计算结构动力学

张汝清　殷学纲　董　明　编著

jisuanjiegoudonglixue

重庆大学出版社

計算結构动力学

张汝清　殷学纲　董　明　编著

重庆大学出版社

计算结构动力学

张汝清　殷学纲　董　明　编著

责任编辑　朱庆祥　周　任

•

重庆大学出版社出版
新华书店重庆发行所发行
中国人民解放軍重庆通信学院印刷厂印刷

•

开本：　787×1092　1/32　印张：9.5　字数：213千

1987年7月第一版　　1987年7月第一次印刷

印数：1—4,000

标准书号：ISBN 7-5624-0020-2 / O·6　　统一书号：13408·8

定　价：1.55元

内 容 简 介

本书以结构动力分析和计算为基本内容，论述了离散化原理分析结构动力特性和响应的一般性原理和方法。书中不仅对许多工程应用和计算机程序中常用的方法，作了较全面介绍，而且，还加入了最近发展起来的一些新理论和方法，为读者提供更多更丰富的内容。

全书共六章，前四章的主要内容是结构动力分析中的各种变分原理以及离散化结构动力方程的建立，结构动态特性的基本算法，离散化结构动力方程的解法和结构动力分析中的子结构方法。这四章是一般性原理和方法的叙述，同时，也包括作者在这方面的一些工作。后面两章，主要是介绍新近发展起来的动态有限元法，组合结构动力分析中的加权残值法等新内容，也介绍了作者最近的研究工作和取得的成果。

本书可作为高等工科院校有关专业本科生和研究生教材，可供从事结构动力分析、研究、计算的广大教师、工程技术人员参考，也可供从事结构设计的工作者参考。

前　言

当前，结构动力学在迅速发展中，人们对结构的动态特性日益重视，分析结构对于动态载荷的响应变得越来越重要。加上现代的计算机以及先进的计算方法和软件技术，使得各种复杂结构的动态分析、计算成为可能。于是，就不断地发展形成了计算结构动力学这门新的学科分支，并在现代化设计中活跃着，具有强大的生命力。然而，在国内外尚缺少这方面的专著，以适应广大读者的需要。

本书以结构动力分析和计算为基本内容，论述了离散化原理分析结构动力特性和响应的一般性原理和方法，并从多方面深入地阐述各种方法的原理及实施。书中不仅对许多工程应用和计算机程序中常用的方法，作了较全面的介绍，而且，还加入了最近发展起来的一些新的理论和方法，为读者提供更多更丰富的内容。

全书共六章，前四章的主要内容是根据作者在1985年6月由《应用数学和力学》杂志编委会举办的应用数学和力学讲座第41期上讲学所用的讲义，经过全面修改、增删而成。这四章是一般性的原理和方法的叙述，同时，也包括作者在这方面的一些工作。后面两章，主要是介绍新近发展起来的动态有限元法、组合结构动力分析中的加权残值法等新内容，也介绍了作者在最近所作的研究工作和取得的成果。

在第一章中，主要介绍结构动力分析中的各种变分原理以及离散化结构动力方程的建立。其中，包括瞬时最小势能原理，Hamilton变分原理、Benthien-Gurtin 最小转换能

量原理以及Gurtin变分原理的离散化方法和方程的建立。

第二章介绍结构动态特性的基本算法。主要介绍常用的一些算法，包括矢量迭代法、广义雅可比法、子空间迭代法、行列式搜索法、Lanczos法等，以及与此相应的许多求解特征值的技术。

第三章是离散化结构动力方程的解法。主要从模态迭加法，假设模态法和直接积分法几个方面进行讨论。对直接积分法，从方程的推导、稳定性和精度的分析都作了较详细的介绍。

第四章是动力分析中的子结构方法。本书在介绍固定界面模态综合法和自由界面模态综合法的基础上，还介绍了静力变换、动力变换、混合界面法、无界面法以及子结构界面位移综合法。

第五章是组合结构动力分析中的加权残值法。以样条加权残值法导出了第Ⅰ类条件稳定的和第Ⅱ类无条件稳定的积分公式。对于组合结构动力问题，提出了几种假设模态变换矩阵，先进行降阶，再用加权残值法求解的方法。

第六章是结构分析的动态有限元法。它是求解动力问题的一种新的有限元法，是由构造含有参变量的动态形函数，来提高计算精度。本章介绍其原理以及作者在这方面的工作。

本书可作为高等工科院校有关专业本科生和研究生教材或参考书，从事结构动力分析、研究、计算的广大教师、工程技术人员参考，也可作为从事结构设计的工作者参考。

本书中反映的一些研究成果，是作者得到国家自然科学基金资助研究课题得来的，因此，国家自然科学基金对研究课题的资助，促使本书的内容更加丰富、充实和提高。但由

于作者的学术水平有限，存在着不足之处，敬请读者批评和指正。

在编著过程中，董明同志对本书的原稿第一、二和四章作了修改和增删工作，殷学纲同志参加了本书第五和第六章的编写工作。

张汝清

1986年10月

目 录

第一章 能量变分原理及离散体的动力方程……………（ 1 ）
§1.1 绪言……………………………………………（ 1 ）
§1.2 动力分析中的离散方法概述…………………（ 3 ）
§1.3 瞬时最小势能原理及离散体动力方程…（ 10 ）
§1.4 Hamilton 变分原理及离散体的动力方程……………………………………………（ 13 ）
§1.5 Benthien-Gurtin最小转换能量原理……………………………………………（ 19 ）
§1.6 Gurtin 变分原理及离散体的动力方程……………………………………………（ 22 ）
§1.7 质量矩阵……………………………………（ 32 ）
§1.8 阻尼矩阵……………………………………（ 35 ）
结束语…………………………………………………（ 38 ）
参考文献………………………………………………（ 39 ）
第二章 结构动力特性的基本算法……………………（ 41 ）
§2.1 绪言……………………………………………（ 41 ）
§2.2 特征值问题的数学性质…………………………（ 42 ）
§2.3 特征值问题的几种变换…………………………（ 48 ）
§2.4 特征值问题的解法………………………………（ 51 ）
§2.5 多项式迭代方法…………………………………（ 54 ）
§2.6 Sturm 序列二分法…………………………………（ 57 ）

§2.7 矢量迭代法……（60）
§2.8 矩阵变换方法……（67）
§2.9 Rayleigh-Ritz分析……（82）
§2.10 子空间迭代法……（84）
§2.11 行列式搜索法……（106）
§2.12 Lanczos 法……（109）
结束语……（114）
参考文献……（115）
第三章 离散化结构动力方程的解法……（116）
§3.1 绪言……（116）
§3.2 模态（振型）迭加法……（117）
§3.3 假设模态法……（123）
§3.4 中心差分法……（125）
§3.5 线性加速度法和 Wilson-θ 法……（128）
§3.6 Newmark 方法……（133）
§3.7 Houbolt方法……（136）
§3.8 直接积分法的稳定性和精度分析……（139）
结束语……（149）
参考文献……（150）
第四章 结构动力分析中的子结构法……（151）
§4.1 绪言……（151）
§4.2 子结构模态综合法的基本原理……（152）
§4.3 分支模态的各种形式……（158）
§4.4 固定界面子结构模态综合法……（167）
§4.5 自由界面子结构模态综合法……（179）
§4.6 混合界面子结构模态综合法……（192）
§4.7 无界面子结构模态综合法……（196）

§4.8 子结构界面位移综合法…………………… (207)
结束语……………………………………………… (215)
参考文献…………………………………………… (216)
第五章 组合结构动力分析中的加权残值法………… (219)
§5.1 绪言……………………………………… (219)
§5.2 样条加权残值法导出的第Ⅰ类直接积分
公式……………………………………… (221)
§5.3 样条加权残值法导出的第Ⅱ类直接积分
公式……………………………………… (234)
§5.4 子结构位移综合加权残值法……………… (240)
§5.5 子结构模态综合加权残值法……………… (243)
§5.6 Lanczos 假设模态加权残值法………… (245)
§5.7 Ritz 假设模态加权残值法……………… (250)
结束语……………………………………………… (252)
参考文献…………………………………………… (253)
第六章 动态有限单元法………………………… (255)
§6.1 绪言……………………………………… (255)
§6.2 动态形函数矩阵………………………… (259)
§6.3 结构动态特性的计算…………………… (264)
§6.4 结构动态位移与动态应力的计算………… (269)
§6.5 结构的高阶动态特性与冲击响应的计
算……………………………………… (279)
结束语……………………………………………… (290)
参考文献…………………………………………… (290)

第一章　能量变分原理及离散体的动力方程

§1.1　绪　　言

工程中的各种实际结构常常受到随时间变化的载荷作用。比如，高层建筑受到地震的作用，海洋平台受海浪的冲击，桥梁受车辆的振动等等。因而，结构的动力分析在工程中占有十分重要的地位，确是不可缺少的一环。它不仅能为新结构的设计提供科学数据，而且，还可判断原结构的设计是否合理。

由于结构动力分析的重要性，它很早就受到人们的重视，很多人从事这方面的研究工作。他们从简单的结构到复杂的结构，从单自由度系统到多自由度系统，直到无穷多自由度的弹性体的动力分析。弹性体的运动微分方程，是结构动力分析中一般的方程形式。如按位移求解，弹性力学中弹性体的运动微分方程可以写为

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial x}+\nabla^2 u\right)+X-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial y}+\nabla^2 v\right)+Y-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z}+\nabla^2 w\right)+Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0
\end{aligned}\qquad(1.1)$$

其中，$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$

记号∇^2称为拉普拉斯算子。

如果再加上初始条件和边界条件，式(1.1)就是体系的位移分量应满足的关系式。在结构动力分析中，人们最关心的就是怎样从式(1.1)中求解出各位移分量的表达式。

但是，对于上述的偏微分方程组，要求解出各位移分量的解析解，是非常困难的。特别是对于复杂的边界条件，几乎是不可能的。真正能通过式(1.1)求解的问题只是极少数，如有限个质点的振动、弦的振动、杆、梁的振动等。因此，为了满足工程界对结构动力分析日益增长的需要，人们提出了各种近似方法，从各种途径对动力问题进行简化，如从模型上对结构进行简化，或从微分方程本身作简化。然而，成功的最有效的近似方法，还是通过能量变分原理来实现的。

与此同时，由于电子计算机的出现和迅速发展，则为结构的动力分析提供了有效的解决手段，出现了许多与计算机相结合而又十分有效的求解方法，这就使得结构动力分析这个领域蓬勃地发展起来，形成了计算结构动力学这门新的学科分支。

当前，结构动力分析问题，在国内外已有很多的研究成果，而且，在某些生产部门，如航天、航空、海洋、船舶、机械等许多工程部门获得了实际应用。已有不少的大型的结构分析程序系统具有较强的动力分析的能力。如SAP、ADINA、NASTRAN等结构分析程序系统都具有振型、频率和瞬态响应、谱分析等求解的功能。

计算结构动力学的内容，涉及变分原理，结构的离散化和求解方法，以及计算机软件的实施。在求解方法方面，现在已经发展起来，并得到广泛应用的有直接积分法，模态迭

加法，子结构模态综合法和加权残值法等。

§1.2 动力分析中的离散方法概述

动力问题与静力问题的主要差别，在于出现了时间变量，因而增加了分析问题的难度，并出现了静力问题中所没有的特殊问题，如特征值分析，阻尼计算等等。空间区域的离散，与静力问题几乎没有多大差别，但是，对时间域的离散，则是动力分析中所面临的一个新问题。

求解连续体结构动力问题的近似方法，大体上可以分为四类，即直接法、差分法、加权残值法和变分法。其离散化的形式，可以是先空间离散，后时间离散，或时间空间同时离散。这些方法的共同之处，都是将无限自由度体系缩减为有限自由度体系，将偏微分方程组的求解转化为代数方程组的求解，或者是先将偏微分方程组化为近似的常微分方程组再化为代数方程组，最终是要适应数值求解技术。显然，这些方法各有其特点，处理方法也不尽相同，但它们之间还是有一定联系的。下面就分别介绍这四种方法。

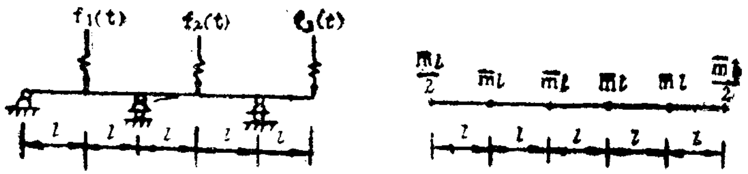
（一） 直接法

这是一种物理近似，是一种古典的近似方法，只对结构空间进行离散。主要用于杆系结构。因为对杆系结构的位移函数可以不用任何近似插值而直接写出，这样用有限个自由度，即结点自由度的位移，就能准确地描述出全部无限自由度的位移，于是，不需要作近似的处理，就能建立其离散化结构的弹性特性矩阵——刚度阵。但是，对于无限个质点

的质量所引起的惯性力，要离散化为有限个自由度的惯性力，却必须采用近似的方法。通常是采用集中质量法。即用若干离散结点上的集中质量来代替原体系的连续分布质量。例如，对一个连续梁的横向振动，如图(1.1，a)。若原梁的质量为均布的，将连续梁用6个离散质点来描述，每两个结点间的质量均分布在两个结点上，得到如图(1.1，b)所示的离散集中质量。这实际上变为一个多自由度的振动问题。于是，动力方程可直接写出为

$$[M]\{\ddot{y}\}+[K]\{y\}=\{F(t)\} \qquad (1.2)$$

其中，$[M]$为对角质量阵，$[K]$为刚度阵，可用静力直接刚度法获得，$\{F\}$为外载荷，$\{y\}$为结点处的横向位移。未计及阻尼的影响，若要考虑阻尼，可用类似于质量的处理方法加入。



(a　　　　　　　　(b)

图 (1.1)　连續梁的横向振动

从上面的离散过程，可以看出，全部质量都集中到各结点上，而杆系结构的离散化刚度阵能够直接得出，所以，整个动力方程都能直接通过对质量的近似离散化处理得到。显然，直接法是对结构的质量作空间离散，而对时间未作离散处理，导出一个对时间的线性常微分方程组。

（二）　差分法

它与直接离散法不同，差分法是一种数学上的离散近似方法，是将微分化为差分的方法，然后直接对运动微分方程进行处理，得到有限自由度的线性代数方程组或常微分方程组。

显然，差分法的离散形式，也可分为空间离散、时间离散和时间空间同时离散。空间差分离散要求对结构体作有规则的网格划分，其网格结点处的自由度就是缩减后的广义自由度。在结构分析中，对弹性薄板弯曲问题，常采用差分格式，因为薄板的边界通常是比较规则的。此外，在流体力学中，用差分计算流体的运动也是使用得较多的方法。

由于差分法要求有规则的划分网格，而许多结构体常常又是不规则的，不易找到一种合适的网格划分去满足不规则的边界。所以，差分法的应用还是有一定的局限性。然而，当弹性体已在空间离散为有限自由度，不论采用何种方法，得到有限个自由度的运动常微分方程组后，采用差分法对时间域作离散则是很方便的。因为对时间度量来说，它是一种非常规则的半射线，在时间域内采用差分法、初始条件较易满足。在后面第三章将讨论的中央差分法就是一个例子。

下面以弦振动方程的差分离散为例，推导出离散化动力方程。设有一均质弦，如图(1.2)，其振动方程为

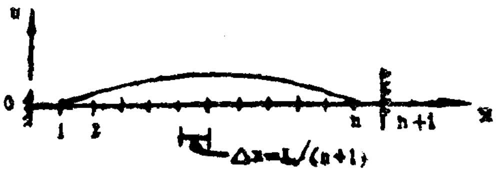


图 (1.2) 弦的横向振动

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad 0 \leqslant x \leqslant L \qquad (1.3)$$

其中，ρ 和 T 均为常数。

用空间差分，将长度L作 $n+1$等分，即 $\Delta x = \frac{L}{n+1}$，由

中央差分格式，有

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}=\frac{u_{j+1}-2u_j-u_{j-1}}{\Delta x^2} \tag{1.4}$$

于是，方程(1.3)就化为在n个内结点上的离散化线性常微分方程组，即

$$\rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+T\frac{2u_j-u_{j+1}-u_{j-1}}{\Delta x^2}=f(x_j,\ t) \tag{1.5}$$

$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

或写成

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_n \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{T}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix}$$

令

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{pmatrix}=[M],\quad \frac{T}{2\Delta x}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$= [K]$，

$\{u\} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T$，则有

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \tag{1.6}$$

这就是一个典型的离散化运动常微分方程组。若对上式再采用时间差分，就得到一个线性代数方程组。这个问题留在第三章中讨论。

（三） 加权残值法

这也是一种数学上的离散化近似，它可以直接从微分方程式中求得近似解。

加权残值法的离散化形式，也可分为空间离散、时间离散和时间空间同时离散。为了进一步说明，设有一动力问题，其定解微分方程式为

$$L(\phi) - f = 0 \tag{1.7}$$

式中ϕ为待定函数，L是包含空间和时间的微分算子，f是不含ϕ的已知函数。由于真正的解尚未知道，可设一个近似函数，称为试函数$\overline{\phi}$来代替，即

$$\phi(x,y,z,t) = \overline{\phi}(x,y,z,t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i N_i(x,y,z,t) \tag{1.8a}$$

如只作空间离散，则

$$\overline{\phi}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) N_i(x,y,z) \tag{1.8b}$$

式中N_i为满足一定边界条件和初值条件的已知试函数，C_i为待定的系数或函数。将$\overline{\phi}$代入式(1.7)，一般不会满足，出现残差或残值${}^{n}R$，即

$$^{n}R = L(\overline{\phi}) - f \neq 0 \tag{1.9}$$