　寇廷耀　编

责任编辑　洋　溢

*

电子工业出版社出版（北京海淀区万寿路）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京通县曙光印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米1/32　印张：21.75　字数：4.90 千字

1988年2月第一版　1988年2月第一次印刷

印数：1—5000册　定价：4.90元

统一书号：15290·551

ISBN 7-5053-0161-6/TP15

# 前　言

为了有助于加强电磁场理论基础课程的训练，为了给广大读者，包括在校学习的学生与从事这方面工作的教师，提供一本包含有大量题解与习题的参考书，我们编写了此书。

本书前四章内容包括静电场，恒定电流磁场、边值问题的计算、交变电磁场与平面电磁波。共计有题解约200道，习题约200道，两者合计约400道。为了读者查阅方便，在每章的开头作了基本理论的概述并列出了有关的计算公式，同时还在书末加有附录。在选编题解与习题的体系上力求与电磁场理论系统的程序相一致。题解与习题来源于日、美等国家及我国的一些电磁学书籍，包括自己在教学实践中所积累的题解与习题，其内容不论在广度与深度方面与现行教材的例题与习题的水平相当。

在本书的第一、二章中，除了注意到题型的多样性与广泛性外，还注意了有一定深度的微积分运算，以使学生学完高等数学之后有进一步巩固与提高运算能力的机会。在第三章中有意选择了一部分具有一定难度的边值问题，它们在教学上涉及到傅立叶级数，数理方程，特殊函数、复变函数与线性代数，以期使场本身的问题与数学问题结合起来。

第五章是清华大学教授杨弃疾为电磁场与微波技术专业研究生讲授的“应用电磁场理论”所选编习题的题解。

这一章按课程系统，即电磁场的基本量与基本方程；静态场；平面波的传播；电磁波传播的几何光学近似；导行波；辐射与绕射的次序作了选题和题解，其目的在于提高学生分析问题的能力，熟悉解题的方法。对那些解题有困难的学生可给予帮助和引导。对于其他读者，可和自己完成的解答进行对照，也可能从

得到一些收益。

前四章的编写工作得到了王一平教授的指导，他审阅了本书稿的大部分内容。茅于宽教授审阅了部分内容，参加审阅工作的还有肖景明副教授、冯亚伯与杨德顺同志。他们都提出了很宝贵的意见。此外董庆生、单凯旋、吴吉华、李斌良等同志也对本书的编写工作给予了帮助，在此一并表示衷心的感谢。

第五章的选题和题解是在杨弃疾教授的指导下进行的，全文经过杨教授的详细修改与审校，在此表示感谢。

本书可作为全国高校中无线电系、电子工程系，电磁工程系的各专业的参考书。也可作为高校中物理学课程与电工原理课程的参考书。此外，还可以作为工矿企业中对电磁理论有兴趣的科技人员的参考书。

由于我们水平有限，缺乏经验，因此错误与不妥之处在所难免，诚恳地希望广大读者给予批评指正。

最后谨向参考书作者以及在本书末页没有提到的参考书作者致以敬意。

西北电讯工程学院　罗澄侯
清　华　大　学　寇廷耀

# 目　录


第一章　静电场……………………………………………（ 1 ）

§1-1　库仑定律……………………………………………（ 1 ）

§1-2　电场强度……………………………………………（ 2 ）

§1-3　高斯定理……………………………………………（ 3 ）

§1-4　电位……………………………………………（ 5 ）

§1-5　电力线方程式……………………………………………（ 6 ）

§1-6　电容……………………………………………（ 7 ）

§1-7　电场能量及带电体系的受力……………………………（ 14 ）

§1-8　边界条件……………………………………………（ 15 ）

例题……………………………………………（ 16 ）

题解……………………………………………（ 22 ）

第二章　恒定电流的电场与磁场……………………………（124）

§2-1　恒定电流的电场……………………………………（124）

§2-2　恒定电流磁场……………………………………（125）

§2-3　恒定电流磁场中的磁标位与磁矢位…………（126）

§2-4　自感与互感……………………………………（128）

§2-5　磁场能量、力和束缚电流、磁荷……………（129）

§2-6　边界条件……………………………………（130）

§2-7　电场和磁场中的带电粒子……………………（131）

§2-8　几个附表……………………………………（134）

例题……………………………………………（138）

题解……………………………………………（147）

第三章　边界值问题……………………………………（236）

§3-1　分离变量法及直接积分法的解答……………（236）

§3-2　镜象法……………………………………………（243）
§3-3　电轴法……………………………………………（246）
§3-4　复变函数法………………………………………（250）
§3-5　有限差分析………………………………………（250）
例题…………………………………………………（252）
题解…………………………………………………（261）
第四章　交变电磁场与平面电磁波……………………（351）
§4-1　麦克斯韦方程……………………………………（351）
§4-2　感应电动势$\varepsilon$ ……………………………………（352）
§4-3　边界条件…………………………………………（352）
§4-4　能量与能量流……………………………………（353）
题解…………………………………………………（354）
第五章　应用电磁场理论题解（供研究生用）…………（446）
习题…………………………………………………（618）
附录1　清华大学无线电电子学系电磁场与微波
技术专业博士生入学考试试题…………………（668）
附录2　矢量分析公式………………………………（674）
附录3　周期函数的傅立叶级数……………………（677）
附录4　函数展成圆柱函数项级数…………………（680）
附录5　函数按勒让德多项式展开级数
与勒让德多项式……………………………………（681）
附录6　贝塞尔函数的积分微分公式………………（685）
附录7　函数曲线……………………………………（686）
附录8　参考书目……………………………………（688）

# 第一章　静　电　场

## §1-1　库 仑 定 律

### 一、真空情况

（$a$） 点电荷

$$\boldsymbol{F}_{10}=\frac{q_1q_0}{4\pi\varepsilon_0r_{10}^3}\boldsymbol{r}_{10}$$

式中，$\boldsymbol{F}_{10}$表示当 $q_1$ 固定时，$q_0$所受的力。（见图 1-1）

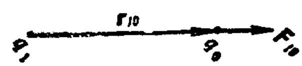


图1-1

（$b$） 点电荷群

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_iq_0}{4\pi\varepsilon_0r_{i0}^3}\boldsymbol{r}_{i0}$$

式中，$\boldsymbol{F}$ 表示当所有点电荷固定时，$q_0$所受力矢量的合成，它仍然是一个矢量。

（$c$） 分布电荷

长为$l$，其上分布有线电荷密度$\rho_l$的导线对$q_0$的作用力为：

$$\boldsymbol{F}=q_0\int_l\frac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r}$$

面积为$S$，其上分布有面电荷密度为$\rho_s$的带电面对 $q_0$ 的作用力为：

$$\boldsymbol{F}=q_0\int_S\frac{\rho_S dS}{4\pi\varepsilon_0r^3}$$

体积为$V$，其内分布有体电荷密度为$\rho_V$的带电体对$q_0$ 的作用力为

$$\boldsymbol{F}=q_0\int_V\frac{\rho_V dV}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

**二、介质情况**

设介质充满无限大空间，介质的介电常数为$\varepsilon$，则上述公式中以$\varepsilon$代替$\varepsilon_0$即可。

本书所使用的单位是实用单位制。

## §1-2 电场强度

**一、真空情况**

(a) 点电荷

电场强度的定义：某处电场强度矢量定义为这样一个矢量，其大小等于单位电荷在该处所受电场力的大小，其方向与正电荷在该处所受电场的方向一致。以式子表示为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$$

如图 1-2 所示，一点电荷$q$对空间某点所产生的电场强度为：

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}$$

图 1-2

(b) 点电荷群

电场强度是一个矢量。它服从矢量迭加原理：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\cdots\cdots\boldsymbol{E}_n$$

或者：

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^3}\boldsymbol{r}_i$$

(c) 分布电荷

线电荷：

$$E = \int_l \frac{\rho_l dl}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \boldsymbol{r}$$

面电荷：

$$E = \int_S \frac{\rho_S dS}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \boldsymbol{r}$$

体电荷：

$$E = \int_V \frac{\rho_V dV}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \boldsymbol{r}$$

应当指出，以上各式中的 $r$ 是观察点与电荷单元所在点的坐标函数，积分时积分变数是电荷单元的坐标，观察点是固定不变的，积分后 $E$ 仍然是观察点坐标的函数。以上各式中的 $\boldsymbol{r}$ 是电荷单元到观察点的矢径。

**二、介质情况**

设介质充满无限大空间，并设介质的介电常数为 $\varepsilon$ ，则以上各式以 $\varepsilon$ 代替 $\varepsilon_0$ 即可。

## §1-3 高斯定理

**一、真空情况**

设空间有 $m$ 个点电荷，而封闭曲面 $S$ 只包围着 $n$ 个点电荷 ($n<m$)，则穿过此封闭曲面的电场强度的通量为：

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{E}_i\cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{m} \oint_S \boldsymbol{E}_i\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

应当注意，式中不包含未被曲面 $S$ 包围的（$m$-$n$）个点电荷对通量的贡献。

若令：

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = Q$$

则高斯定理就是

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

**二、介质情况**

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = Q$$

式中，$\boldsymbol{D}$为电感应强度，这就是高斯定理的一般形式。

**三、高斯定理的应用**

当使用下面两个公式

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i \quad \text{或}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V dV + \int_S \rho_S dS$$

时，必须注意式中的$\boldsymbol{E}$是带电体系中所有电荷（无论在高斯面内或高斯面外）所产生的总场强，而$\sum_{i=1}^{n} q_i$只是对高斯面内的电荷求和，这是因为高斯面外的电荷对总电通量没有贡献，但并不是说对总电场没有贡献。

当希望直接应用高斯定理求解场强时，都必须要求场强的分布是高度对称的，例如对于电荷是均匀分布的球壳，在任何与带电球壳同心的球面上各点场强的大小均相等，其方向处处与$d\boldsymbol{S}$（球面上的法线方向）的方向一致，故上述各式中的物理量$E$、$\boldsymbol{D}$可以提出到积分号外面来。即可得到

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \oint_S dS}, \qquad D = \frac{Q}{\oint_S dS}$$

### 四、束缚电荷

设束缚面电荷密度与束缚体电荷密度分别为$\rho_{SP}$与$\rho_P$，而极化强度为$\boldsymbol{P}$，则存在下面的关系：

$$\boldsymbol{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}$$

$$\rho_{SP}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}$$

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

式中，$\boldsymbol{n}$为曲面的外法线方向。

## §1-4 电　　位

### 一、点电荷的电位为

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

### 二、点电荷组的电位

$$V_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon r_{ik}}$$

### 三、分布电荷

线电荷的电位：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l\frac{\rho_l dl}{r}$$

面电荷的电位：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\frac{\rho_S dS}{r}$$

体电荷的电位：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho_v dv}{r}$$

上述各式的电位参考点在无限远处。

### 四、$E$与$V$的关系

设电位参考点在无限远处，则$P$点之电位为：

$$V_P=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{r_P}^{r_\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$$

若电位参考点在$P'$点，则

$$V_P=\int_P^{P'}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{r_P}^{r_P'}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$$

在电场中，$A$点与$B$点之间的电位差$U_{AB}$为：

$$U_{AB}=\int_A^B\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_{r_A}^{r_B}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=V_A-V_B$$

$\boldsymbol{E}$与电位$V$之间的关系为：

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V$$

其在各坐标系中的表达式为：

直角坐标：

$$\boldsymbol{E}=-\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial V}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial V}{\partial Z}\right)$$

柱坐标：

$$\boldsymbol{E}=-\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial V}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial V}{\partial Z}\right)$$

球坐标：

$$\boldsymbol{E}=-\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial V}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)$$

## §1-5　电力线方程式

在直角坐标系中，电力线上之元，与该点之电场强度分别为：

$$d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}dx+\boldsymbol{j}dy+\boldsymbol{k}dz$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} E_x + \boldsymbol{j} E_y + \boldsymbol{k} E_z$$

$\boldsymbol{E}$既必须与线元$d\boldsymbol{l}$平行，故由$\boldsymbol{E}$得电力线之微分方程为：

$$\boldsymbol{E} \times d\boldsymbol{l} = 0$$

上式化为直角坐标三个分量为：

$$E_y dz - E_z dy = 0$$

$$E_z dx - E_x dz = 0$$

$$E_x dy - E_y dx = 0$$

即：

$$\frac{dx}{E_x(x,y,z)} = \frac{dy}{E_y(x,y,z)} = \frac{dz}{E_z(x,y,z)}$$

同理，对于柱坐标及球坐标之电力线方程为：

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z}$$

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

以上每个公式有两个等号，代表两个微分方程每个微分方程决定一个面函数，两个面函数之交线为电力线。

## §1-6 电　　容

### 一、电容之计算公式

**(a) 孤立导体**

$$C = \frac{Q}{V}$$

(b) 双导体

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{Q}{U_{AB}}$$

或者

$$C=\frac{Q^2}{2W_e}$$

该式中的$W_e$表示两导体间所贮存之电场能量，$Q$表示导体上所带之电荷。

**二、部分电容电位系数和电容系数**

关于这些参数的计算公式可见附表一，这里仅将这些参考的定义写在下面。

现在我们把电容的概念推广到多导体系统。设共有$n$个导体，使导体1孤立，并把其余$n$-1个导体使用极细的导体联接起来。成为一个导体，并使之电位为零（或接地）。这样联接以后，$n$个导体变成了由两个导体组成的电容器，导体1作为电容器的一个极板，所有其余的导体作为另一个极板。根据电容之定义，导体1与所有其余导体之间有一定的电容，称之为导体1和其余导体之间的全电容用$C_{10}$表示。

当第一个导体孤立，其余$n$-1个导体联在一起组成电容器时，导体1上的总电荷必然等于其余导体上的总电荷，只是符号相反。假定这时导体1上的总电荷为$q_1$，其余各导体上的总电荷分别为$q_0$、$q_2$、$q_3$……$q_n$。（$q_0$为地或无限远零电位面上的电荷）则必有

$$q_0+q_2+q_3+\cdots\cdots+q_n=-q_1$$

由于除了导体$q_1$以外，所有其余导体都是用导线联在一起的，所有其余导体中任何一个导体与导体1之间的电压$V_{10}$都是相等的，$q_0$与$V_{10}$之比称为部分电容$C_{11}$，$q_2$与$V_{10}$之比称为导体1与2的部分电容，表示为$C_{12}$。同理，可以得出$C_{13}$，$C_{14}$……$C_{1n}$各部分电容，和

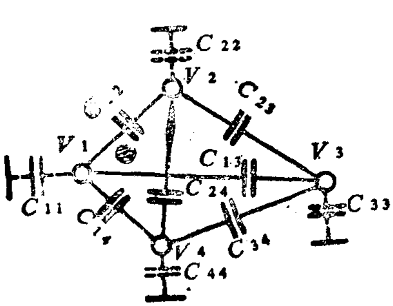

图1-3

任一导体$j$与另一导体 $K$ 的部分电容$C_{jk}$。这就是部分电容的概念。为了清楚起见，特用图 1-3 表示。

如果空间有$n$个相互绝缘的带电体，各导体所带的电荷分别为$q_1$、$q_2$……$q_n$，各导体的电位分别为$V_1$、$V_2$……$V_n$。这种情况下每个导体的电位与所有电荷成线性关系

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \alpha_{11}q_1+\alpha_{12}q_2+\cdots\cdots+\alpha_{1n}q_n\\
V_2 &= \alpha_{21}q_1+\alpha_{22}q_2+\cdots\cdots+\alpha_{2n}q_n\\
&\vdots\\
V_n &= \alpha_{n1}q_1+\alpha_{n2}q_2+\cdots\cdots+\alpha_{nn}q_n
\end{aligned}
$$

式中$\alpha_{mn}$称为电位系数。解以上方程得：

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}V_1+\beta_{12}V_2+\cdots\cdots+\beta_{1n}V_n\\
q_2 &= \beta_{21}V_1+\beta_{22}V_2+\cdots\cdots+\beta_{2n}V_n\\
&\vdots\\
q_n &= \beta_{n1}V_1+\beta_{n2}V_2+\cdots\cdots+\beta_{nn}V_n
\end{aligned}
$$

其中

$$\beta_{mn}=\frac{\Delta_{mn}}{\Delta}$$

而

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots\cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots\cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots\cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

$\Delta_{mn}$代表第$m$行第$n$列元素的子行列式。$\beta_{mn}$为电容系数。

各参数的计算公式及其特性见表一，表二给出了各种电容器的计算公式。

**表1　电位系数与电容系数**

<table>
<tr><td>孤立导体</td><td colspan="2">$V_1=\alpha_{11}O_1, Q_1=\frac{1}{\alpha_{11}}\beta V_1=\beta_{11}V_1$<br>$C=\beta_{11}=\frac{1}{\alpha_{11}}=C_{11}$<br>$W=\frac{1}{2}V_1Q_1=\frac{1}{2}\alpha_{11}Q_1^2=\frac{1}{2}\beta_{11}V_1^2$或　$W=\frac{1}{2C}Q_1^2=\frac{1}{2}CV_1^2$</td></tr>
<tr><td>双导体</td><td colspan="2">$V_1=\alpha_{11}Q_1+\alpha_{12}Q_{,2}$　　$V^2=\alpha_{21}Q_1+\alpha_{22}Q_2$<br>$Q_1=\beta_{11}V_1+\beta_{12}V_2$　　$Q_2=\beta_{21}V_1+\beta_{21}V_2$<br>$\beta_{11}=\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}$，　$\beta_{12}=\frac{-\beta_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}$，　$B_{22}\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha^2_{12}}$<br>$C=\frac{1}{\alpha_{11}-2\alpha_{12}+\alpha_{22}}$　或者　$C=\frac{\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2}{\beta_{11}+2\beta_{12}+\beta_{22}}$<br>$W=\frac{1}{2}\alpha_{11}Q_1^2+\alpha_{12}Q_1Q_2+\frac{1}{2}\alpha_{22}Q_2^2$<br>$F_r=-\frac{\partial W}{\partial r}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}\alpha_{11}Q_1^2+\alpha_{12}Q_1Q_2+\frac{1}{2}\alpha_{22}Q_2^2\right)$<br>$=-Q_1Q_2\frac{\partial}{\partial r}(\alpha_{12})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">导体系这些参数的几个特性</td><td colspan="2">一、$\alpha_{ik}=\alpha_{ki}$　成立的条件是电位参数点在无限远处<br>$\alpha_{kk}>\alpha_{ik}>0$<br>二、$\beta_{kk}>0$　　$k=1、2\cdots\cdots n$<br>三、$\beta_{ik}<0$　　$i\neq k$　$i、k=1、2\cdots\cdots n$<br>四、$C_{kk}=\sum_{i=1}^{n}\beta_{ki}$。$C_{kk}>0$。$C_{ik}=-\beta_{ik}$，$C_{ik}>0$</td></tr>
<tr><td>例如三导体</td><td>$C_{11}=\beta_{11}+\beta_{12}+\beta_{13}$，　$C_{22}=\beta_{12}+\beta_{22}+\beta_{23}$，<br>$C_{33}=\beta_{13}+\beta_{23}+\beta_{33}$，　$C_{12}=-\beta_{12}$，　$C_{13}=-\beta_{13}$，<br>$C_{23}=-\beta_{23}$<br>$\beta_{11}=C_{11}+C_{12}+C_{13}$，　$\beta_{22}=C_{12}+C_{22}+C_{23}$<br>$\beta_{33}=C_{13}+C_{12}+C_{13}$，　$\beta_{11}$　$\beta_{22}$　$\beta_{33}>0$<br>$\beta_{12}$　$\beta_{13}$　$\beta_{23}<0$</td></tr>
</table>