

工程力学丛书 ·

# 结构随机振动

Random Vibration of Structures

欧进萍 王光远



高等教育出版社

6.3

410132

·工程力学丛书·

# 结构随机振动

**Random Vibration of Structures**

欧进萍 王光远

高等教育出版社

(京)112号

**图书在版编目(CIP)数据**

结构随机振动/欧进萍,王光远编著. —北京:高等教育出版社, 1998.5

(工程力学丛书)

ISBN 7-04-006334-4

I . 结… II . ①欧… ②王… III . 建筑结构 - 结构振动:  
随机振动 IV . TU311.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 17984 号

\*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

\*

开本 850×1168 1/32 印张 13.625 字数 350 000

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月第 1 次印刷

印数 0 001—2 002

定价 24.70 元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等  
质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换

**版权所有,不得翻印**

## 内 容 简 介

本书阐述了结构随机振动的基本理论和分析方法,有机地将本领域最新研究成果和基本理论结合起来,以理论与应用统一的形式介绍了结构随机振动的基本内容。第一、二章为结构随机振动理论的数学基础;第三章为结构随机干扰的数学模型;第四、五、六章为结构随机反应的分析方法;第七章为结构随机振动的累积损伤与可靠性分析。

本书为高等教育出版社出版的工程力学丛书之一,内容丰富、系统,结合工程实际,反映了作者多年的科研和教学的丰富成果,是一本有特色的专著。本书既可作为力学、土木、水利、机械、航空航天、船舶和海洋结构工程等专业的研究生、高年级大学生等的教学用书,又可作为有关科研人员和工程技术 人员的参考书。

责任编辑 余美茵

DV67/01



## 作者简介

欧进萍，湖南宁远人，1959年4月生，1978年毕业于湘潭大学，1983年于武汉工业大学获工学硕士学位、1987年于哈尔滨建筑大学获工学博士学位。1987～1990年在哈尔滨建筑大学力学博士后流动站工作，1990年至今在哈尔滨建筑大学工作，1995～1996年在美国哥伦比亚大学做访问教授。现任工程理论与应用研究所所长、建筑工程学院副院长、教授、博士生导师。在结构动力可靠性、结构累积损伤和结构耗能减振等方面进行了系统的研究，与王光远教授一起创立了模糊随机振动理论。发表学术论文110余篇。有关科研工作曾分别得到国家自然科学基金、霍英东青年教师基金及国家杰出青年科学基金等多项资助。科研成果曾获得国家教委科技进步一等奖及霍英东青年教师（研究类）一等奖等多项奖励。



## 作者简介

王光远，河南温县人，1924年3月生，1946年毕业于国立西北农学院、获学士学位，1947～1950年在北洋大学（天津大学前身）任教，1952年毕业于哈尔滨工业大学研究生班。1952～1959年于哈尔滨工业大学任建筑力学教研室主任、副教授；1959年至今在哈尔滨建筑大学任教，曾先后担任基础科学部主任、工程理论与应用研究所所长。现任教授、博士生导师、中国工程院院士。在科学研究方面先后建立了“建筑物的空间整体计算理论”、“结构模糊随机优化设计理论”、“工程大系统的全局性优化理论”和“结构模糊随机振动理论”，是工程软设计理论的创始人。发表学术论文180余篇，主要专著有《建筑结构的振动》、《应用分析动力学》、《结构优化设计》、《工程软设计理论》等8种。有关科研成果曾获得“全国科学大会奖”、“国家自然科学奖”及“国家教委科技进步奖”等多次奖励。

# 序

结构的自然环境干扰大多数不仅随时间变化(具有动态特性),而且具有明显的随机性。这种随机性主要表现为在同样的基本条件下测量得到的干扰随时间变化的历程曲线(简称为时程曲线)都不相同,每一具体实现的时程曲线相当于相应随机过程的一条样本曲线。随着认识的深入,人们逐渐认识到应该用随机过程来描述这种随机动力干扰,并分门别类地建立起了许多具体的随机过程模型。50年代初,航空航天工程领域最早建立起了大气中自由气流作用于飞行器结构的扰动力随机模型。随后土木、水利、海洋和机械等工程领域相继建立起了脉动风速作用于结构表面的脉动风压随机模型、地震作用于结构基底的地震地面加速度随机模型、海洋波浪作用于结构表面的波浪力随机模型、不平坦路面作用于行驶车辆底盘的动力随机模型等等。正是这些动力随机干扰模型的建立,推动了结构随机振动理论的诞生、应用和发展。

结构振动大多数可以归结为微分方程及其求解的问题。结构在随机干扰下的运动方程一般是具有随机非齐次项或随机自激参数的微分方程。50年代发展起来的线性体系随机振动的反应分析方法,主要是基于均方微积分理论的随机微分方程求解及解过程统计矩计算的方法;60年代中期建立起来的快速 Fourier 变换(FFT)使这一方法的频域分析得到了迅速发展。60年代初,非线性体系随机振动的研究开始受到重视,Itô 随机微分方程及其解过程的 Марков 性得到应用,FPK 方程法发展成了非线性随机反应分析的一种精确方法;结合随机滤波理论,FPK 方程法拓广到了可以分析白噪声和过滤白噪声干扰下的非线性随机反应。特别是 FPK 方程法可以直接求解反应的概率密度,使得这一方法具有理

论上的完美性,引起了许多研究者的兴趣。但是,滞变体系,特别是多自由度滞变体系的 FPK 方程求解十分困难,从工程实际的需要出发,70、80 年代发展和完善的各种滞变恢复力过程的微分方程描述,使得随机等价线性化方法成为滞变体系随机振动分析最实用的方法。

结构随机振动分析的主要目的之一是要在概率的意义下定量地评价结构的安全程度,称为动力可靠性分析。结构动力可靠性分析涉及的破坏准则大致有两类:其一是结构反应首次超越安全界限的准则,简称首超破坏准则;其二是结构反应超越某个界限达到一定次数的疲劳破坏准则。结构反应超越界限的概率分析推动了随机过程极值理论和界限超越理论的发展,40 年代 Rice 提出的随机过程首次超越概率计算公式是这一工作的重要标志;60 年代初,Middleton 用更严格、更完美的数学方法研究了同样的问题,为随机过程界限超越的概率分析提供了统一的基础。结构体系的动力可靠性分析涉及体系失效模式的复杂性和多个反应的相关性,目前仅对单自由度体系或单个反应的动力可靠性分析提出了许多近似方法并在工程实际中得到初步的应用。

随机振动的理论与应用涉及数学、力学和工程的许多领域。结构随机振动的基本理论应该包括结构随机干扰的数学模型、线性与非线性体系随机振动的反应分析及结构随机振动的损伤与可靠性分析三个部分。在 50 年代,本书第二作者研究了结构风振的随机反应分析、地震地面运动的随机过程模拟及结构地震随机反应分析;80 年代起,我们开始研究结构动力可靠性、模糊随机振动和结构随机累积损伤,并给硕士和博士研究生开设结构随机振动课程。在研究和教学过程中,我们认为随机振动的数学基础、基本理论和最新研究成果是学生理解、研究和应用这一学科基本理论的三个重要方面。我们于 1986 年开始计划和着手撰写此书,力图将上述三个方面有机地融于结构随机振动的基本理论中,并在教学和研究中反复试讲、补充,几易书稿,今天完成的这个书稿是我

们教学和研究的阶段总结。

本书共分七章。第一、二章是结构随机振动理论的数学基础，以比较严谨的方式，简明扼要地介绍了概率论、随机过程和随机微分方程的基本内容；第三章是结构随机干扰的数学模型，系统地介绍了风、海浪和地震动的作用模型以及这些模型的统一形式；第四、五、六章是结构随机反应的分析方法，系统地介绍了线性单自由度、多自由度和连续体系随机振动的反应分析方法，非线性体系随机反应分析的一般方法以及滞变体系的恢复力模型和滞变随机反应分析的方法；第七章是结构随机振动的累积损伤与可靠性分析，系统地介绍了结构的破坏准则、累积损伤模型以及随机累积损伤与动力可靠性的分析方法。

本书参考了本学科已有的许多书目和总结了最新发表的有关论文，在此特向本书参考和引用的书目与论文的作者表示衷心的感谢。本书原稿承蒙浙江大学庄表中教授细心审阅，提出了宝贵的修改意见，在此特致诚挚的谢意。在讲授本书原稿和有关课题的研究过程中，一些研究生提出过修改意见并给予协助，在此一并致谢。

我们研究的许多其他课题也都涉及结构随机振动领域，其中部分成果总结到了本书中。国家自然科学基金会对我们的有关研究给予了资助，在此表示感谢。

由于作者水平所限，书中缺点和错误在所难免，请读者批评指正。

欧进萍 王光远

1995年12月于哈尔滨建筑大学

## 主要符号表

$A, B, C$	集合或事件
$a, b, c$	集合的元素或基本事件
$a_g$	地震地面加速度
$B(t)$	Wiener 随机过程
$\mathbf{B}, \boldsymbol{\Gamma}$	协方差矩阵
$b, b_{ij}, \Gamma_{ij}$	协方差
$\mathbf{C}$	阻尼矩阵
$c$	阻尼系数
$c_e$	等价阻尼
$D$	损伤指数
$E$	能量
$E_h$	滞变耗散能量
$E(\cdot)$	数学期望
$F(t)$	随机干扰
$g$	重力加速度
$g(\cdot)$	恢复力函数(或简称恢复力)
$\mathbf{H}$	基本解矩阵
$H(\omega)$	单位频响函数
$h(\tau)$	单位脉响函数
$\mathbf{I}$	单位矩阵
$\mathbf{K}$	刚度矩阵
$k$	刚度
$k_e$	等价刚度

---

$M$	质量矩阵
$m$	质量
$m_k$	$k$ 阶统计矩
$P$	概率或概率分布
$P_f$	失效概率
$P_s$	可靠性
$p$	概率密度
$q, \alpha$	谱带宽因子
$R(\cdot)$	相关函数
$S(\omega)$	谱密度
$T$	持续时间
$T_f$	首超时间
$U^+、U^-、u^+、u^-$	累积塑性变形
$v_d$	脉动风速
$W(t)$	白噪声
$X、Y、Z$	随机变量
$X(t)、Y(t)、Z(t)$	随机过程或随机反应
$X_a、Y_a$	峰值随机变量
$X_m、Y_m$	最大值随机变量
$x、y、z$	确定性变量
$x(t)、y(t)、z(t)$	确定性函数或确定性反应
$Z$	随机滞变位移
$z$	确定性滞变位移
$\Gamma(\cdot)$	Gamma 函数
$\delta(\cdot)$	Dirac $\delta$ 函数
$\epsilon(\cdot)、\vartheta(t)$	单位阶跃函数
$\lambda_k$	$k$ 阶谱矩
$\rho$	相关系数

# 目 录

<b>主要符号表</b>	.....	i
<b>第一章 概率论</b>	.....	1
§ 1.1 概率的公理化结构	.....	1
1.1.1 集合论的基本知识	.....	1
1.1.2 概率空间与概率的基本性质	.....	4
1.1.3 条件概率与统计独立性	.....	6
§ 1.2 随机变量的概率分布函数	.....	8
1.2.1 离散型随机变量	.....	9
1.2.2 连续型随机变量	.....	11
1.2.3 随机矢量	.....	11
1.2.4 随机变量的独立性与条件分布	.....	13
1.2.5 随机矢量的变换	.....	14
§ 1.3 随机变量的数字特征	.....	15
1.3.1 数学期望	.....	16
1.3.2 数字特征的性质	.....	17
1.3.3 条件数学期望	.....	18
1.3.4 随机矢量的数字特征	.....	18
§ 1.4 随机变量的特征函数	.....	19
1.4.1 特征函数与矩	.....	19
1.4.2 对数特征函数与累积量	.....	20
1.4.3 联合特征函数	.....	21
§ 1.5 正态随机变量与中心极限定理	.....	22
1.5.1 正态随机变量	.....	22
1.5.2 正态随机矢量	.....	23
1.5.3 正态随机矢量的性质	.....	24
1.5.4 中心极限定理	.....	25

---

<b>第二章 随机过程</b>	27
§ 2.1 随机过程的基本概念	28
2.1.1 随机过程的定义与概率分布	28
2.1.2 随机过程的数字特征	30
2.1.3 随机过程的特征函数	32
2.1.4 随机过程按统计特性的分类	33
2.1.5 随机过程按记忆特性的分类	35
§ 2.2 随机过程的均方微积分	37
2.2.1 预备知识	38
2.2.2 均方微分	39
2.2.3 均方积分	43
2.2.4 正态过程均方微积分的正态不变性	45
§ 2.3 平稳与非平稳过程	48
2.3.1 平稳过程的相关函数	49
2.3.2 平稳过程的谱密度	52
2.3.3 平稳过程按谱特性的分类	60
2.3.4 各态历经平稳过程	64
2.3.5 非平稳过程的表示与特性	69
§ 2.4 Марков 过程	72
2.4.1 独立增量过程	72
2.4.2 扩散过程	77
§ 2.5 随机微分方程	84
2.5.1 随机常微分方程的基本概念	85
2.5.2 线性随机常微分方程	88
2.5.3 Itô 随机微分方程	93
<b>第三章 结构随机干扰的模型</b>	99
§ 3.1 结构随机干扰的一般模型	100
3.1.1 平稳随机模型	100
3.1.2 非平稳随机模型	101
§ 3.2 脉动风速与风压的随机模型	103
3.2.1 脉动风速的随机模型	104
3.2.2 脉动风压的随机模型	109

---

§ 3.3 海洋波浪与波浪力的随机模型.....	111
3.3.1 海浪的随机模型.....	111
3.3.2 波浪力的随机模型.....	119
§ 3.4 地震地面运动的随机模型.....	121
3.4.1 一维地震动的随机模型.....	121
3.4.2 三维地震动的随机模型.....	127
3.4.3 地震动随机场模型.....	128
<b>第四章 线性体系随机振动的反应分析 .....</b>	<b>131</b>
§ 4.1 单自由度线性体系的随机反应分析.....	132
4.1.1 确定性振动分析的 Duhamel 积分法.....	132
4.1.2 平稳随机干扰下的反应.....	137
4.1.3 白噪声干扰下的反应.....	144
4.1.4 非平稳随机干扰下的反应.....	154
§ 4.2 多自由度线性体系的随机反应分析.....	158
4.2.1 具有经典阻尼的线性体系 .....	159
4.2.2 具有非经典阻尼的线性体系 .....	175
4.2.3 随机状态反应分析的一般理论 .....	184
§ 4.3 线性连续体系的随机反应分析 .....	200
4.3.1 一维线性连续体系的运动方程 .....	201
4.3.2 随机反应分析的振型分解法 .....	203
<b>第五章 非线性体系随机振动的反应分析 .....</b>	<b>214</b>
§ 5.1 非线性确定性振动分析的基本方法.....	215
5.1.1 非线性确定性振动的基本特点 .....	216
5.1.2 摄动法 .....	219
5.1.3 平均化法 .....	220
5.1.4 等价线性化法 .....	223
5.1.5 例题 .....	226
§ 5.2 FPK 方程法 .....	231
5.2.1 非线性随机振动的状态方程 .....	231
5.2.2 随机状态反应矢量的 FPK 方程 .....	235
5.2.3 几类特殊非线性体系的稳态 FPK 方程解 .....	237
§ 5.3 统计矩截断法 .....	243

5.3.1 统计矩的一般方程 .....	244
5.3.2 统计矩截断的三种方法 .....	247
5.3.3 线性体系的情况 .....	254
§ 5.4 随机摄动法 .....	255
5.4.1 单自由度非线性体系 .....	256
5.4.2 多自由度非线性体系 .....	258
§ 5.5 随机等价线性化法 .....	260
5.5.1 单自由度非线性体系 .....	261
5.5.2 多自由度非线性体系 .....	264
§ 5.6 例题——各种方法对 Duffing 体系的应用 .....	275
<b>第六章 滞变体系随机振动的反应分析 .....</b>	<b>281</b>
§ 6.1 滞变恢复力模型 .....	282
6.1.1 滞变恢复力的基本概念 .....	282
6.1.2 滞变恢复力的基本模型 .....	283
6.1.3 滞变恢复力退化模型 .....	287
§ 6.2 滞变恢复力过程的数学描述 .....	290
6.2.1 滞变恢复力的分解 .....	290
6.2.2 折线型滞变位移微分方程 .....	292
6.2.3 光滑型滞变位移微分方程 .....	295
§ 6.3 滞变恢复力的随机等价线性化 .....	304
6.3.1 折线型滞变恢复力的等价线性化 .....	304
6.3.2 光滑型滞变恢复力的等价线性化 .....	311
§ 6.4 滞变随机振动的反应分析 .....	317
6.4.1 FPK 方程法 .....	318
6.4.2 随机等价线性化法 .....	320
6.4.3 滞变随机反应精确分析的一些困难 .....	324
<b>第七章 结构随机振动的累积损伤与可靠性分析 .....</b>	<b>328</b>
§ 7.1 结构的破坏准则、累积损伤与可靠性定义 .....	329
7.1.1 首超破坏准则 .....	329
7.1.2 疲劳破坏准则与累积损伤模型 .....	334
§ 7.2 随机反应超越界限的概率分析 .....	347
7.2.1 超越界限的次数及其统计矩 .....	347

---

7.2.2 平稳正态反应的界限超越率.....	351
7.2.3 非平稳正态反应的界限超越率.....	351
§ 7.3 随机反应极值的概率分析.....	353
7.3.1 极值数与极值分布.....	353
7.3.2 平稳正态反应的极值分布.....	356
7.3.3 非平稳正态窄带反应的极值分布.....	359
§ 7.4 随机反应的包络过程及其超越界限的概率分析.....	360
7.4.1 包络过程的定义.....	360
7.4.2 包络过程的界限超越率.....	363
§ 7.5 基于首超破坏准则的动力可靠性分析.....	364
7.5.1 Poisson 假设下的动力可靠性 .....	364
7.5.2 两态 Марков 假设下的动力可靠性 .....	367
7.5.3 随机反应最大值与首超时间的概率分布 .....	371
§ 7.6 随机累积损伤与疲劳可靠性分析.....	373
7.6.1 高周疲劳下的随机累积损伤与可靠性.....	373
7.6.2 低周疲劳下的随机累积损伤与可靠性.....	378
参考文献 .....	381
索引 .....	387
外国人名译名对照表 .....	402
Random Vibration of Structures .....	404
Ou Jinping     Wang Guangyuan .....	404
Contents in Brief .....	404
Contents .....	406

# 第 1 章

## 概 率 论

概率论主要包括事件、概率和随机变量的基本理论，它研究大量随机现象的统计规律，是近代数学的一个重要分支。

最初，概率论只限于与赌博或游戏相联系的随机事件及其相应的概率计算的狭隘领域。自概率的公理化结构(概率空间)的建立和随机变量的引入后，概率论得到了迅速的发展，并在自然科学、社会科学和工程技术等领域中得到了广泛的应用。

本章是后续章节的预备知识，将概括性地介绍概率论的一些基本知识和重要结果。

---

### § 1.1 概率的公理化结构

---

#### 1.1.1 集合论的基本知识

集合是近代数学中一个最基本的概念，几乎一切近代数学都是从集合这个最基本的概念出发的。

##### (1) 集合的定义

具有某种性质的、确定的、彼此可以区别的事物的总体称为集合，常用大写字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、…等表示。构成集合的事物称为这个