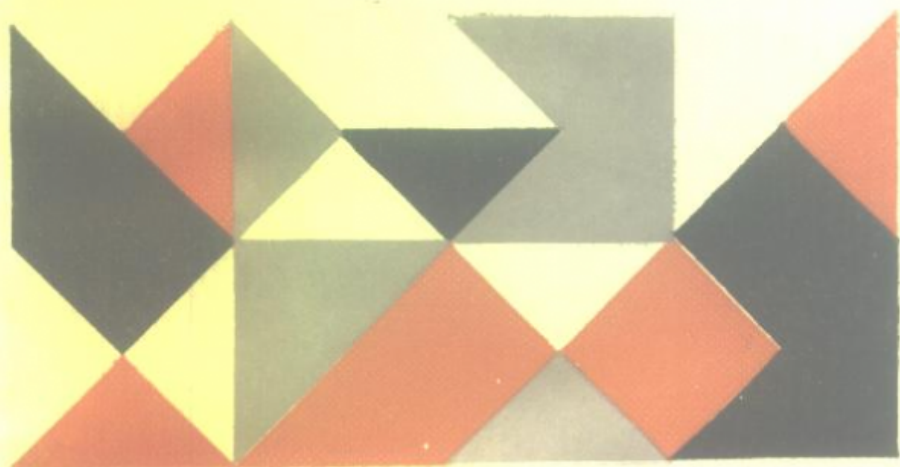
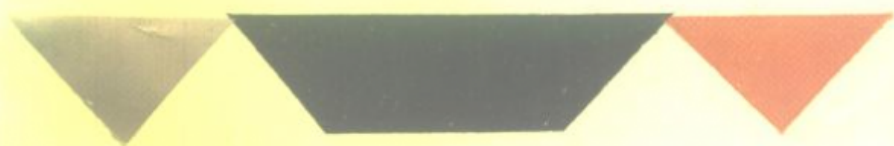


新学科知识小丛书



奇情妙趣的图

——图论拾趣



史明仁 张丽丽 编著
湖北人民出版社

新科学知识小丛书

奇情妙趣的图

——图论拾趣

史明仁 张丽丽 编著

湖北人民出版社

责任编辑：马 清

封面设计：李泽霖

奇情妙趣的图

——图论拾趣

史明仁 张丽丽 编著



湖北人民出版社出版、发行 新华书店湖北发行所经销

湖北人民出版社蒲圻印刷厂印刷

787×930毫米32开本 4,375印张 3插页 7.1万字

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数：1—1 810

ISBN 7—216—00401—9

C·36

定价：1.65元

编者絮语

本丛书集合科学各界力量，以编、撰、译诸形式推出一系列介绍本世纪以来国内外兴起的各门新学科知识的读本。

本丛书替求知者打开一扇扇明净之窗，使你扩展视野，汲取新知识，开启新观念，永远跟上时代的脉动，更让你体会新奇世界的美。

本丛书以中等文化层次的青年为主要读者对象，选题侧重于与之思想、学习、生活相关较切的社会科学、自然科学以及两者融汇而成的新学科。任何一人，都可从中找到关切的问题。

本丛书力图减少读者的经济负担并便于阅读，故以通俗的知识性小册子形式出版。一门学科一册，每册字数一般不出五万。一册在手，你无论怎样繁忙，都可于片暇间将它阅读完毕。

本丛书无意采用学术著作的沉闷结构和过多使用专业性的术语，而尽量做到行文流畅、通俗生动，既具知识性，又备趣味性，你能读懂，也能感兴趣。

本丛书介绍各个学科的起源、发展、现状、流

785/51
派及代表人物、研究对象、内容、方法等等。由于小的特点，它可有选择性地介绍尚未完全形成系统的新学科，以推动这些学科的进一步发展。

收藏这套丛书，若干年后你的书架将有光彩。
翻开这一页，你走向新天地。

湖北人民出版社

青年编辑室

1987.1.6.

前言

我

们曾经对那些智力游戏喜欢到着迷的程度：狼羊菜渡河、分油问题、一笔画、走迷宫……。绞尽脑汁的苦苦思索，终于找到思路时的恍然大悟，求出答案时的又惊又喜，我们在趣味与智慧的王国中漫游。也许正是这样的魔力诱使我们走进数学的迷宫。

当我们在学习一门新的数学分支学科——图论的时候，又重温了昔日的情趣：这门在自然科学、社会科学各领域中日益有着广泛应用的学科，它的许多课题与狼羊菜渡河、一笔画等等智力游戏有着同样的数学模型。感谢湖北人民出版社青年编辑室的同志，使我们能把图论中一些饶有趣味的问题，引人入胜的巧妙解法撰写成册，奉献给与我们有同样爱好的读者。希望读者能与我们共享在一番冥思苦想以后终于获得解答的由衷喜悦。“不动笔墨不读书”，倘若读者能实践这句格言，那么在读完这本小册子后定有所获。

笔者力图写得浅显易懂，寓科学性于趣味

性之中；企望能以勤补拙，不至于因为笔者的寡闻陋见、功力浅薄而使上述愿望成为奢望；并希冀广大读者与师长、同行的指正。

史明仁 张丽丽

1987年8月

目 录

[1] 什么是图

[13] 树——密码——街和
广场——连结问题和
贪心算法

[27] 迷宫——高斯八后问
题——先深搜索

[37] 狼羊菜渡河——分油
问题——最短路

[53] 七桥难题——握手定
理——一笔画

[73] 中国邮递员问题——
奇偶点图上作业法

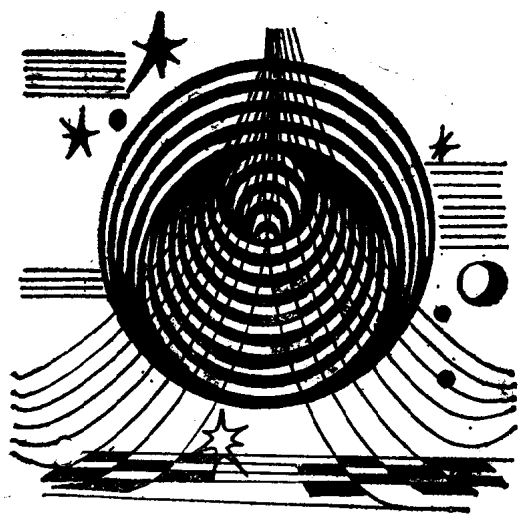
[81] 环球旅行——哈密尔
顿图——货郎担问题

[91] 工作分派问题——匹
配——婚姻定理

[111] 三家三井问题——平
面图——地图着色与
四色猜想

[125] 20世纪的图论——结
束语

什么是图





我

我们要介绍的“图”是什么呢？它既不是我们日常所见的形形色色的图——地图、机械零件图、建筑施工图；也不是几何中各种各样的图形。

在说明本书所介绍的图为何物时，鉴于“一切人类知识以直观始”。（康德）“一个好的实例胜于训诫。”（波利亚）还是让我们先看几个例子吧。

图的例子

例

1.1 初看小说《红楼梦》时，你一定会感到人物众多，头绪纷杂。但如果你把贾府中的人物（为简便起见，只考虑男人）画成这样一个图：以点代表人，在有父子关系的两人（两点）间连一条带箭头的线，从父亲指向儿子（如图 1—1 所示），这样，你对贾府中人物之间的血统关系就会一目了然。

例 1.2 假如我们仍以点代表人，但两点之间

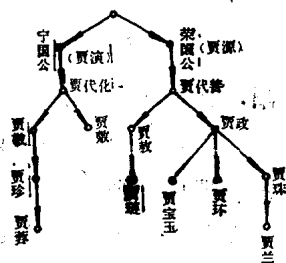


图 1—1

是否连线，视这两人是否有直系亲缘关系而定。由于直系亲缘关系是相互的，这里的线不带箭头。那么，贾政、王夫人、元春、贾宝玉、贾珠这五个人之间的关系可以用图 1—2 来表示。这个图有一个

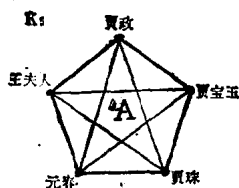


图 1—2

特点，任何两个点之间都有线相连。这是因为任何两人之间都有直系亲缘关系；或夫妻，或父子，或母女，或姐弟等等。

例1.3 假若你想作一次乘火车或轮船的旅游，从沈阳出发，去大连、天津、南京、上海、杭州、苏州、无锡等城市，再回到沈阳，则可以点表示你要去的城市，两城市间可以坐火车或轮船直达的，就连一条线（见图 1—3）。此时，你要设计一条每个城市都经过且只经过一次的旅游路线，就比较容易了。

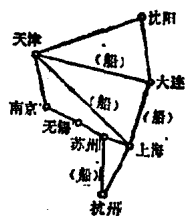


图 1—3

从图上可以看出，沈阳→天津→南京→无锡→苏州→杭州→上海→大连→沈阳，就是这样一条路线。

例1.4 有四位教师，四门课程。若教师甲能教物理课，则在代表教师甲与物理课的两点之间连一条线。图 1—4 就是这样得到的。如果要作一种工作分派，使每个教师各自教一门不同的课，有了

图 1—4 后，就容易看出：甲教物理、乙教政治、丙教数学、丁教化学，就是一种安排，图上用粗线表示。

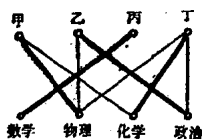


图 1—4

例 1.5 为表示一个化学分子的结构，我们可以用一个点代表一个原子，两个原子之间有几价化学键，就连结几条线。图 1—5 就是碳氢化合物苯的分子结构图。

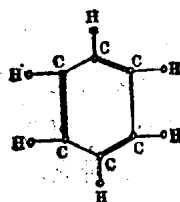


图 1—5

什么是图

从上面几个例子可看出，客观世界里的人、事物或现象，如果两两之间有某种联系，称为二元关系：如例 1.1 中的父子关系，例 1.2 中的直系亲缘关系，例 1.3 中两城市之间有无火车或轮船可直达的关系，例 1.4 中某教师能否教某课程的关系，例 1.5 中两原子之间的结构关系和有几价化学键的关系，等等，当我们要研究这种二元关系，从中找出规律时，可用点表示人、事物或现象，两点之间用线相连，表示它们之间存在我们所要研究的那种联系。这样就可以得到反映客观实际问题中

二元关系的一个数学模型——图。

简而言之，我们所说的图，就是由一组点和连线所构成的图形。这些点，我们称作图的顶点，而连线则称为边。带箭头的边特称为有向边。

用图来表示一些客观实际问题，会使问题变得简明、直观和形象化。“因为没有什么东西比图形更容易进入人们的思想”（这里，我们把笛卡尔的名言中“几何图形”四字“偷换”成“图形”了）。对图进行研究，等价于对某些实际问题（中的二元关系）的研究。上面我们举的几个例子，若不用图来表示，而改为文字叙述，那么，即便有纵横捭阖的口才，仍会令人如堕五里雾中。

要注意的是，我们讨论的图与几何图形的不同之处是：在几何图形中，点的相对位置与连线的长短曲直都是至关重要的。而图论所关心的只是一个图有多少个顶点，以及哪些顶点之间有边相连。至于顶点的位置分布和边的长短曲直，则无关紧要，可以任意描画。只要不改变两顶点间是否有边相连这一本质，我们认为这样任意描画的两个图是一样的（在图论中称这样两个图是同构的），因为这样不改变有关二元关系的性质。例如图 1—6 与图 1—3 的两个图，在图论中被认为是一样的。把两个图的顶点作如下对照：

A——沈阳，B——天津，C——大连，D——

南京, E——无锡, F——苏州, G——杭州, H——上海; 那么, 图 1—6 也表示这些城市两两之间有无火车或轮船可直达的关系。

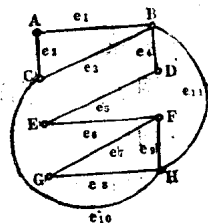


图 1—6

另外, 在几何图形中,

把边看作由许多点组成的;

而在图论中, 边的唯一作用只是把两个顶点连接起来, 因为它只表示两个顶点所代表的人、事物或现象之间存在某种联系。也正因为这样, 一个图中任何两条边, 我们认为它们只可能在顶点处相遇。在别的地方, 任何两条边看作立体交叉。画在平面上时, 那些在平面几何中的“交点”, 例如图 1—2 的 A, 不是图的顶点。

一些图的名称

前

面提到的几个图, 在图论中都是比较重要的。所有边都是有向边的图, 称为**有向图**, 例如图 1.1; 所有边都没有方向 (不带箭头) 的图, 称为**无向图**, 除图 1.1 外, 都是无向图。

另外, 图 1—1 又可叫作**有向树**, 把它所有边

的方向全去掉，得到的图叫**无向树**，简称为**树**。你看，它多象一棵倒放的树。

象图 1—2 那样，任何两个顶点之间都有边相连的无向图称为**完全图**，或形象化地称它为“家庭” (family)。 n 个顶点的完全图特记为 K_n 。图 1—2 是 K_5 ——有五个“成员”的“家庭”。而一般的非完全图，可以叫作一个“社会”(society)，它顶点之间的关系象社会那样形形色色。

两个顶点间最多只有一条边相连的无向图称为**简单图**。图 1—5 就不是简单图，它有三对顶点之间有两边。前面提到的无向图中，除它以外，都是简单图。

图 1—4 的顶点可以分为 X 与 Y 两部分，代表教师的四个点与代表课程的四个点，分属不同部分；同属于 X 或同属于 Y 的任两个顶点间(教师与教师、课程与课程之间)均无边相连。这种图叫**二部图**(或二分图、偶图)。

图论发展简况

图论的最早研究，可以追溯到瑞士数学家欧拉 (E·Euler) 在 1736 年发表的讨论当时普鲁士哥尼斯堡城的“七桥难题”的论文 (详见