高等学校适用教材

运筹学

主　编　孟丽莎
副主编　杜德光

兵器工业出版社

运筹学
兵器工业

高等学校适用教材

运 筹 学

主 编 孟丽莎
副主编 杜德光

兵器工业出版社

内容简介

本书针对高等专科教育要求基础课教学以必须够用为原则、专业课以应用为目的的特点，为满足高等专科学校经济管理类学生的教学、需要而组织编写的。其内容包括线性规划、整数规划、图与网络方法三大部分共七章，主要介绍基本原理和解题方法，并注意结合管理实践。书中除了有大量例题外，还有一定数量的习题，以供教学之用。

本书可作为高等专科学校经济管理类专业的教材或教学参考书，也可供厂矿企业、经济部门的管理人员和工程技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/孟丽莎主编. 一北京：兵器工业出版社，1996
ISBN 7-80038-987-1

Ⅰ. 运… Ⅱ. 孟… Ⅲ. 运筹学 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 02643 号

兵器工业出版社出版
（北京市海淀区车道沟 10 号）
各地新华书店经销
国营五三一印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/16 印张：8.5 字数：202.8 千字
1996 年 3 月第 1 版 1996 年 3 月第 1 次印刷
印数：1--3000 册 定价：12.00 元

前　　言

运筹学是在本世纪30年代以后发展起来的一门新兴的学科，是应用数学的一个分支。是应用分析、试验、量化的方法对经济管理系统中的人、财、物等资源进行统筹安排，对各种可供选择的方案进行比较评价，为决策者找出最优决策提供定量依据，以实现最有效的管理的一门边缘学科。因此，运筹学是实现管理现代化的有力工具。它的基本原理和方法在生产管理、系统工程、财政经济中都有广泛的应用。

应用运筹学去解决经济管理中的实际问题时，需要用系统的观点将实际问题抽象成数学模型或摸拟模型，再用各种数学方法及计算机对模型反复求解优化，使模型中的目标评价指标达到最大或最小、适中或满意等。因此用运筹学的方法去解决实际经济问题，除了要有工程数学知识以外，还要有较全面的经济管理知识。学生应在学完工程数学和基本的管理理论后，再学本书。

运筹学有许多分支，其中有些分支如网络计划、存贮论、决策论等将在管理专业课中讲到。本书结合专科教育特色仅选与经济管理专业有密切联系的主要分支，内容上力求深入浅出，方法上着重于思路和几何的直观解释，摒除了许多繁杂的数学论证，适用于高等专科学校经济管理类专业的学生学习，也可供厂矿企业、经济部门的管理人员和工程技术人员学习参考。

参加本书编写工作的有孟丽莎和杜德光两位同志，其中孟丽莎编写第一、二、三、四、五章，杜德光编写第六、七章，全书由孟丽莎同志担任主编，杜德光同志担任副主编，马文德副教授担任主审。由于我们的水平有限，本书难免会有缺点和错误，敬请读者批评指正。

本书在编写过程中参考和采纳了同类教材和有关论著的观点，在此一并表示深切的谢意。

编者

1995年11月

目　录

第一章　线性规划问题的数学模型

§1-1　线性规划问题的提出

线性规划是运筹学的一个重要分支。自1947年美国人但泽(G. B. Danlziag)提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是能用电子计算机来处理有成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，它适用领域更广泛;从解决技术中最优化，到工业、农业、商业、交通运输业、军事的计划和管理及决策到整个国民经济计划的最优方案的提出，它都有用武之地。它具有适应性强，应用面广，计算技术比较简便的特点，是现代管理科学的重要基础和手段之一。

线性规划研究的问题主要有两类:

1. 给出一定量的人力、物力、财力等资源，如何统筹规划这些有限资源完成最大任务;
2. 给定一项任务，如何运筹规划，合理安排，以最少资源来完成它。

线性规划要研究的两类问题中都有一个限制条件:第一类问题是给出一定量的人力、物力和财力等资源;第二类问题是给定一项任务。这种限制条件我们可以用一组线性方程组或线性不等式组来描述。限制条件所要达到的结果称“目标”，第一类问题的目标是利用有限资源完成最大任务，第二类问题的目标是以最少资源完成给定任务。我们可以用一个线性函数来描述这种目标，称这个线性函数为目标函数。

由此可见，各类问题尽管限制条件与目标不相同，但规划的目的就是使这些资源发挥最大限度的作用，从而完成最多最大的任务。换句话说，也就是资源的最优利用问题。用数学形式表示的话，规划的目的就是在给定的限制条件(或称约束条件)下，求目标函数的极值问题(包括极小值和极大值)。

下面用一例题来说明线性规划问题的特点。

例1　某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，这些产品分别需要在A、B、C、D四种不同的设备上加工。按工艺规定，产品Ⅰ和Ⅱ在各设备上所需要的加工台时数见表1-1，已知各设备在计划期内有效台时数分别是12，8，16和12。该工厂每生产一件产品Ⅰ可得利润2元，每生产一件产品Ⅱ可得利润3元。问应如何安排生产计划，才能得到利润最多?

表1-1

设备 / 产品	A	B	C	D	利润
Ⅰ	2	1	4	0	2元
Ⅱ	2	2	0	4	3元
有效台时	12	8	16	12	

解:该题的“限制条件”是设备台时，“目标”是所要确定的Ⅰ、Ⅱ产品产量应使利润达到最大。

设:x, x_2 分别表示在计划期内Ⅰ、Ⅱ产品产量。

因为设备 A 的有效台时是 12，这是一个限制产量的条件，所以在确定产品 Ⅰ 和 Ⅱ 产量时，要考虑不能超出设备 A 的有效台时数，即可用不等式表示为

$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$$

类似地，对设备 B、C、D 得到以下不等式

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$$

$$4x_1 \leqslant 16$$

$$4x_2 \leqslant 12$$

用 Z 表示利润，则目标函数

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

综合上述，该计划问题可归纳为：

目标函数：$\max Z = 2x_1 + 3x_2$

满足约束条件：

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

由上例可看出线性规划问题有如下特点：

1. 用一组未知数(x_1，x_2，……，x_n)表示某一方案，这组未知数的一组定值就代表一个具体方案，通常要求这些未知数取值是非负的。

2. 存在一定的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式来表达。

3. 有一个目标函数，按研究问题不同，要求其实现极大或极小。

一般来讲，这类问题可用数学语言描述如下：

目标函数 $$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n \tag{1.1}$$

满足约束条件：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \qquad (1.2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_n \\ x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \geqslant 0 \qquad (1.3) \end{cases}$$

这就是线性规划的数学模型。方程(1.1)称为目标函数；(1.2)与(1.3)称为约束条件，其中，式(1.3)也称为非负条件。

为了书写方便，上述模型可以简写为：

$$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i (i = ,\cdots\cdots m) \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots\cdots n) \end{cases}$$

§1-2 线性规划问题的数学模型

当我们用线性规划的方法对实际问题进行优化时，我们必须把这个实际问题用恰当的数学形式表达出来，这个表达的过程，就是建立数学模型的过程。数学模型的建立需要经验和技巧以及有关的专业知识，只有通过大量的实践在建立模型时才能得心应手。初学时可从题目中所给出的限制条件和目标入手，由限制条件建立起线性方程组，由目标得到目标函数。

下面，结合若干个实际问题讨论数学模型的建立。

一、运输问题的数学模型

问题的提出：某类产品有若干个生产地，已知每个生产地的产量；这类产品有若干个消费地，已知每个消费地的需要量。假设总的产量等于总的需要量。问题是如何编制一个最优的运输计划，使从产地到销地的运输费用最小。

例 2　某地区有三个矿山 A_1，A_2，A_3，生产同一种矿物。另外有四个这种矿物的消费地(铁厂)B_1，B_2，B_3，B_4。各矿山产量及铁厂的需要量和矿山将矿物运到铁厂的单位运价如表 1-2。

表 1-2

运价(元/t) 铁厂 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量(t)
A_1	1.5	2	0.3	3	100
A_2	7	0.8	1.4	2	80
A_3	1.2	0.3	2	2.5	50
需量(t)	50	70	80	30	

问应如何调运，才使总运费最省？

解：该题有两个限制条件：一个是产量，一个是需量。目标是总运费最省。

设：x_{ij}表示从第 i 个矿山运往第 j 个铁厂的矿物运量。这样得到以下两组线性方程组：

(1)各矿山矿物的生产量与运出量平衡方程

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=100 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=80 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 \end{cases}$$

(2)各铁厂矿物的供应量与需要量平衡方程

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=50 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=70 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=80 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 \end{cases}$$

(3)矿物的运输量应非负

$$x_{ij}\geqslant 0(i=1,2,3,j=1,2,3,4)$$

(4)目标函数

$$\min Z=1.5x_{11}+2x_{12}+0.3x_{13}+3x_{14}+7x_{21}+0.8x_{22}$$

$$+1.4x_{23}+2x_{24}+1.2x_{31}+0.3x_{32}+2x_{33}+2.5x_{34}$$

运输问题一般模型如下：

设某产品有 m 个生产地，其产量分别为 $a_i(i=1,2,\cdots\cdots,m)$。该产品有 n 个消费地，其需量分别为 $b_j(j=1,2,\cdots\cdots,n)$，并且产销平衡，即：

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$$

以 c_{ij}表示从第 i 个产地运单位产品到第 j 个消费地的运费。

其约束条件为：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i(i=1,,\cdots\cdots,m)\\ \sum_{j=1}^{m}x_{ij}=b_j(j=1,,\cdots\cdots,n)\\ x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

目标函数：
$$\min Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

二、资源最优利用的数学模型

问题的提出：一个国家一个地区如何在现有的资源条件下，使经济发展速度最快，或一个企业如何规划和调配有限的资源，以达到企业的生产目的，使企业取得最大利润，或使企业生产成本降低到最小。

例 3　某厂生产 A，B 两产品。生产 A 产品 1kg 需用煤 9t，劳动力 3 个，电力 4kW，生产 B 产品 1kg 需用煤 4t，劳动力 10 个，电力 5kW，并已知道生产 A 产品 1kg 价值 7 千元，B 产品 1kg12 千元。现在该工厂由于资源所限，只有煤 360t，电力 200kW，劳动力 300 个可以利用。问在这些现有资源条件下，应该生产 A 和 B 产品各多少才能使总价值最大。

表 1-3

产品 资源	A	B	现有资源数
煤/t	9	4	360
电力/kW	4	5	200
劳动力/个	3	10	300
利润(千元)	7	12	

解：设 A、B 两产品的计划产量为 x_1、x_2，则约束条件为：

$$\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant 360\\ 4x_1+5x_2\leqslant 200\\ 3x_1+10x_2\leqslant 300\\ x_1,\quad x_2\geqslant 0\end{cases}$$

目标函数：$\max Z=7x_1+12x_2$

资源最优利用的一般数学模型如下：

设企业有 m 种资源，已知每种资源的数量为 $b_i(i=1,2\cdots\cdots,m)$这个企业能够生产 n 种产品，已知生产每一种产品所消耗的各种资源的数量。以 a_{ij}表示第 j 种产品对第 i 种资源的

单耗，以 c_j 表示第 j 种产品的单价。问题是如何使企业在现有资源条件下创造产值最大。

数学模型：

(1)对各种资源的需要量不超过拥有量的平衡方程：

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots + a_{ij}x_j \leqslant b_i(i = 1,2,\cdots\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0(j = 1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

(2)目标函数

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

三、机床负荷问题的数学模型

例 4　设某车间需加工甲、乙两种另件。这两种另件可以在三种不同机床——铣床、六角车床、自动机床上进行加工。机床数及生产效率如表 1-4。

表 1-4

机　　床	台　　数	机床生产效率(件/日)	
		甲产品	乙产品
铣　　床	3	15	20
六 角 车 床	3	20	30
自 动 机 床	1	30	55

此表说明，在一台铣床上一个工作日可以加工 15 件甲零件或 20 件乙零件，余类同。该车间共有 3 台铣床，3 台六角车床，1 台自动机床。问如何合理安排机床的加工任务，使得在产品配套比例条件下(设甲、乙零件 1：1 配套)，使成套产品的数量达到最大。

解：设 x_{ij} 表示第 i 种机床用来生产第 j 种产品的台数，则数学模型为：

(1) 加工甲、乙产品机床台数平衡方程：

$$x_{11} + x_{12} = 3$$

$$x_{21} + x_{22} = 3$$

$$x_{21} + x_{32} = 1$$

(2) 甲、乙零件配套比例平衡方程：

$$15x_{11} + 20x_{21} + 30x_{31} = 20x_{12} + 30x_{22} + 55x_{32}$$

(3) 变量非负：

$$x_{ij} \geqslant 0(i = 1,2,3\ j = 1,2)$$

(4) 目标函数求成套产品数量最大：

$$\max Z = 15x_{11} + 20x_{21} + 30x_{31}$$

机床负荷分配问题的一般数学模型如下：

有 n 种产品需在 m 种机床上加工，每种机床的台数为 b_i 台，每种机床加工各种产品的生产效率为 a_{ij}。这 n 种产品要求有配套比例为 $P_1, P_2\cdots\cdots, P_n$。以 x_{ij}表示第 i 种机床用来生产第 j 种产品的台数，则数学模型为：

(1) 机床分配方程：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i(i = 1,2,\cdots\cdots, m)$$

(2) 产品配套要求：

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_{i1}}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_{i2}}{P_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_{in}}{P_n}$$

(3) 变量非负：$x_{ij} \geqslant 0(i = 1,2,\cdots\cdots, m.\ j = 1,2,\ \cdots\cdots,\ n)$

(4) 目标函数：

$$\max Z = \frac{\sum_{i=1}^{m} d_{ij}x_{ij}}{P_j}$$

例 5　设某车间用机床 A_1，A_2……，A_m 生产 B_1，B_2，……B_n 个零件，各零件配套比例为 P_1，P_2……，P_n。机床 A_i 生产零件 B_j 的效率(每日生产零件数)为 c_{ij}，问应如何分配机床负荷，才使成套零件数目达到最多。

解：设 x_{ij}为机床 A_i 生产零件 B_j 的时间(单位：日)，则数学模型为：

(1) 机床 A_i 生产各种零件时间总和应等于 1

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1(i = 1,2\cdots\cdots,\ m)$$

(2) 各零件配套要求：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} c_{i1}x_{i1}}{P_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}}{P_2} = \cdots\cdots = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}}{P_n}$$

(3) $x_{ij} \geqslant 0(i = 1,2,\cdots\cdots m,\ j = 1,2,\cdots\cdots n)$

(4) 目标函数：

$$\max Z = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}}{P_j}$$

四、人员分配的数学模型

问题的提出：在生产管理上，总希望把人员分配得最佳，以发挥其最大工作效率。

例 6　有四件工作，分配给四人，每人能力不同，工作效率也不同如表 1-5。规定每项工作由一个人担任和每个工人只分配一项工作。问应分配哪个人去完成哪项工作可使总的效率达到最大。

表 1-5

工作 / 工人	A	B	C	D
甲	6	2	3	1
乙	7	4	3	2
丙	8	10	7	3
丁	7	7	5	4

解：设 x_{ij}表示第 i 个工人分配担任第 j 项工作的情况，并 x_{ij}取 1 和 0 两个值，当 $x_{ij}=1$ 时，则表示第 i 个工人分配担任第 j 项工作；当 $x_{ij}=0$ 时，则表示第 i 个工人不担任第 j 项工作。

数学模型：

(1) 每个工人只担任一项工作

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \end{cases}$$

(2) 每项工作必由一个工人担任

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \end{cases}$$

(3) 变量取值：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} (i = 1,2,\cdots\cdots,m,\ j = 1,2,\cdots\cdots,\ n)$$

(4) 目标函数求总效率最大：

$$\begin{aligned} \max Z = {} & 6x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 7x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 8x_{31} \\ & + 10x_{32} + 7x_{33} + 3x_{34} + 7x_{41} + 7x_{42} + 5x_{43} + 4x_{44} \end{aligned}$$

五、合理配料问题的数学模型

例 7　某人由于健康的需要，每日需服 A、B 两种维生素，其中，A 维生素最少服 9 个单位，B 维生素最少服 19 个单位，现有六种营养物每克含 A、B 维生素的单位数和每克价格如表 1-6。问此人每天要服用这六种营养物各多少克，才既能获得每日最少所需维生素又使花费最省。

表 1-6

营养素 / 维生素	一克营养物所含维生素单位数						维生素最少需量
	(一)	(二)	(三)	(四)	(五)	(六)	
A	1	0	2	2	1	2	9
B	0	1	3	1	3	2	19
单位价格 (元/g)	3.5	3	6	5	2.7	2.2	

设：六种营养物分别各服用 $x_1 g$，$x_2 g$，$x_3 g$，$x_4 g$，$x_5 g$，$x_6 g$。则数学模型：

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geqslant 9 \\ 0x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geqslant 19 \\ x_1 \cdots\cdots x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min Z = 3.5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2.7x_5 + 2.2x_6$$

配料问题在工业中常用到。例如铸造车间对熔炼出来的铁水有一定的质量要求，也就是要求化学成分有一定含量的百分比。已知各种炉料所含有的各种化学成分的数量，以及各种炉料的最大利用量及单价。利用配料问题的数学模型就能制订出价格最低而又符合一定质量要求的铁水的配料方案。

六、合理下料问题的数学模型

合理下料问题是机械工业常遇到的问题。毛坯车间经常要在长度一定的条形材料或面积一定的板材上切割若干个具有一定形状、尺寸的毛坯。在一般情况下，材料不可能被完全利

用，会有边角余料，造成浪费。因此，如何最大限度地减少边角余料，提高材料利用率，使得切割规定数量的毛坯所用材料最少就是合理下料问题所要研究的。

例 8 某车间有一批长度为 180cm 的钢管(数量充分多)，为着制造零件的需要，要将其截成三种不同长度的管料:70cm、52cm、35cm。规定这三种管料的需要量分别不少于 100 根、150 根和 100 根。问题是应如何下料能使消耗的钢管数量最少?

为了完成规定的下料任务，有许多下料方法：

(1) 单一下料法:最简单。就是在每一根或每一张板材上只下一种规格的毛坯。其好处是可以按照一种固定不变的方式送料、下料，简单方便。但是由于材料规格尺寸与毛坯尺寸一般不成比例，所以采用单一下料法会产生很多甚至比较大的边角余料，因此材料利用率低。

(2) 简单套裁法:就是在一根或一张板材上先下尺寸规格大的零件，以剩下的边角余料下尺寸规格小的零件。该法的材料利用率虽然比单一下料法高一些，但往往由于事先对如何下料缺乏周密的考虑，所以材料利用率也不会太高。

一个高利用率的下料方案，必须是没有太多的边角余料，并且各种零件的生产数量都正好等于或略高于计划需要的数量。现在的问题是如何求得材料利用率最高的下料方案呢?

我们知道，下料方案是由一种或几种不同的下料方式配以一定的数量所组成。因此，我们只要求出材料的全部下料方式，就可找出下料问题的数学模型。

下面结合例题讲述

找出全部下料方式的思想:假设切口宽度为零，从一根材料上能不能下出若干个长度相同或不相同的零件，就完全取决于这些零件的总长度是否超过材料的长度，也就是说，如果从一根条材上下出若干个零件来。这些零件的总长度一定不超过条材的长度。有了这个简单的判断准则，我们就不难求出全部下料方式。

设在 180cm 长的钢管上能够下出 U 个 70cm 的零件，V 个 52cm 的零件和 W 个 35cm 的零件，则 U、V、W 个零件必须符合

$$70U + 52V + 35W \leqslant 180$$

上式左方是这些零件长度，右方是材料的长度。所以，要求出在 180cm 长的钢管上下出这三种零件的全部下料方式，就只要求适合 $U\geqslant0$、$V\geqslant0$、$W\geqslant0$ 的全部整数组〔U、V、W〕。

全部整数组，可以采用试算法得到。我们可以从最大尺寸的零件下起，也就是先看 U 最多能够达到多少? 显然 $U\leqslant2$，所以 U 可能取 2、1、0 三个数值。

当 $U=2$ 时，$140+52V+35W\leqslant180$

于是 $V=0, W=1$，余料为 5，得第一个下料方案：

U	V	W	余料(cm)
2	0	1	5

当 $U=1$ 时，$70+52V+35W\leqslant180$

于是 $V\leqslant2$，因此 V 可能取 2，1，0 三个数，这样可得三个下料方式：

U	V	W	余料(cm)
1	2	0	6
1	1	1	23
1	0	3	5

当 $U=0$ 时，$0+52V+35W\leqslant180$

于是 $V=3$，V 取 3，2，1，0 四个数，这样可得四个下料方式：

U	V	W	余料(cm)
0	3	0	24
0	2	2	6
0	1	3	23
0	0	5	5

经过这样试算，可得到八种下料方式，见表 1-7。

表 1-7 下斜方式

下料方式 / 零件尺寸	(一)	(二)	(三)	(四)	(五)	(六)	(七)	(八)	零件需要量
70	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35	1	0	1	3	0	2	3	5	100
余料	5	6	23	5	24	6	23	5	

现在的问题是：在这八种下料方式中找出用料最省的下料方案，从表中可见，一、二、四、六、八这五种下料方式余料最少，但单一采用任一种均不能保证零件的需要量，所以必须同时采用多种下料方式，才能满足零件的需要量，这里零件需要量是限制条件。

设：x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7，x_8 分别表示这八种下料方式钢管消耗的总根数，则数学模型。

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100 \\ 2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 \geqslant 150 \\ x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8 \geqslant 100 \\ x_1 \cdots\cdots x_8 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min Z = 5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8$$

以上我们建立了六个在经济领域中常见的实际问题的数学模型，还有一些类型，不再赘述。同学们根据实际问题的特点，灵活运用所学知识去建立它的数学模型。

第二章 线性规划问题解的性质

§2-1 两变量的线性规划问题的图解法

图解法就是利用坐标图去解线性规划模型的方法。该方法简单直观，有助于我们从几何图形上了解线性规划问题求解的基本原理。

现以第一章例1模型为例讲述。

例1
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

解：建立直角坐标系如图2-1，x_1 为横轴，x_2 为纵轴。在以 x_1、x_2 为坐标轴的直角坐标系中模型中的非负条件 $x_1 \geqslant 0$ 就代表包括 x_2 轴和它右侧的半个平面，非负条件 $x_2 \geqslant 0$ 代表包括 x_1 轴和它以上的半个平面。这两个条件同时存在就把 x_1 和 x_2 的解均限制在第Ⅰ象限了，所以我们寻找线性规划数学模型的解只在第Ⅰ象限进行即可。

同样道理，上例中的每一个约束条件都代表一个半平面。因为题目由六个不等式组成，所以满足全部约束条件的点集是这六个半平面的相交部分即公共区域 $0Q_1Q_2Q_3Q_4$，见图2-1中的阴影部分。

区域 $0Q_1Q_2Q_3Q_4$ 中的每一个点(包括边界点)都是这个线性规划问题的一个解(又称可行解)，因而区域 $0Q_1Q_2Q_3Q_4$ 是例1的解集合，(我们称它为可行域)。

现分析目标函数 $Z=2x_1+3x_2$。在坐标平面上，它可表示为以 Z 为参数的一族平行线

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{Z}{3}$$

位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值，因而称它为"等值线"。当 Z 值由小变大时，直线

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{Z}{3}$$

沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_2 点时 Z 的取值最大，这就得到了问题的最优解。见图2-2，Q_2 的坐标为(4, 2)，于是可计算出 $Z=14$。

这说明该工厂的最优生产计划方案是：在计划期内生产产品Ⅰ4件；产品Ⅱ2件；可得最大利润14元。

由上例，我们可得到图解法的一般做法：

(1) 建立直角坐标系

(2) 找出所有约束条件交成的公共区域即可行域。

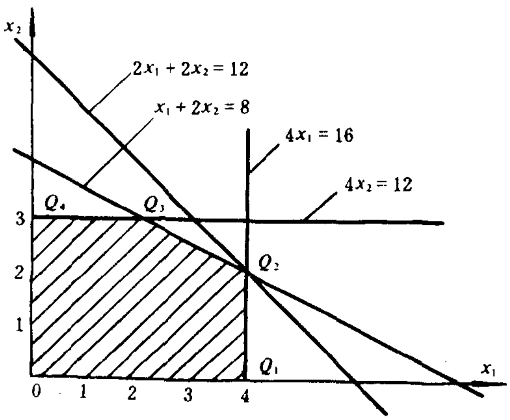

图 2-1

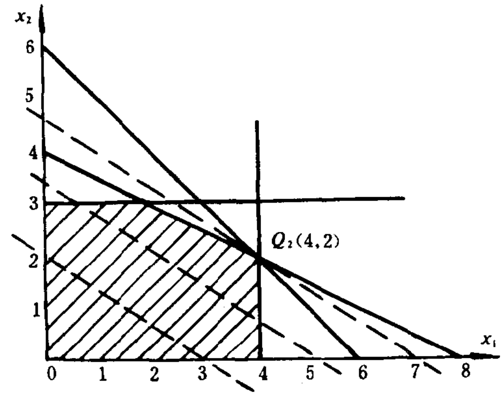

图 2-2

(3) 改变 Z 值，使等值线平行移动，当移动到某一点再移动就要离开可行域时，则该点使目标函数达到极值，该点坐标为最优解。

在上述例 1 中，若将目标函数变为

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2$$

则以 Z 为参数的等值线与约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的边界直线平行。当 Z 值由小变大时，等值线与线段 Q_2Q_3 重合(见图 2-3)，继续移动则得离开可行域，这表明线段 Q_2Q_3 上任意一点都使目标函数 Z 取得相同的最大值。于是，该线性规划问题有无限多个最优解。

例 2　求 x_1、x_2 的值，使它们满足模型：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min Z = 2x_1 + 2x_2$$

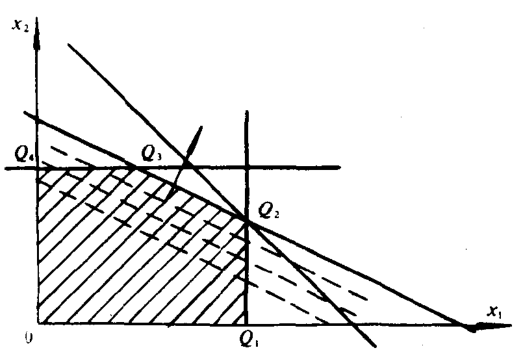

图 2-3

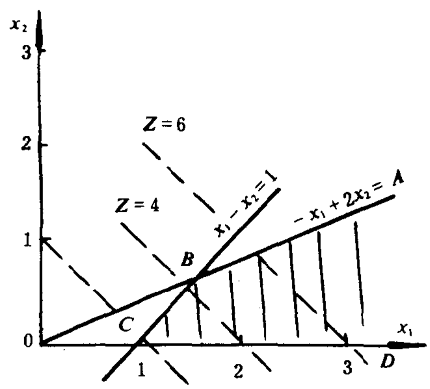

图 2-4