正交试验设计法

上海科学技术出版社

2008/03

正 交 试 验 设 计 法

本 书 编 写 组

（原上海人民版）

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷六厂印刷

开本850×1156　1/32　印张7.5　字数193,000
1979年3月新1版　1979年3月第1次印刷

印数 1—30,000

书　号：13119·765　定　价：0.58元

编 者 的 话

在生产斗争和科学实验中，为了提高产品的质量和数量，经常会遇到多因子试验问题．正交试验设计法就是利用正交表来安排多因子试验，利用统计数学原理来进行数据分析的一种数学方法。通过实践证明：正交试验设计法对于因子多、周期长、有误差的一类试验问题，是一种简单易行，行之有效的方法．目前已经在农业、冶金、化工、纺织、医药等方面得到了广泛的应用，收到了较好的效果．

参加本书编写工作的有上海农药厂、上海第三制药厂、上海橡胶制品研究所、上海钢铁研究所、上海师范学院、上海师范大学等单位．本书专门为工厂和科研单位中从事科学实验的同志编写的，力求通俗易懂，讲清道理和便于实践．

本书共八章，前三章通过生产中的实际问题，介绍正交试验设计法的基本思想，运用范围和使用方法；第四、五两章阐述正交试验设计法的数学原理；第六章介绍不同水平的全因子试验；第七章扼要介绍正交表的构造原理和方法；最后一章介绍两个应用实例．本书还选择了一部分常用正交表和 F 分布表作为附录．

在本书编写过程中，我们还得到了其他许多工厂、科研单位、学校的大力支持，对本书内容提出许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢．

由于我们在实践和理论水平方面的不足，书中错误在所难免，欢迎读者批评指正。

本书曾于1975年11月出版，现在根据1975年11月版本重印，仅在个别地方作了修改.

《正交试验设计法》编写组

1978年11月

目　录

第一章　正交试验设计的基本思想与直观分析法

本章通过实例介绍正交试验设计法的基本思想. 主要就一类简单的多因素试验问题介绍如何选用正交表进行表头设计,以及如何用直观分析法对试验数据进行比较,作出正确的判断.

§1　问题的提出——多因素的试验问题

在生产斗争和科学实验中,为了贯彻执行"**鼓足干劲,力争上游,多快好省地建设社会主义**"总路线,实现优质、高产、低消耗,往往需要进行试验,来寻找比较合适的生产条件. 有实践经验的读者都知道试验安排得好,次数不多,就能获得有用的信息,通过科学的分析,可以帮助人们了解矛盾各方面的具体的地位以及矛盾的具体的相互关系,掌握内在的规律,得到明确的结论. 如果试验的计划和安排不妥,往往次数很多,仍然捉摸不到其中的变化规律,得不到满意的结论. 因此,如何合理地安排试验,如何对试验的结果进行科学的分析,就成为人们十分关心的问题. 在工农业生产的推动下,这方面的实践和研究形成了统计数学的一个重要分支——试验设计,并得到了广泛的应用.

我们遇到的实际问题,一般都是比较复杂的,包含有多种因素,各个因素又有不同的状态,它们互相交织在一起. 为了寻求合适的生产条件,就要对各种因素以及各个因素的不同状态进行试验,这就是多因素的试验问题. 先看下面的例子.

【例 1.1】　提高某种农药收率的试验.

某农药厂生产某种农药,根据生产经验,发现影响农药收率的因素有 4 个,每个因素都有两种状态,具体如下:

A 反应温度	A_1: 60°C,	A_2: 80°C;
B 反应时间	B_1: 2.5 小时,	B_2: 3.5 小时;
C 配比(某两种原料之比)	C_1: 1.1/1,	C_2: 1.2/1;
D 真空度	D_1: 500 毫米汞柱,	D_2: 600 毫米汞柱.

为了便于讨论,以后我们通称影响试验指标的因素为因子,用大写字母 A, B, C, …表示;每个因子可能处的状态称为水平,用该因子字母加上足标表示,例如 A_1, A_2, … 表示 A 因子的第一,第二,……水平等. 我们把试验中需要考虑多个因子,而每个因子又有多个水平有待考察的试验问题称为多因子试验问题. 具体地,例 1.1 就是四个两水平因子的试验问题.

显然,例 1.1 希望通过试验解决的问题是:

(1) 找出各因子对指标的影响规律,具体说,就是:哪个因子是主要的,哪个是次要的?哪些因子只起单独作用,哪些因子除了各自的单独作用外,它们之间还产生综合效果?这种综合效果有多大?对指标的影响,综合效果是主要的,还是因子的单独作用是主要的?

(2) 选出各因子的一个水平来组成比较合适的生产条件,以下通称最优生产条件,这里的最优是对试验所考察的因子和水平而言.

由于例 1.1 是四个两水平因子的试验,所以从四个因子的每个因子的两个水平中选取一个水平的所有可能搭配共有 $2\times2\times2\times2=2^4=16$ 种. 显然,所有 16 种可能搭配都进行试验,再经过试验结果的处理就可以获得问题的圆满解决. 现在要问:能否只作其中一小部分试验,通过分析就可获得问题的圆满解决呢?在比较复杂的多因子试验中,这个问题就更为突出了. 例如,制备交联型丙烯酸酯双面压敏胶粘带的试验,考察的因子有九个,具体的因子和水平如下:

A 丙烯酸酯单体甲用量	A_1: 4,	A_2: 5,	A_3: 6;
B 丙烯酸酯单体乙用量	B_1: 10,	B_2: 20,	B_3: 30;

C 混合溶剂的配比	C_1: 30/70,	C_2: 35/65,	C_3: 40/60;
D 引发剂用量	D_1: 0.3,	D_2: 0.4;	
E 后反应时间(小时)	E_1: 5,	E_2: 8;	
F 固化剂用量(%)	F_1: 50,	F_2: 33,	F_3: 25;
G 双面胶粘带厚度 (10^{-2}毫米)	G_1: 10,	G_2: 12,	G_3: 14;
H 固化温度(℃)	H_1: 100,	H_2: 110,	H_3: 120;
J 固化时间(分)	J_1: 3,	J_2: 5,	J_3: 8.

在这一试验问题中，所有可能的搭配有 $3^7\times2^2=8748$ 种，要逐个进行试验，显然是不可能实现的．由此可见多因子试验问题的突出矛盾是：

(1) 所有可能搭配的试验次数与实际可行的试验次数之间的矛盾．

(2) 实际所作少数试验与要求全面掌握内在规律之间的矛盾．

为了解决第一类矛盾，要求我们必须合理地设计和安排试验，以便通过尽可能少的试验次数，就可捉住主要矛盾．为了解决第二类矛盾，要求我们对试验结果作科学的分析，透过现象看本质，认识内在的规律，为解决问题提供可靠的依据．本书介绍的正交试验设计方法就是一种研究多因子试验问题的重要数学方法．它主要使用正交表这一工具来进行整体设计、综合比较、统计分计，也就是说，它使用正交表从所有可能搭配中一下就挑出若干必需的试验，然后再用统计分析方法对试验结果进行综合处理，解决问题．由于试验是整体设计的，即要作的试验是同时挑好的，因此只要人力和设备许可，这些试验可以同时进行，大大有利于缩短试验周期，节约时间．目前正交试验设计法已在冶金、化工、橡胶、纺织、无线电、医药卫生等方面得到了有效的应用．

这里再简单提一下多因子试验的分类．在考察 A、B、C、D、… 等 n 个因子对指标 y 的作用时，若每个因子都取两个水平，则称此为 2^n 因子试验问题，比如例 1.1 就是一个 2^4 因子试验

问题；若被考察的 n 个因子皆取三个水平，则称为 3^n 因子试验问题，依此类推．若被考察的因子有 $n+m$ 个，其中 n 个因子取两水平，m 个因子取三水平，则称此为 $2^n\times3^m$ 因子试验问题，比如上述双面压敏胶粘带试验就是 $3^7\times2^2$ 因子试验问题．类似地可有 $2^n\times3^m\times4^s$ 因子试验问题等．本章主要讨论水平数相等，即 2^n、3^n、4^n 等因子试验问题，其他的试验问题放到第三章讨论．

§2 用正交表安排试验

正交表是试验设计法中合理安排试验，并对数据进行统计分析的主要工具，最简单的正交表是 $L_4(2^3)$，见下表．

$L_4(2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

先说一下记号 $L_4(2^3)$ 的含意．“L”代表正交表，L 下角的数字“4”表示有 4 横行（以后简称为行），即要做四次试验；括号内的指数“3”表示有 3 纵列（以后简称为列），即最多允许安排的因子个数是 3 个；括号内的数“2”表示表的主要部分只有 2 种数字，即因子有两种水平 1 与 2，称之为 1 水平与 2 水平．

表 $L_4(2^3)$ 称为正交表是因为它有以下两个性质：

(1) 每一列中，不同的数字出现的次数相等．这里不同的数字只有两个——1 和 2，它们各出现 2 次．

(2) 任意两列中，将同一横行的两个数字看成有序数对（即左边的数放在前，右边的数放在后，按这一次序排出的数对）时，每种数对出现的次数相等．这里有序数对共有四种：(1, 1)，(1, 2)，(2, 1)，(2, 2)，它们各出现一次．

凡满足上述两个性质的表就称为正交表.

常见的正交表有: $L_4(2^3)$, $L_8(2^7)$, $L_{16}(2^{15})$, $L_{32}(2^{31})$, …; $L_9(3^4)$, $L_{27}(3^{13})$, …; $L_{16}(4^5)$, …; $L_{25}(5^6)$, 等. 具体表格见本书附录.

下面我们以上节的例 1.1 为例介绍使用正交表进行整体设计的方法. 试验后得到的数据, 要进行分析. 这里将介绍一种综合比较的直观分析法. 另一种分析方法——方差分析, 将在下一章讨论. 对于一般的情形, 都可用直观分析法. 我们将通过这个例子来说明直观分析法的主要内容.

1. 试验计划的制订

例 1.1 共有 4 个因子, 即 A: 反应温度; B: 反应时间; C: 配比; D: 真空度. 每个因子各有两个水平. 对此, 我们选用正交表 $L_8(2^7)$, 其中包括 8 个试验. 这 8 个试验, 是从 16 种可能搭配中一次挑出的, 只要条件许可, 就可同时进行试验.

具体做法是在 $L_8(2^7)$ 表头的第 1、2、4、7 列上分别写上因子 A、B、C、D, 就得到表 1.1. 这项把因子放入正交表表头的工作称为表头设计. 至于怎样选用正交表, 以及为什么要把因子 A、B、C、D 分别放在 1、2、4、7 列的道理将在本章以下几节逐步说明.

表 1.1　正交表 $L_8(2^7)$

列号 试验号	A 1	B 2	3	C 4	5	6	D 7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

现在在表 1.1 的各因子列中，在数字"1"和"2"的位置分别填上各该因子的 1 水平和 2 水平，就得到一张试验计划表，见表 1.2.

表 1.2 试验计划

因子 / 试验号	A (°C) 1	B (小时) 2	C 3	D (毫米汞柱) 4	试验结果 y_i(%)
1	60	2.5	1.1/1	500	86
2	60	2.5	1.2/1	600	95
3	60	3.5	1.1/1	600	91
4	60	3.5	1.2/1	500	94
5	80	2.5	1.1/1	600	91
6	80	2.5	1.2/1	500	96
7	80	3.5	1.1/1	500	83
8	80	3.5	1.2/1	600	88

有了试验计划，必须严格按照计划进行试验．但是，为了减少试验中由于先后掌握不匀所带来的干扰以及外界条件所引起的系统误差，试验可以不按表上的号码顺序进行，先将试验号码随机化，即非人为地、主观地决定顺序，而是任意打乱，譬如用抽签办法来决定(但此法并非对所有试验都适用，有些试验的顺序不能随意改变)．在做完这 8 个试验后，将测得的数据填入表 1.2 的最后一栏.

2. 综合比较——直观分析法

在测得完整的 8 个试验数据后，如何科学地分析这些数据，从中得出正确的结论，这是试验设计法的重要步骤．下面，我们对例 1.1 中 4 个因子的单独作用，介绍直观分析法.

毛主席教导我们："**有比较才能鉴别。**"我们对表 1.2 的试验结果进行综合比较，在比较中要鉴别的内容是:

(1) 在 4 个因子中，哪些因子对收率的影响大，哪些因子影响小?

(2) 如果某个因子对试验数据的影响大，那末它取哪个水平对提高收率最有利？

第一个问题要在比较4个因子中获得解决，第二个问题要在比较每个因子的两个水平中获得解决.我们先来解决第二个问题.

怎样对每个因子的两个水平进行比较呢？譬如，对因子 A（反应温度），怎样比较它的两个水平 A_1（60°C）和 A_2（80°C）对收率的影响呢？这里共做了8次试验，直接从这8个数据中两两作比较是不行的，因为这8个试验的条件（见表1.2）没有两个是相同的，也就是说，没有比较的基础. 但是，如果我们把这8个试验数据适当组合起来，便会发现某种可比性，这就是正交设计特具的综合可比性.

以因子 A 为例. A 的1水平 A_1 出现在表1.2的第1～4号试验中，这四个试验的收率的平均数是

$$\begin{aligned}\overline{A}_1&=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_3+y_4)\\&=\frac{1}{4}(86+95+91+94)=91.5.\end{aligned}$$

A 的2水平 A_2 出现在第5～8号试验中，这四个试验的收率的平均数是

$$\begin{aligned}\overline{A}_2&=\frac{1}{4}(y_5+y_6+y_7+y_8)\\&=\frac{1}{4}(91+96+83+88)=89.5.\end{aligned}$$

$\overline{A}_1$ 和 $\overline{A}_2$ 就有可比性，因为在 A_1 条件下的四次试验（第1～4号）中，因子 B、C、D 皆取遍两种水平，而且两种水平出现的次数相同，各为2次；同样，在 A_2 条件下的四次试验（第5～8号）中，B、C、D 也皆取遍两种水平，而且两种水平出现的次数相同，各为2次. 这就是说，对于在 A_1 条件下的四次试验和 A_2 条件下的四次试验来说，虽然其他条件（B、C、D）在变动，但这种变动是“平等的”，所以 $\overline{A}_1$ 和 $\overline{A}_2$ 之间的差异反映了 A 的两个水平的不同（当然，这不可避免地混有误差的影响）. 由于

$$\bar{A}_1-\bar{A}_2=91.5-89.5=2>0.$$

所以说因子 A 取 A_1 时平均收率较高.

同样可以根据表1.2比较因子 B、C、D 的两个水平的好坏，比较时分组的办法是以1水平对应的四个试验为一组，以2水平对应的四个试验为另一组，这样就有

$$\bar{B}_1=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_5+y_6)=92.0,$$

$$\bar{B}_2=\frac{1}{4}(y_3+y_4+y_7+y_8)=89.0,$$

$$\bar{C}_1=\frac{1}{4}(y_1+y_3+y_5+y_7)=87.75,$$

$$\bar{C}_2=\frac{1}{4}(y_2+y_4+y_6+y_8)=93.25,$$

$$\bar{D}_1=\frac{1}{4}(y_1+y_4+y_6+y_7)=89.75,$$

$$\bar{D}_2=\frac{1}{4}(y_2+y_3+y_5+y_8)=91.25.$$

以上各项计算都可以在正交表上进行，十分简便. 具体地说，先把8个试验结果 $y_i(i=1, 2, \cdots, 8)$ 按试验号填入正交表右端，再按列计算，如表1.3，其中 I_j 表示正交表中第 j 列的1水平所对应的数据之和，$\bar{I}_j$ 为其平均值；II_j 表示正交表中第 j 列的2水平所对应的数据之和，$\overline{II}_j$ 为其平均值.

由于因子 A 放在第1列，所以 $\bar{I}_1$ 就是 $\bar{A}_1$，$\overline{II}_1$ 就是 $\bar{A}_2$. 同样，由于 B、C、D 分别放在第2、4、7列，所以

$$\bar{B}_1-\bar{B}_2=\bar{I}_2-\overline{II}_2=3.0,$$
$$\bar{C}_1-\bar{C}_2=\bar{I}_4-\overline{II}_4=-5.5,$$
$$\bar{D}_1-\bar{D}_2=\bar{I}_7-\overline{II}_7=-1.5.$$

就是说，我们从表1.3的最末一行 $\bar{I}_j-\overline{II}_j$ 的正负可以看出，因子 A(反应温度)取 A_1 (60℃)比 A_2 (80℃)时收率高；因子 B (反应时间)取 B_1 (2.5小时)比 B_2 (3.5小时)时收率高；因子 C (配比)取 C_2(1.2/1) 比 C_1 (1.1/1) 时收率高；因子 D (真空度) 取 D_2 (600毫米汞柱)比 D_1(500毫米汞柱)时收率高. 因此，在只考虑因子单

表 1.3

表头设计	A	B		C			D	试验结果 y_i
列号 / 试验号	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	1	1	1	1	86
2	1	1	1	2	2	2	2	95
3	1	2	2	1	1	2	2	91
4	1	2	2	2	2	1	1	94
5	2	1	2	1	2	1	2	91
6	2	1	2	2	1	2	1	96
7	2	2	1	1	2	2	1	83
8	2	2	1	2	1	1	2	88
I_j	366	368		351			359	
II_j	358	356		373			365	
$\bar{I}_j=I_j/4$	91.5	92.0		87.75			89.75	
$\overline{II}_j=II_j/4$	89.5	89.0		93.25			91.25	
$\bar{I}_j-\overline{II}_j$	2.0	3.0		−5.5			−1.5	

独作用的情况下，可选择 $A_1B_1C_2D_2$ 作为最优生产条件.

毛主席教导我们："**不能把过程中所有的矛盾平均看待，必须把它们区别为主要的和次要的两类，着重于捉住主要的矛盾**". 现在，我们在 A、B、C、D 四个因子中，来分清主次，抓住主要矛盾，即解决开始时提出的第一个问题.

直观上容易看出，一个因子对试验结果的影响大，就是主要的. 所谓影响大，就是这因子的不同水平对应的平均收率之间的差异大. 相反，一个因子对试验结果的影响小，就是次要的. 也就是说，这因子的不同水平所对应的平均收率之间的差异小. 从表 1.3 的最末一行 $\bar{I}_j-\overline{II}_j$ 的绝对值的大小可见，因子 C 的两个水平之间差异最大（$|\bar{I}_4-\overline{II}_4|=5.5$），是主要矛盾. 其次是因子 B 和 A，再次是因子 D.

然而这种情形不是固定的，当试验范围或试验条件发生改

变时，矛盾的主要和非主要方面可以互相转化，这是必须注意的.

§3 交互作用

在上一节中我们仅考虑了每个因子的单独作用，没有考虑到矛盾的具体的相互关系. 这是一个简化了的模型，由此选出的最优生产条件，就不一定准确. 一般地在一个试验里，不仅各个因子在起作用，而且因子之间有时会联合起来影响某一指标，这种作用叫做交互作用. 我们看一个简单的例子.

某生产队对土地情况大体相同的四块大豆试验田，用不同方式施用氮肥(N)和磷肥(P)，结果，第一块不加氮、磷肥，平均亩产400斤；第二块只加6斤氮肥，平均亩产430斤；第三块只加4斤磷肥，平均亩产450斤；第四块加6斤氮肥，4斤磷肥，平均亩产560斤. 列成表如下：

N 氮肥 \ P 磷肥	$P_1=0$	$P_2=4$
$N_1=0$	400	450
$N_2=6$	430	560

从表中看出，只加4斤磷肥，亩产增加50斤；只加6斤氮肥，亩产增加30斤，而氮磷肥都加，亩产增加160斤. 这说明，增产的160斤除了氮肥的单独效果30斤和磷肥的单独效果50斤以外，还有它们联合起来所发生的影响，而

$$
\begin{aligned}
&(560-400)-(430-400)-(450-400)\\
&=160\text{ 斤}-30\text{ 斤}-50\text{ 斤}=80\text{ 斤}
\end{aligned}
$$

就反映了这种联合起来的影响. 在正交试验设计中，把这个值的一半称为 N 和 P 的交互作用，记为 $N\times P$，即

$$N\times P=\frac{1}{2}\times 80=40.$$

与此相仿，我们可以计算出例 1.1 某种农药收率试验中因子

A 和因子 B 的交互作用．先根据表 1.2 算得

B \ A	$A_1=60°C$	$A_2=80°C$
$B_1=2.5$ 小时	$\frac{y_1+y_2}{2}$	$\frac{y_5+y_6}{2}$
$B_2=3.5$ 小时	$\frac{y_3+y_4}{2}$	$\frac{y_7+y_8}{2}$

于是

$$\left(\frac{y_7+y_8}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)-\left(\frac{y_5+y_6}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)-\left(\frac{y_3+y_4}{2}-\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{y_7+y_8}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}\right)-\left(\frac{y_3+y_4}{2}+\frac{y_5+y_6}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_7+y_8)-\frac{1}{2}(y_3+y_4+y_5+y_6)$$

就反映了因子 A 和因子 B 联合起来对产品收率所发生的影响．因此，因子 A 和因子 B 间的交互作用 $A\times B$ 就等于将上式乘以 $\frac{1}{2}$，即

$$A\times B=\frac{1}{4}(y_1+y_2+y_7+y_8)-\frac{1}{4}(y_3+y_4+y_5+y_6)$$

$$=\frac{1}{4}(86+95+83+88)-\frac{1}{4}(91+94+91+96)$$

$$=-5.0.$$

同样可算出 $A\times C$, $B\times C$ 如下：

$$A\times C=\frac{1}{4}(y_1+y_3+y_6+y_8)-\frac{1}{4}(y_2+y_4+y_5+y_7)=-0.5,$$

$$B\times C=\frac{1}{4}(y_1+y_4+y_5+y_8)-\frac{1}{4}(y_2+y_3+y_6+y_7)=-1.5.$$

上面三个交互作用的绝对值有大有小，其中以 $A\times B$ 的绝对值为最大．凡绝对值大的，说明因子间的交互作用大，反之就小．

因子间的交互作用实际上可在正交表 $L_8(2^7)$ 上直接算出．例如 $A\times B$ 的值，从上面的算式和表 1.3 可见，它恰好是表 1.3 中第 3 列"1"对应的 y 值的平均减去"2"对应的 y 值的平均．也就是说，