中学数学教材教法研究丛书

函数概念

余元希编著

上海教育出版社

2
463

51.62
7

中学数学教材教法研究丛书

函　数　概　念

余元希編著

上海教育出版社

EN84/27

中学数学教材教法研究丛书

函数概念

余元希編著

*

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

上海市书刊出版业营业許可証出090号

上海市印刷五厂印刷

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印張：4 1/2　字数：103,000

1961年12月第1版　1961年12月第1次印刷

印数 1—50,000 本

统一书号 7150·1256

定价 (6) 0.[illegible]元

出版者的話

“中学数学教材教法研究”这一套丛书，准备就中学数学課程中的某些专題，作比較深入的分析研究．我們企图通过这套丛书，能够广泛地交流各方面的經驗，帮助教师們用正确的观点来理解和处理教材，掌握为理解和处理教材所必需的专业知識，探討教学方法，从而有效地提高教学质量．

在編写这套丛书时，力图根据教学改革的精神，用辯証唯物主义的观点，根据理論联系实际的原则，来分析和研究教材，并結合当前中学教学实际，探討相应的教学方法．

这套教学参考书的編写方法，还是一种新的尝試．无論在知識內容的深度广度或者教学方法的探討等方面是否能适合广大教师們的需要，希望讀者对我們多多提供宝貴意見，以便作好这套书的出版工作．

这套丛书是由上海市数学会中学数学研究委員会协助我們組織部分有經驗教师編写的，謹表謝意．

編者的話

函数概念是全部数学中最重要的概念之一。对于函数作詳細的研究，高等数学里有着很完备的方法。数学分析这个数学的分支，就是以极限理論为工具、函数为主要研究对象建立起来的。

在中学数学課程中所涉及的函数知識，只是一些初步的知識；无論从所研究的函数的类型或者从所采用的方法来說都有着很大程度的局限性。但是，学习这些知識，却有着很重大的意义。这不仅是由于它們在解决实际問題中有广泛的应用；而且从教育学的观点来看，如果不首先让学生接触到这些知識，对函数有初步的了解，要对它們作更深入更一般的研究，将会遇到很大的困难。

正因为这样，教育革命中大家一致认为在中学数学課程中必須加强函数的教学。

本书是"中学数学教材教法研究丛书"中对函数这一专题进行分析研究的几本小册子中的第一本。在这本书里，准备专就"函数的概念"和"函数的初步研究（用初等方法来研究函数）"这两个方面有关的知識作比較詳細的介紹，同时也将对函数的一般教学法作簡单的探討。它是带有"通論"性质的一本书。中学数学課程中涉及的各种函数，如"有理函数与无理函数"，"指数函数与对数函数"，"三角函数与反三角函数"，将結合中学教材另作专門研究。

本书在編写过程中，赵型同志曾提供了資料，上海市数学会

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

中学数学研究委員会的一部分同志，帮助我研究了編写提綱，这里謹向他們表示謝意。

由于編者水平的限制，本书里存在缺点和錯誤是难免的。希望讀者不吝指正。

余 元 希

1961 年 10 月 1 日于华东师范大学

目　录

引　言

函数是数学中最重要的概念之一．在数学里专門研究函数的領域叫做数学分析，它是高等数学的一个重要組成部分，是研究現代科学技术必不可少的工具．

在中小学数学課程中所学习的內容，虽然主要是属于初等数学的范圍；但是，在这里已經孕伏着函数的观点，而且在一段相当长的时間里，已經在研究函数的初步理論，只是所应用的仅仅限于初等的方法．教育部在1956年編訂的“中学数学教学大綱(修訂草案)，1956—1957学年度”里就曾这样指出：

“在数学教学中，应当特别注意使学生自觉地掌握数学中的基本的概念、观念和方法，尤其是函数的概念和它的图象．关于函数的概念和它的图象应当在初中一年級到三年級学习数学的时候作好准备．在初中一年級学习算术以及二年級和三年級学习代数和几何的时候，都必須使学生注意一些量和另一些量之間的相依关系，并且熟悉最簡单的图表和图象的画法．”

根据这个大綱的规定，学生在中学阶段学习数学的时候，所接触到的函数的知識包括：函数的概念、函数的图象、一次函数、二次函数、最簡单的有理分函数(反比例关系)、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，以及有理整函数的若干性质等等．这里几乎包括了初等函数的全部主要內容．

即使如此，在教育革命中，人們仍然一致认为：对于函数知識学习得不够深透，是当前中学数学教学中存在的主要問題之一；为了提高中学数学教学的质量，必須进一步加强函数的教学．

加强函数的教学，要求我們更合理地选擇和組織教材的內容，并且相应地改进教学方法．为了帮助教师們解决这方面的問題，本书将就函数的概念以及应用初等方法来研究函数的有关知識，作比較詳細的闡述；同时也将对在中学里进行函数教学中需要注意的几个問題，作一般的探討．我們认为，教师在教学中首先就总的方面对函数的教材与教法作一般的研究，将会有助于把有关的知識系統地、有步驟地傳授給学生．

在沒有談到这些內容之前，这里，将先就“研究函数的实际意义”和“函数在中学数学課程中的地位和作用”这两个問題，提出一些看法．

1. 研究函数的实际意义

数学是研究現实世界的空間形式和量的关系的一門科学．数学，正象其他一切科学一样，它的产生和发展，归根到底决定于人类生产实踐的需要．

让我們簡单地回顾一下数学的发展史实①．

还是在最早的时代，人类把从生产实踐中积累的經驗，逐步抽象概括，形成了数和形的概念；他們也逐步掌握了解决生产实踐中各别問題的法則．当时的数学只是与实踐直接有关的、从經驗中提取出来的許多单个法則的总合；还沒有成为独立的、有系統的科学．这个时期，从最古的时代到公元前五世紀左右（相当于原始公社时代和奴隶制初期），通常叫做数学的萌芽时期．

奴隶社会的兴起，出現了一批不从事体力劳动而从事于研

① 关于数学的产生和发展的史实，可以参閱苏联 A. Д. 亚历山大洛夫等著“数学——它的內容、方法和意义——”一书的第一章，在这本书里有比較詳細的叙述．另外，也可以参閱数学通报 1960 年 2 月号所載关肇直先生在中国科学院数学研究所数理邏輯室举办的“数学基础讲座”上的报告——数学史的划期．

究一些自然現象的知識分子。他們整理了劳动人民从生产实踐中获得的知識，于是，产生了初步的天文学和数学。到了封建时代，国家更健全了，特别在东方，国家幅員广大，組織农业生产、畜牧生产等都需要了解季节气候，就得制定历法，这就需要数学，如算术、代数、几何、三角等方面的知識；又如兴建較大的建筑，需要力学，因而也需要数学。这样也就促进了数学的发展。

这一时期延續了将近二千年。在这漫长的岁月里，数学发展得很慢。在这时期里主要的成果——算术、初等代数、初等几何、三角的一些内容，也正是現在中学数学課程中的主要内容。这个时期通常把它叫做初等数学时期。

在初等数学时期里，人們把前一时期积累的零碎的、片断的知識加以整理，加以系統化，奠定了数学这門科学的基础。但是，当时人們的认識水平还很低，他們对周圍事物的认識还是不深刻的，还不善于从客观世界的变化中进行观察，为了掌握某种事物，只能暂时把它們看成是不变的。反映在数学上，人們所考虑的，只是不变的量和不变的图形。

到了十六世紀末叶，資本主义在欧洲开始兴起，伴随而来的还有地理上、天文上的偉大发現。对于运动的研究变成了自然科学的中心問題。实踐的需要和各門科学本身的发展使自然科学轉向研究运动、研究各种变化过程和各种变化着的量之間的相依关系。作为变化着的量的一般性质和它們之間相依关系的反映，在数学里就产生了变量和函数的概念。于是在数学里不再局限在考虑固定的量和固定的图形，而要考虑变化着的量和图形的变换；不只是孤立地研究某一个量，而要从各个量在运动中的依从关系中去研究它們。数学研究对象的根本扩展，嶄新的观点和方法的建立，标志着数学跨入了一个新的时期——变量数学（高等数学）的时期。

数学的这一发展，具有重大的意义。恩格斯在自然辯証法里就曾指出："笛卡儿的变数是数学中的轉折点。因此运动和辯証法便进入了数学，……"①

客观世界本来是在永恒地变化着的，事物之間本来是普遍联系、互相制約着的，因此对于現实世界的空間形式和量的关系，也只有从变化中，从变量之間的相依关系中去认識，才能够得到更深刻的了解，才能够更深入地掌握客观規律，从而也才能够完善地解决实际所提出的問題。研究函数的实际意义也正在于此。

这里，我們举几个簡单的例子。

例 1 伽利略（1564—1642）曾經确定了落体所通过的路程与时間的平方成比例地增长，发現了落体运动的規律。这个規律用公式来表示就是

$$s=\frac{1}{2}gt^2. \qquad (g\approx 9.80\text{米/秒}^2) \tag{1}$$

根据这个公式，我們可以算出落体在某一段时間里的平均速度。例如，落体在下落 1 秒到 2 秒这段时間里的平均速度是：

$$\because \quad \bar{v}_1=\frac{s_1-s_0}{t_1-t_0}=\frac{\frac{1}{2}gt_1^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t_1-t_0}=\frac{1}{2}g(t_1+t_0), \tag{2}$$

$$\therefore \quad \bar{v}_1=\frac{1}{2}g(2+1)=\frac{3}{2}g\approx 14.7\text{米/秒}.$$

同样地，可以計算出落体在下落 1 秒到 1.1 秒这段时間里的平均速度是：

$$\bar{v}_2=\frac{1}{2}g(1.1+1)=\frac{21}{20}g\approx 10.3\text{米/秒}.$$

---

① 恩格斯："自然辯証法"，人民出版社，1955 年版，第 217 頁。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在下落1秒到1.01秒这段时間里的平均速度是：

$$\bar{v}_3=\frac{1}{2}g(1.01+1)=\frac{201}{200}g\approx 9.85\text{ 米/秒}.$$

現在的問題是要計算物体在下落1秒这一时刻的瞬时速度。这时，由于 $t_1=t_0=1$，我們就不能够直接应用公式(2)。为了解决这个問題，就需要从变化中来考察。从上面已經算出的几个結果，可以看出落体的平均速度 $\bar{v}$，随着时間的間隔的变化而变化着。当时間的間隔取得越小，那末計算出来的平均速度也就越接近所要寻求的答案。(应用极限的知識，可以知道所求的瞬时速度就是9.80米/秒。)

例2 应用初等几何学的知識，容易計算出某些簡单的平面图形如三角形、矩形、圓等的面积。但是，在实际中所遇到的图形却不只是这一些。图1是一个很簡单的图形，它是由抛物綫 $y=x^2$、x 軸和直綫 $x=1$ 所圍成的曲边三角形。現在的問題是：怎样求出它的面积？

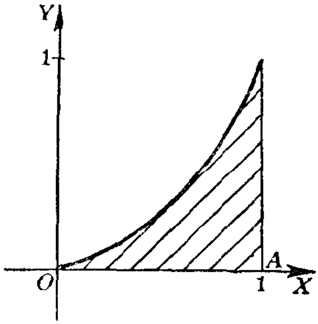

图 1

解决这个問題，也同样地需要从量的变化、量的相互关联中进行考察。

象图2里所表示的那样，把 OA 这条单位綫段2等分、4等分、8等分、16等分……，在曲边三角形的内部作出由若干个矩形构成的阶梯形。可以看出，分点越多，阶梯形的面积就越来越接近曲边三角形的面积，而这些阶梯形的面积是容易求出的。这样就启发了我們，所求曲边三角形的面积可以用阶梯形的面积来近似地表示。

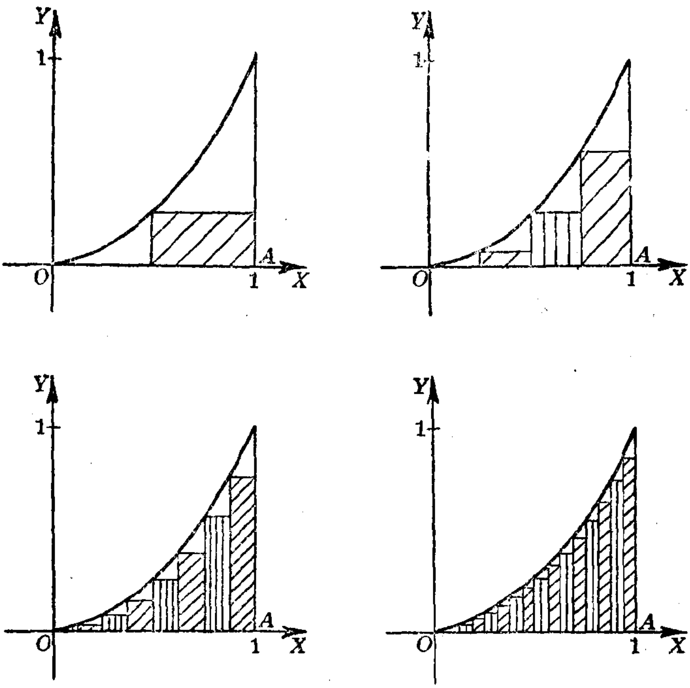

图 2

如果把 OA 分成 n 等分，那末每一小段的长是 $\frac{1}{n}$，在每一小段上所作的矩形，它們的左上角都在拋物線上，它們的高分別是：

$$0,\quad \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots\cdots\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

这时阶梯形的面积是：

$$S_n = 0 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}①$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$=\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right).$$

当n相当大的时候，$\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}$接近于零，这时阶梯形的面积接近于$\frac{1}{3}$个平方单位．它近似地表示了曲边三角形的面积．应用极限的知識，可以知道

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

这正是我們所寻求的答案．

---

① 这里，应用了自然数列前$n-1$项的平方和公式：

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}.$$

这个公式可以这样导出：

在恒等式 $$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

里，依次地使$k=1,2,\cdots\cdots,n-2,n-1$，得

$$2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1;$$
$$3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3\cdot(n-2)^2+3\cdot(n-2)+1;$$
$$n^3-(n-1)^3=3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1.$$

把这些等式的左右两端分别相加，得

$$n^3-1=3[1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2]+3[1+2+\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)]+(n-1)$$

$$=3[1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2]+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+(n-1).$$

$$\therefore\quad 1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{3}\left[n^3-1-3\cdot\frac{n(n-1)}{2}-n+1\right]$$

$$=\frac{n(2n^2-3n+1)}{6}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

2. 函数在中学数学課程中的地位和作用

从上面所举的两个例子可以看出，解决这类問題，仅仅依靠初等数学的知識是不够的．正是由于大量类似的問題需要解决，产生了高等数学．

虽然如此，我們也不能抹煞了初等数学的作用．初等数学不仅在許多場合下有着广泛的应用，即使在解决上面这类問題中，也是必要的基础．事实上，沒有初等数学的知識，学习高等数学也是不可能的．

把函数的初步知識，作为中学数学課程中的一个主要組成部分，不仅是由于掌握这些知識，可以解决大量的实际問題；同时也正是为进一步研究函数作准备．特别是从教育学的观点来看，学生如果不先具有了函数的初步概念，掌握了研究函数的初等方法，直接去接受高等数学里的那些知識，将会遇到不易克服的困难．

在中学数学課程中学习函数，它的作用还不仅如此．即使是那些属于初等数学范圍內的知識，由于引进了变量和函数这两个概念，也可以用較高的观点来理解它們．例如，在初等代数学里的代数式的恒等变形的理論，方程的理論等等知識，都可以很自然地与函数联系起来，从而使我們更深入地理解它們的实质．又如，初等几何学里的圓的周长与面积等概念和計算公式，也都是需要借助于函数(这里还用到了极限的知識)的知識才能够闡述清楚的．当然，这也不是說必須先学习了函数才能学习这些知識；但是，在讲述这些內容时，却有必要应用到函数的观点．

最后，在中学数学課程中学习函数的初步知識，以及运用函数的观点来处理其他有关的內容，还有重要的教育作用．引进

变量和函数等概念，可以使我們考察問题的时候，不局限在静止的、不变的、孤立的情况；而必須从变化过程中，相互联系、相互制約的情况中去考察。正确地掌握这一特点，也就有可能在教学中更好地培养学生辯証唯物主义的观点。而这也正是数学教学中应該重視的一个主要任务。

一 函数的概念

研究函数，首先就需要对这个概念有正确的理解．这一部分里，我們将通过对一些具体例子的分析，闡述函数这一概念的形成过程．在这基础上給出函数的一般定义和函数关系的表示法．最后，还将引进隐函数与反函数的概念．

1. 量

数学是研究現实世界中量的关系和空間形式的科学．“量”是数学中一个重要的基本概念．这一节里，我們将首先对数学里研究的量所具有的特征作一些考察．

1．量和数 在日常生活中、生产实践中、自然現象的观察中、以及科学技术的研究中，我們經常要接触到各种各样的量．这里举几个簡单的例子．

例 1 解放后十年我国鋼的年产量列成下表：

年度	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
鋼产量(万吨)	15.8	60.6	89.6	134.9	177.4	222.5	285.3	446.5	535	1108

这里“年度”、“鋼产量”是两种量．

例 2 用气温自动記录計可以記录一天里气温变化的情况．例如，某日的气温記录如图 3 所示．

这里“温度 (C)”和“时間 (t)”是两种量．

例 3 伽利略曾經确定了落体所通过的路程与时間的平方

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com