面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

微积分

下册

同济大学应用数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

微 积 分

下 册

同济大学应用数学系　编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分　下册/同济大学应用数学系编.—北京:高等教育出版社,2000

ISBN 7-04-007898-8

Ⅰ.微…　Ⅱ.同…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 64481 号

微积分(下册)
同济大学应用数学系　编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2000 年 1 月第 1 版
印　　张	25.25	印　　次	2000 年 5 月第 3 次印刷
字　　数	460 000	定　　价	21.30 元

内 容 提 要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部工科数学学科“九五”规划教材.

本书是在同济大学编《高等数学》的基础上，按照改革精神编写成的一本面向21世纪的微积分教材.全书分上下两册.上册内容为一元微积分和微分方程，下册内容为空间解析几何、多元微积分及无穷级数.

本书教学内容深广度与现行的《高等数学课程教学基本要求》大体相当，按照渗透现代数学思想，加强应用能力的培养要求，对一些传统内容进行了重新处理，更加注意对基本概念、基本定理和重要公式的几何意义和实际背景的介绍，突出微积分的基本思想和方法，加强对数学方法的分析和指导；多元微积分融进了向量和矩阵方法；无穷级数突出了函数逼近思想；使用了现代数学的概念和术语，为学习现代数学提供了一些接口；对一些内容和定理证明，作了简化和新的处理，更适合工科和其他非数学类专业学生的特点，并便于教师灵活掌握；增加了有实际应用背景的例题和习题及一些上机计算题，书后有习题答案和提示.

本书引进了数学软件，编进了14个紧密结合教学内容的数学实验(上册8个，下册6个)，内容简单有趣，易于上手，并有详细步骤和结果.还有相关的实验习题.

本书保持了同济大学编《高等数学》的结构严谨、逻辑清晰、叙述详尽、例题较多的特点，便于在教学改革中使用.本书可作工科和其他非数学类专业的教材或教学参考书.

目　录

第五章

向量代数与空间解析几何

自然界中的很多量既有大小、又有方向. 数学中的向量就是对这一类量的概括与抽象. 向量在工程技术中有着广泛的应用, 是一种重要的数学工具. 向量可以用有向线段来表示(称为向量的几何表示); 在建立了空间直角坐标系后, 又可用 3 个实数组成的有序数组表示(称为向量的坐标表示). 向量的坐标表示为我们把向量概念推广到更高维的空间中开拓了道路. 本章先讨论向量的这两种表示形式, 接着通过几何形式定义向量的基本运算, 并导出这些运算的坐标表示. 有关向量的每一个结论, 都有等价的几何表示形式和坐标表示形式, 学习时要注意对比, 切实掌握, 并善于根据不同的问题采用最为方便的表示形式. 本章第一部分向量代数所讨论的就是向量概念、向量之间的各种运算及其应用.

本章第二部分的内容是空间解析几何的基础知识. 正像平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的一样, 空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必不可少的. 这部分内容包括空间的平面和直线方程, 平面与直线的关系, 以及空间曲面、曲线的方程. 在曲面方程中, 我们着重讨论了柱面、旋转曲面及二次曲面的方程. 在讨论平面和直线方程时, 向量扮演了重要角色, 抓住了平面的法向量和直线的方向向量, 就抓住了这部分内容的纲. 这是在学习时要充分注意的.

第一节 向量及其线性运算

一、空间直角坐标系

为了沟通空间的点与数、图形与方程的联系，我们先引进空间直角坐标系.

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，分别叫做 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴). 这三条数轴都以 O 为原点且有相同的长度单位，它们的正方向符合右手法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴的正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向(图 5-1). 这样三条坐标轴就组成了空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 直角坐标系，点 O 称为该坐标系的原点.

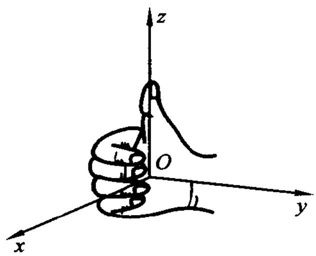

图 5-1

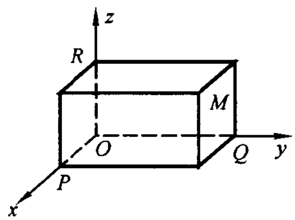

图 5-2

设 M 是空间的一点，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴并交 x 轴、y 轴和 z 轴于 P、Q、R 三点. 点 P、Q、R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影. 设这三个投影在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x、y 和 z，于是空间一点 M 唯一地确定了一个有序数组 x,y,z. 反过来，对给定的有序数组 x,y,z，可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，过点 P、Q、R 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，这三个平面的交点 M 就是由有序数组 x,y,z 确定的唯一的点(如图 5-2). 这样，空间的点与有序数组 x,y,z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x,y,z 称为点 M 的坐标，依次称 x、y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，并可把点 M 记为 $M(x,y,z)$.

三条坐标轴中每两条可以确定一个平面，称为坐标面，由 x 轴和 y 轴确定

的坐标面简称为 xOy 面，类似地还有 yOz 面与 zOx 面. 这三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限. 如图 5－3 所示，八个卦限分别用罗马字Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ表示，第一、二、三、四卦限均在 xOy 面的上方，按逆时针方向排定，其中在 xOy 面上方并在 yOz 面前方、zOx 面右方的是第一卦限；第五、六、七、八卦限均在 xOy 面的下方，也按逆时针方向排定，它们依次分别在第一至四卦限的下方. 容易看到，这八个卦限中点的坐标有如下的特点：

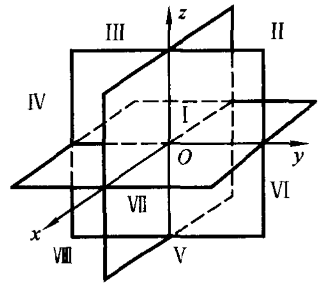

图 5－3

卦限	点的坐标 (x,y,z)	卦限	点的坐标 (x,y,z)
Ⅰ	$x>0,y>0,z>0$	Ⅴ	$x>0,y>0,z<0$
Ⅱ	$x<0,y>0,z>0$	Ⅵ	$x<0,y>0,z<0$
Ⅲ	$x<0,y<0,z>0$	Ⅶ	$x<0,y<0,z<0$
Ⅳ	$x>0,y<0,z>0$	Ⅷ	$x>0,y<0,z<0$

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$是空间两点，为了表达 P_1 与 P_2 之间的距离，我们过 P_1 和 P_2 各作三个分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面. 这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(图 5－4). 从图中易见该长方体各棱的长度分别是

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|.$$

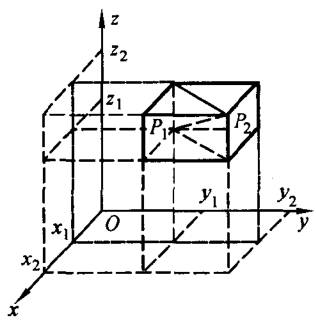

图 5－4

于是得对角线 P_1P_2 的长度，亦即空间两点 P_1，P_2的距离公式为

$$\boxed{|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.}$$

例 1　证明：以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$为顶点的三角形是一个等腰三角形.

证　因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$
$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$
$$|M_3M_1|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

有 $|M_1M_3| = |M_2M_3|$. 故 $\triangle M_1M_2M_3$ 是等腰三角形.

例 2 空间中所有与原点的距离为常数 r 的点的坐标 x、y、z 应满足什么方程? 把这些点的集合表示出来.

解 设 $M(x,y,z)$ 是满足题设条件的任一点, 原点是 $O(0,0,0)$, 按题设, $|OM| = r$, 即有

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r,$$

或

$$x^2+y^2+z^2 = r^2,$$

这就是所求的方程.

记所有与原点距离为 r 的点组成集合 B, 则

$$B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\},$$

它是中心在原点, 半径为 r 的球面.

二、向量与向量的表示

1. 向量及其几何表示

在自然科学、社会科学中, 人们常把所研究的事物与数联系起来, 然后以数字为工具来分析、处理问题. 用数字来表示的量很多, 如某一群体的数量, 某两点的距离, 某一物体的长、宽、高度及其体积与质量, 物体所具有的能量以及某一自然现象所经历的时间等等. 通常把这些量称为纯量. 然而, 有些量却不是一个数字所能表达的, 例如一架飞机从 A 点朝某个方向飞行 10 km 至 B 点, 如果仅以飞行距离 $AB = 10$ km 来描述是不充分的, 还需描述飞机移动的方向; 同样, 要反映飞机在点 A 的飞行速度, 如果仅用飞行速率(单位时间内运动的距离)来说明也是不充分的, 还需说明速度的方向. 再如, 将一个力作用于某物体上, 如果只说明力的大小而不说明力的作用方向, 也是无法确定该作用力所产生的效应的. 诸如此类的量, 单纯地用一个数字都不足以描述它们, 因为这些量除了有数量的属性外, 还具有方向的属性. 我们把这种既有大小(非负的纯量), 又有方向的量称为向量(或矢量).

例如, 位移、速度(线速度与角速度)、加速度(线加速度与角加速度)、力、力矩、动量、冲量等等, 都是向量. 向量通常用黑体字母来表示, 如 $\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{f}$(也可用上方加有箭头的字母来表示, 如 $\vec{s}$、$\vec{v}$、$\vec{a}$、$\vec{f}$). 从定义可知, 向量的两个要素是大小和方向. 由于具有这两个要素的最简单的几何图形是有向线段, 故在数学中往往用一个有方向的线段来表示向量. 如果线段的起点是 M_0, 终点是 M, 那么这个有向线段可以记为 $\overrightarrow{M_0M}$, 它代表一个确定的向量. 线段的长度表示向量的

大小,线段的方向表示向量的方向.为了叙述和使用的方便,在以后的讨论中,**我们对向量和表示它的有向线段不加区分**,例如把有向线段$\overrightarrow{AB}$说成向量$\overrightarrow{AB}$或把向量$\boldsymbol{a}$看成有向线段.

定义　如果两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的大小相同,方向一致,就称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$相等,并记作$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

这个定义是说,如果两个有向线段的大小与方向是相同的,则不论它们的起点是否相同,我们就认为它们表示同一个向量.这样理解的向量叫做自由向量①.除了另有说明外,本教程中研究的均为自由向量.

这样,我们就可以定义两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角:将$\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{b}$平移使它们的起点重合后,它们所在的射线之间的夹角$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角(图 5-5),通常把$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

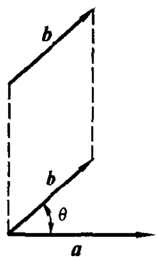

图 5-5

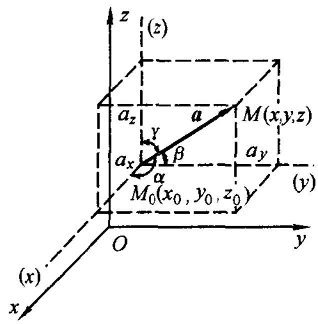

图 5-6

2. 向量的坐标表示

为了沟通向量与数之间的联系,我们把向量放到直角坐标系中加以考虑.在直角坐标系 $Oxyz$ 中,设有向线段$\overrightarrow{M_0M}$代表向量$\boldsymbol{a}$,它的起点为$M_0(x_0,y_0,z_0)$,终点为$M(x,y,z)$,我们把$x-x_0,y-y_0,z-z_0$分别称作有向线段$\overrightarrow{M_0M}$在x轴,y轴,z轴上的投影,并记

$$x-x_0=a_x,y-y_0=a_y,z-z_0=a_z.$$

于是有向线段$\overrightarrow{M_0M}$对应了一个有序数组a_x,a_y,a_z.(图 5-6)

反过来,这个有序数组a_x,a_y,a_z完全反映了有向线段$\overrightarrow{M_0M}$的长度和方向.

① 在实际问题中,有时须考虑向量的起点,例如用向量表示一个力时,力的作用点就是向量的起点.在某些场合,向量的起点是不能随意改变的,这种向量称为定点向量.

从图 5-6 容易看到，由于 $x-x_0=a_x, y-y_0=a_y, z-z_0=a_z$，故 $\overrightarrow{M_0M}$ 的长度是

$$\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1}$$

其次，由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向可用 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴的正向所成的夹角 α,β,γ 来刻画，而 α,β,γ 由下述关系式确定：

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \tag{2}$$

因此这个有序数组 a_x, a_y, a_z 不但确定了 $\overrightarrow{M_0M}$ 的长度，而且确定了 $\overrightarrow{M_0M}$ 的方向，即有序数组 a_x, a_y, a_z 确定了有向线段 $\overrightarrow{M_0M}$ 所表示的（自由）向量 $\boldsymbol{a}$ 的全部特征.

由上面的分析可以看出，在直角坐标系 $Oxyz$ 中，一个向量对应了唯一的有序数组 a_x, a_y, a_z；反过来，对给定的有序数组 a_x, a_y, a_z，由(1)式和(2)式就唯一地确定了一个长度为 $\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，并与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角为 α，β,γ 的向量. 因此，**有序数组和向量是一一对应的**. 于是，任何向量 $\boldsymbol{a}$ 均可唯一地记作

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z). \tag{3}$$

(3)式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式，a_x, a_y, a_z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标（或分量），有时也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影. 这样从上面的说明中可以看到，以 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为起点，$M(x, y, z)$ 为终点的向量的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0). \tag{4}$$

特别地，在解析几何中还把以原点 O 为起点，点 $P(a_x, a_y, a_z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的向径或矢径，并记作 $\boldsymbol{r}$，即 $\boldsymbol{r}=(a_x, a_y, a_z)$. 向量的坐标表示用圆括号，与点的坐标表示相同，但从上下文不难将它们区别开来.

3. 向量的模与方向角

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度也叫 $\boldsymbol{a}$ 的模（也称 $\boldsymbol{a}$ 的范数），记作 $|\boldsymbol{a}|$. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 以坐标形式给出时，即 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$，由(1)式可得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{5}$$

特别地，模为 1 的向量叫做单位向量（或简称为幺矢）.

向量 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的正向所成的夹角 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的

方向角，方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，由(2)式可得

向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}, \tag{6}$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

方向余弦满足如下的关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{7}$$

模为零的向量叫做零向量，记为 $\mathbf{0}$；它的坐标表达式为 $\mathbf{0}=(0,0,0)$；规定零向量的方向是任意的.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 以坐标表达式(3)给出后，由(5)式和(6)式，它的模与方向角(即大小与方向)就确定了；反之，当 $\boldsymbol{a}$ 的模与方向角已知时，由(6)式可以获得它的坐标表达式(3)，即

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma. \tag{8}$$

例 3　(1) 设 $A\left(0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1\right),B\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 3\right)$ 是空间的两点，向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，写出 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式以及它的模与方向角；

(2) 设一物体运动速度 $\boldsymbol{v}$ 的大小为 5，方向指向 xOy 面的上方，并与 x 轴、y 轴的正向的夹角分别为 $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}$，试写出 $\boldsymbol{v}$ 的坐标表达式.

解　(1) $\boldsymbol{a}=\left(1-0,\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),3-1\right)=(1,\sqrt{2},2)$，由(5)式及(6)式得

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{7},$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{14}}{7},\cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

即方向角为 $\alpha=\arccos\frac{\sqrt{7}}{7},\beta=\arccos\frac{\sqrt{14}}{7},\gamma=\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$；

(2) 已知 $|\boldsymbol{v}|=5,\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4}$，由关系式(7)

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

得

$$\cos^2\gamma=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

由于 $\boldsymbol{v}$ 指向 xOy 面的上方，即 $\boldsymbol{v}$ 与 z 轴正向的夹角 γ 满足 $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$，故

$$\cos\gamma=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

于是由(8)式得

$$v_x=5\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2},\ v_y=5\times\cos\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2},\ v_z=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2},$$

即

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5}{2}\right).$$

三、向量的加法与数乘运算

在实际问题中，向量与向量之间常发生一定的联系，并产生出另一个向量，把这种联系抽象成数学形式，就是向量的运算. 在本节中我们先定义向量的加法运算以及向量与数的乘法运算，这两种运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

从物理与力学中我们知道，两个力、两个速度均能合成，得到合力与合速度，并且合力与合速度都符合平行四边形法则. 由此实际背景出发，我们定义向量的加法如下：

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线是 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 5－7）.

以上规则叫做向量相加的平行四边形法则，但此法则对两个平行向量的加法没有做说明，故我们再给出一个蕴含了平行四边形法则的加法定义：

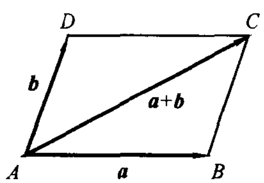

图 5－7

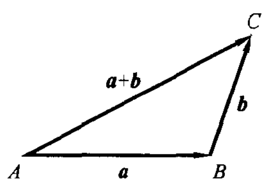

图 5－8

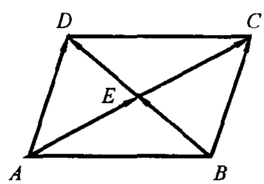

图 5－9

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连结 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 5－8）.

这一规则叫做向量相加的三角形法则.

例 4 证明：对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 E，如图 5－9 所示，由于

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC},\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{ED},$$

故

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC},$$

即

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.$$

这说明线段 AD 与 BC 平行且长度相同,因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

下面我们给出向量加法的坐标表达式.

如图 5-10 所示,令 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}=(b_x,b_y,b_z)$,且设点 B 的坐标是 x,y,z,按三角形法则可得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(x,y,z)$.因为点 A 的坐标是 a_x,a_y,a_z,点 B 的坐标是 x,y,z,所以由(4)式得 $\overrightarrow{AB}=(x-a_x,y-a_y,z-a_z)$.由于向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标是唯一确定的,故有

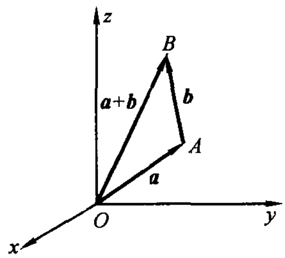

图 5-10

$$b_x=x-a_x,b_y=y-a_y,b_z=z-a_z,$$

即

$$x=b_x+a_x,y=b_y+a_y,z=b_z+a_z,$$

于是得

$$\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).} \tag{9}$$

(9)式就是向量加法的坐标表达式,即**两向量和的坐标是两向量对应坐标之和**.

2. 向量与数的乘法(数乘)

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$,我们定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(简称数乘)是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模与方向规定如下:

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

下面我们给出数乘运算的坐标表达式.令 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,其方向角为 α、β、γ,又设 $\lambda\boldsymbol{a}=(x,y,z)$,其方向角为 α'、β'、γ'.当 $\lambda>0$ 时,因为 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向,即它们有相同的方向角,利用公式(8),得

$$x=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos\alpha'=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\lambda a_x.$$

同理

$$y=\lambda a_y,\quad z=\lambda a_z.$$

当 $\lambda<0$ 时,因为 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向,它们的方向角关于 π 互补,即 $\alpha'=\pi-\alpha$、$\beta'=\pi-\beta$、$\gamma'=\pi-\gamma$(图 5-11),利用公式(8),得

$$x=|\lambda \boldsymbol{a}|\cos\alpha'=-\lambda|\boldsymbol{a}|(-\cos\alpha)=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=\lambda a_x.$$

同理　　$y=\lambda a_y,\ z=\lambda a_z.$

可见,不论 λ 的正负号如何,都有

$$x=\lambda a_x,\ y=\lambda a_y,\ z=\lambda a_z.$$

于是得

$$\boxed{\lambda \boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).}\qquad(10)$$

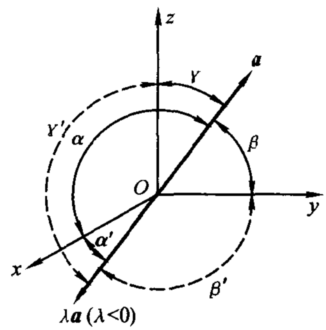

图 5－11

(10)式说明,**向量与数的乘积的三个坐标分别是向量的三个坐标与该数之积**.

容易验证,若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是任意向量,λ、μ 是任意实数,则有如下的运算规律:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$(加法交换律);

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$(加法结合律);

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$$(数乘分配律);

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$(数乘结合律).

对于向量 $\boldsymbol{b}$,我们用 $-\boldsymbol{b}$ 表示 $(-1)\boldsymbol{b}$,并称它为 $\boldsymbol{b}$ 的反向量(或负向量),$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,也称为 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 的差.在几何上,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 分别是以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线向量(图 5－12).因三角形两边长之和不小于第三边之长,两边长之差不大于第三边之长,故有不等式

$$\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.\qquad(11)$$

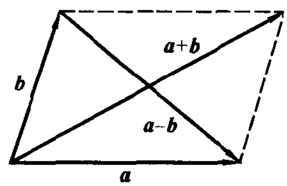

图 5－12

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$,取 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记作 $\boldsymbol{e}_a$,即 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(a_x,a_y,a_z)=\left(\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right)$$
$$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

可见,**以 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦作为坐标的向量是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量**.