电路的计算机辅助分析初步

中国人民解放军国防科学技术大学
刘景伊编

国防工业出版社

电路的计算机辅助分析初步

中国人民解放军国防科学技术大学

刘 景 伊 编

国 防 工 业 出 版 社

电路的计算机辅助分析初步

中国人民解放军国防科学技术大学　编

国防工业出版社　出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第 074 号

解放军七二二六厂印刷　内部发行

·

$787 \times 1092^{1}/_{16}$　印张$8^{5}/_{8}$　20 千字

1979 年第一版　1979 年12月第一次印刷　印数 1—10,000 册

统一书号：N15034（四教 003）　定价 0.95 元

内 容 简 介

本书初步地介绍了模拟电路的计算机辅助分析，它的原理和一些简单的计算方法。为这门学科提供一个概貌。

主要内容有：（1）图论与网络；（2）简单的直流程序和交流稳态程序；（3）元件公差与电路精度的分析；（4）状态空间分析法；（5）线性电路的瞬态分析；（6）非线性电路的分析。

本书适宜于作为无线电工程系大学生的参考书，也可作为从事电子电路或电力网输电线路方面的科技人员的参考。

前　言

本书系高等学校工科电子类电子对抗专业统编教材之一。

电路的分析和综合是一门有相当历史的独立的学科，是所有电路工作者所关心的命题，至今还在不断发展和更新中。自从计算机日益广泛使用以来，给电路的设计和分析带来了新的生命力。电路的计算机辅助分析有下列优点：(1) 由于计算机可以代替人类的重复劳动，可以理解，在排出计算机辅助分析的程序后，工作者只需适当地输入参数数据，就能由计算机算出所需的结果，以供设计者使用。如果计算机所得的结果不能满足给定的要求，则可以重新改变电路的参数，或甚至改变电路的结构，由计算机算出结果后，再供选用。由此还可以选择最佳的线路等等，从而由计算机的辅助分析发展成最佳线路的综合设计技术。(2) 计算机辅助分析的另一优点是：所取的电路模型可以比一般人工计算取得更复杂些，或更接近于实际情况。这是由于电路的各种复杂性，人工计算时必须作适当的简化，便于得到分析的结果。（3）电路计算机辅助分析的另一优点是可以对电路中的各种元件作出公差分析，例如可以计算出电路中每一元件变化1%时输出数据的变化量，这样可以定出应选用元件的公差（例如10%的电阻等），使符合输出的指标。这对于在成批生产中保证质量指标提供了详细的选用数据，为各方面的精度提供了保证。当然，计算机辅助分析还是依赖于人的智慧和劳动，依赖于设计者对于电路模型与数学模型的选择，依赖于所采取的各种计算方法，依赖于设计者对电子计算机的妥善使用等等。由此，计算机的辅助分析和综合也是一门日益发展的新学科，所取的方法也各有不同。本文只是简单地介绍一般性的分析原理和一些简单的计算方法，为电路工作者对这门学科提供一个概貌。

利用计算机作辅助分析可以有程度的不同，譬如由分析者写出电路的代数方程或微分方程，然后由计算机来求解，这是最原始的要求。其次，是由设计者输入电路图的各种参数数据，然后由计算机自动地来列式求解，这是中等的要求（本文即是按照这种要求的）。高等的要求是所谓自动分析的方法，即在采用显示设备后用光笔在计算机显示设备上作图，由计算机自动识图并求解。本文的主要内容是：（1）图论与网络，（2）简单的直流程序和交流稳态程序（即实数和复数代数方程的求解），（3）关于元件的公差与电路精度的分析，（4）电路的状态空间的分析（微分方程的求解），（5）线性电路的瞬态分析，（6）非线性电路的分析。采用的参考书籍示出在篇后。编者水平有限，错误在所难免，谨请批评指正。

目　　录

第一章　图论与网络

§1.1　引　　言

当我们要分析某一电路时，一般的步骤是首先画出电路图，从图上观察节点(Node)和支臂(Branch)的分布情况，然后按克希霍夫的节点电流法或环路电压法列出公式，然后求解。计算机辅助分析也模拟了上述分析步骤，首先要把电路的结构(即节点与支臂的分布)记录下来，然后再把支臂中的元件记录下来，再按克希霍夫定律进行计算。由于适宜于计算机中使用的方法是采用矩阵运算的方法，所以计算机的识图和记录也是用矩阵的方式。识图和记录的方法可以分为两个步骤，第一步按图论(Graph Theory)的方法对节点和支臂的关系作拓扑(Topology)分析，然后记录这一结构；第二步对结构里（或支臂中）的元件进行识别和记录。上述所得的结果都是一些矩阵。本章中简单地介绍和电路分析有关的图论，至于图论本身是专门学科，不在本文范围之内。

§1.2　定义和术语

图(1.1)中示出一个电路图。如果我们用一根线段来代替电路中的一个支臂，我们就得到此电路结构中节点和支臂关系的拓扑图。图中（n_1，n_2，n_3，n_4）代表节点，（b_1，b_2，b_3，b_4，b_5）代表支臂，图中箭头代表电流方向，具有方向的拓扑图称为方向性图（Oriented Graph）。

(1) 节点——拓扑图中线段的端点称为节点。

(2) 支臂——连接两节点间的线段称为支臂。

(3) 环路——构成封闭路径的一组支臂称为环路。

(4) 树(Tree)——树是拓扑图中的一个子　，构成树的规则如下：

(i) 树 T 必须包含或连接了拓扑图中所有的节点。

(ii) 树 T 不构成或包含任何环路。

构成树的支臂称为树支臂，如图（1.2）中实线所示，不构成树的支臂称为弦或链(Chord or Link)，如图中虚线所示。

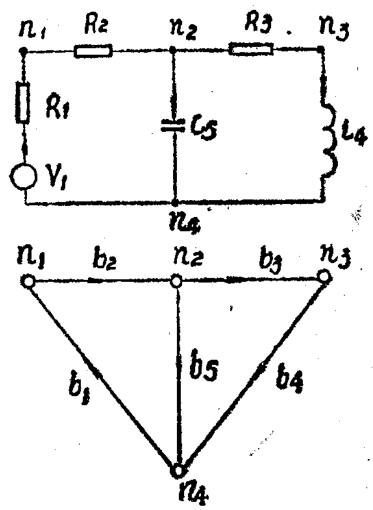

图 1.1　网络与拓扑图

(5) 连结集合(Tieset)——把一根弦和其它相应的树支臂构成的一个环路或集合称为

连结集合，图中示出拓扑图中的两个连结集合。连结集合的意思就是把树连结起来成了环路。

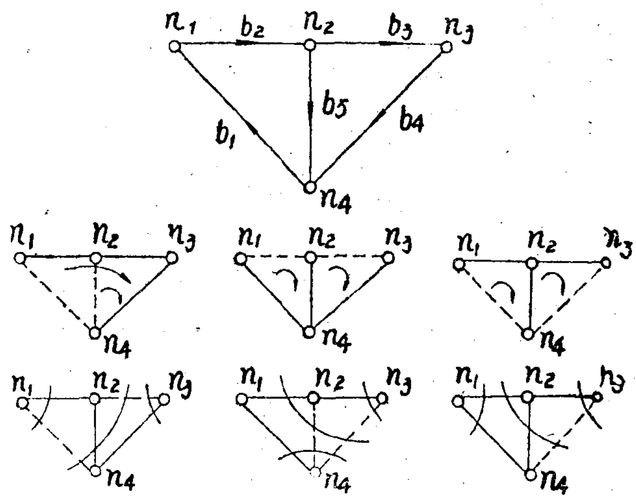

图 1.2　树、树支臂、弦或链、连结集合、分割集合

(6) 分割集合(.Cutset)—— 把一根树支臂和其它相应的弦构成的集合称为分割集合。分割集合的意思就是把树形分割断了。图(1.2)中示出三种连结集合和分割集合。

(7) 路径和连接图（Path and Connected Graph）——如果用 m 个不同的支臂连接 $(m+1)$ 个不同的节点，则构成一个路径。在图（1.2）中，例如（b_2,b_3,b_4）就连接了节点（n_1,n_2,n_3,n_4）称为一个路径。同样（b_3,b_4）连结了节点（n_2,n_3,n_4）也是一个路径。如果在拓扑图中任意两点之间至少有一个路径，这拓扑图称为连接图。

(8) 如果拓扑图是一个连接图，它有($N+1$)个节点和M个支臂，则对于这个图中的每个树 T，其相应的分割集合数有 N 个，相应的连结集合数有 $M-N$ 个。例如图(1.2)中，$N=3$，$M=5$，相应地对于每一个树，有 3 个分割集合，有 $5-3=2$ 个连结集合。

§1.3　相连矩阵(Incidence Matrix)和克希霍夫电流定律

相连矩阵记录了拓扑图中节点和支臂“相连”的情况，告诉我们一个支臂是和那两个节点相连接的，是把拓扑图输入计算机的重要输入数据。相连矩阵的记录方法如下。

对于具有($N+1$)节点和M支臂的连接图，可以构成一个相连矩阵 $\mathbf{A}_a$，矩阵 $\mathbf{A}_a$ 是 $[(N+1)\times M]$ 矩阵[即$(N+1)$行，M列]，其记录方式是：

(1) 若支臂 b_j 相连于节点n_k，支臂的方向是由 n_k 射出，则记矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的元 $a_{kj}=+1$；

(2) 若支臂 b_j 相连于节点 n_k，支臂的方向是射入 n_k，则记矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的元 $a_{kj}=-1$；

(3) 若支臂 b_j 不与节点 n_k 相连，则记矩阵 $\mathbf{A}_a$ 的元 $a_{kj}=0$。

例：对于图（1.2）的连接矩阵 $\mathbf{A}_a$ 可以记为：

$$\mathbf{A}_a = \overset{[(N+1)\times M]}{[a_{kj}]} = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

在上述矩阵 $\mathbf{A}_a$ 中，显见每一列中的数加起来均为 0 。如果少记一个节点(称为参考节点)则省去的那一节点（或那一行）中的数完全可以推算出来。所以这一行不是独立的，因而可以省却不记。我们称这矩阵有N个独立节点。

在上例中，如果取 n_4 为参考节点，则相连矩阵 $\mathbf{A}$ 是：

$$\mathbf{A} = [a_{kj}]^{[N\times M]} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

相应之下，称前一矩阵 $\mathbf{A}_a$ 为“繁”相连矩阵。

在图（1.3）中，如果我们取（b_1,b_2,b_3）为树，（b_4,b_5）为弦，那末相连矩阵可以划分为树部分（$\mathbf{A}_T$）和弦部分（$\mathbf{A}_C$），如下：

$$\mathbf{A} = \overset{\qquad\mathbf{A}_T \qquad\qquad \mathbf{A}_C}{\left(\begin{array}{ccc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)} \triangleq [\mathbf{A}_T \vdots \mathbf{A}_C] \tag{1.2}$$

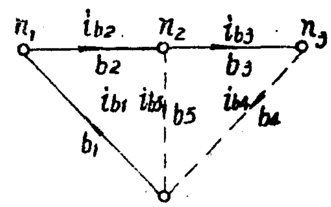

图1.3 相连矩阵、树和弦的部分

从克希霍夫电流定律可知，对于任一集中参数的电路，进入和射出一个节点的电流之和为零。在图（1.3）中，如果用 $i_{b1},i_{b2},\cdots i_{b5}$ 代表支臂中的电流，并以向量 $\mathbf{i}_b$ 代表之，则 $\mathbf{i}_b$ 可写成：

$$\mathbf{i}_b \triangleq \begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ \vdots \\ i_{b5} \end{pmatrix} = [i_{b1}, i_{b2}, i_{b3}, i_{b4}, i_{b5}]^T \tag{1.3}$$

此处 T 是转置符号。

把相连矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{i}_b$ 相乘，得到：

$$\mathbf{A}\mathbf{i}_b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \\ i_{b4} \\ i_{b5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i_{b1}+i_{b2} \\ -i_{b2}+i_{b3}+i_{b5} \\ -i_{b3}+i_{b4} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1.4}$$

上式最后为 $\mathbf{0}$ 的公式是由克希霍夫电流定律得出，故克希霍夫电流定律可用 $\mathbf{A}\mathbf{i}_b=\mathbf{0}$ 来表出

拓扑图除了用相连矩阵 $\mathbf{A}$ 表出外，还可以用分割集合的方法来记录，得出一个分割集合

矩阵 C。

图(1.4)中示出分割集合 C_1(b_1和弦b_4,b_5)、分割集合C_2(b_2和弦b_4,b_5)、分割集合C_3(b_3和弦b_4),并取它们的方向和b_1,b_2,b_3的方向一致,则分割集合 C 的记录方法如下:

(1) 若支臂b_j在集合C_k中并且方向一致(b_j"出"或"入"C_k),则记$C_{kj}=1$;

(2) 若支臂b_j在集合C_k中并且方向相反,则记$C_{kj}=-1$;

(3) 若支臂b_j不在集合C_k中,则记$C_{kj}=0$。

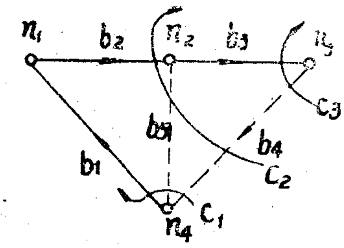

图 1.4 分割集合矩阵C的记录方法

故有:

$$\mathbf{C}\triangleq[C_{kj}]^{(N\times M)}=\begin{array}{c} \\ C_1\\ C_2\\ C_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&-1&-1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)\triangleq[\mathbf{C}_T\vdots\mathbf{C}_C]=[\mathbf{1}\vdots\mathbf{C}_C] \qquad (1.5)$$

式中 $\mathbf{C}_T$ 是树的子矩阵,它是单位矩阵 $\mathbf{1}$,$\mathbf{C}_C$ 是弦的子矩阵。

如果我们用分割集合矩阵 C 与支臂电流向量 $\mathbf{i}_b$ 相乘,则有:

$$\mathbf{C}\mathbf{i}_b=\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_{b1}\\i_{b2}\\i_{b3}\\i_{b4}\\i_{b5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_{b1}-i_{b4}-i_{b5}\\i_{b2}-i_{b4}-i_{b5}\\i_{b3}-i_{b4}\end{pmatrix}=\mathbf{0} \qquad (1.5a)$$

可见克希霍夫电流定律同样可用 $\mathbf{C}\mathbf{i}_b=\mathbf{0}$ 来表出。所以用矩阵 C 而不用矩阵 A 的理由是 $\mathbf{C}_T=\mathbf{1}$,在计算机中只需存贮 $\mathbf{C}_C$ 就可以了。

由此可见(1)采取拓扑图的方法可以把电路图的特性用矩阵方法存储起来而且采用了严格的系统的方法;(2)此矩阵可以直接参与克希霍夫电流定律的计算;(3)由于拓扑图与支臂中的元件的性质无关,所以不论支臂中的元件是线性的、非线性的、恒参数的、时变参数的,上述矩阵运算均属正确。此外,可见 A 和 C 都是$[N\times M]$矩阵。

§1.4 连结集合矩阵和克希霍夫电压定律

前已指出,连结集合是由拓扑图中的弦和某些树臂所构成。如果取环路的方向和弦的走向一致时(图 1.5 中l_1,l_2的方向和b_4,b_5的方向一致)就可以写出连结集合矩阵 B,其记法如下:

(1) 若支臂b_j在环路l_k中并且方向相同,则记$b_{kj}=1$;

(2) 若支臂 b_j 在环路 l_k 中并且方向相反，则记 $b_{kj}=-1$；

(3) 若支臂 b_j 不在环路 l_k 中，则记 $b_{kj}=0$。

由此图（1.5）的连结集合矩阵 **B** 是：

$$\mathbf{B}=[b_{kj}]^{[(M-N)\times M]}=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$=[\mathbf{B}_T \vdots \mathbf{B}_C]=[\mathbf{B}_T \vdots \mathbf{1}] \tag{1.6}$$

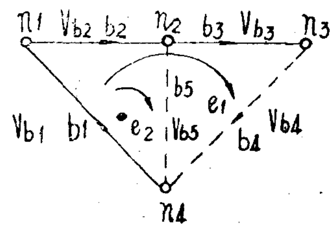

图 1.5 连结集合矩阵B的记法

如果我们用向量 $\mathbf{V}_b$ 来代表每一支臂上的电压降，其方向和支臂的方向一致；根据克希霍夫电压定律，沿着环路的电压降之和为零；如果我们用连结集合矩阵 **B** 乘以支臂电压向量 $\mathbf{v}_b$，则有：

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{b1} \\ v_{b2} \\ v_{b3} \\ v_{b4} \\ v_{b5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{b1}+v_{b2}+v_{b3}+v_{b4} \\ v_{b1}+v_{b2}+v_{b5} \end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{1.7}$$

可见克希霍夫电压定律可由 $\mathbf{B}\mathbf{v}_b=\mathbf{0}$ 来表出。

此外，我们还可以推导出下列两个重要关系式。

(1) 如果我们用支臂电压降 v_{bj} 来代表支臂 b_j，用节点电压 v_{nk} 来代表节点 n_k，取相连矩阵 **A** 的转置矩阵 $\mathbf{A}^T$，乘以节点电压向量 $\mathbf{v}_n$，有：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{v}_n=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \\ v_{n3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -v_{n1} \\ v_{n1}-v_{n2} \\ v_{n2}-v_{n3} \\ v_{n3} \\ v_{n2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_{b1} \\ v_{b2} \\ v_{b3} \\ v_{b4} \\ v_{b5} \end{pmatrix}=\mathbf{v}_b \tag{1.8}$$

支臂电压 $\mathbf{v}_b$ 和节点电压 $\mathbf{v}_n$ 的关系示出在图（1.6*A*）中。

(2) 如果我们用支臂电流 i_{bk} 代替支臂 b_k，用环路电流 i_{lj} 代替环路 l_j，则有：

$$\mathbf{B}^T\mathbf{i}_l=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_{l1} \\ i_{l2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i_{l1}+i_{l2} \\ i_{l1}+i_{l2} \\ i_{l1} \\ i_{l1} \\ i_{l2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i_{b1} \\ i_{b2} \\ i_{b3} \\ b_4 \\ i_{b5} \end{pmatrix}=\mathbf{i}_b \tag{1.9}$$

支臂电流和环路电流的关系示出在图（1.6*B*）中。

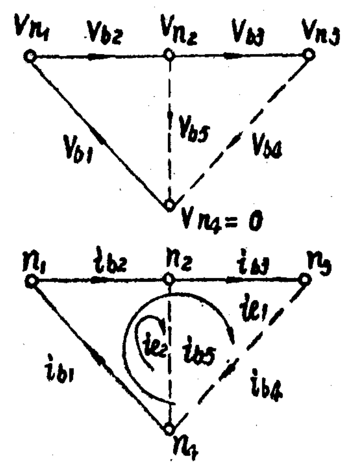

图 1.6 (A) $\mathbf{A}^T\mathbf{v}_n=\mathbf{v}_b$

(B) $\mathbf{B}^T\mathbf{i}_l=\mathbf{i}_b$

§1.5 拓扑矩阵间的相互关系

从上可见，拓扑图可以用相连矩阵 **A**，连结矩阵 **B**，或分割矩阵 **C** 来表出，它们代表同一拓扑图，它们之间必然有可以互相转换的关系。这些关系是：

$$\overset{[N\times M][M\times(M-N)]}{\mathbf{A}\mathbf{B}^{T}=\mathbf{0}} \tag{1.10}$$

$$\overset{[(M-N)\times M][M\times N]}{\mathbf{B}\mathbf{C}^{T}=\mathbf{0}} \tag{1.11}$$

（1）第一关系 $\mathbf{AB}^T=\mathbf{0}$ 可以证明如下：

根据（1.7）式，$\mathbf{B}\mathbf{v}_b=\mathbf{0}$，用 $\mathbf{A}^T\mathbf{v}_n=\mathbf{v}_b$ 代入上式，有：

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_b=\mathbf{B}\mathbf{A}^T\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$$

因节点电压向量 $\mathbf{v}_n\neq\mathbf{0}$，故有：

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^T=\mathbf{0}$$

利用矩阵转置的公式 $(\mathbf{XY})^T=\mathbf{Y}^T\mathbf{X}^T$，故有：

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^T=(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)^T=\mathbf{0}，\text{或 } \mathbf{A}\mathbf{B}^T=\mathbf{0}$$

（2）第二关系式 $\mathbf{BC}^T=\mathbf{0}$ 可证明如下：

根据（1.5a）式 $\mathbf{C}\mathbf{i}_b=\mathbf{0}$，用（1.9）式 $\mathbf{B}^T\mathbf{i}_l=\mathbf{i}_b$ 代入，得：

$$\mathbf{C}\mathbf{B}^T\mathbf{i}_l=\mathbf{0}$$

因为环路电流 $\mathbf{i}_l\neq 0$，故有 $\mathbf{BC}^T=\mathbf{0}$。

根据（1.10）和(1.11)式，如果我们知道相连矩阵 **A**，就可以求出连结矩阵 **B** 和分割矩阵 **C**。由于拓扑矩阵最简便的记录方法是记录相连矩阵 **A**，也就是计算机输入的原始数据。**B** 和 **C** 都要有一定的取向，才能使 $\mathbf{B}_c$ 和 $\mathbf{C}_T$ 为单位矩阵，所以实际上 **B** 和 **C** 都是从相连矩阵 **A** 来求出的。

实际上我们只要计算出 $\mathbf{B}_T$ 和 $\mathbf{C}_C$ 就可以了，不难示出，它们和相连矩阵

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_T \vdots \mathbf{A}_C]$$

之间的关系是：

$$\mathbf{B}_T=-\mathbf{A}_C^T[\mathbf{A}_T^T]^{-1} \tag{1.12}$$

$$\mathbf{C}_C=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A}_C \tag{1.13}$$

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}_T^{-1}\mathbf{A} \tag{1.14}$$

式中 $\mathbf{A}_T^{-1}$ 代表 $\mathbf{A}_T$ 的逆矩阵。

必须注意，在算出 $\mathbf{B}_T$ 和 $\mathbf{C}_C$ 前，首先要取好一定的树 T，决定那些是树的支臂那些是弦。在自动设计情况下，计算机必须有自动选出树 T 的能力。一种电路分析程序（名为SCEPTRE）中选择树的程序示出在 §5.3 中。该程序中 **B** 和 **C** 都是从 **A** 算出的。

第二章　标准支臂和恒参量线性电路

§2.1　标 准 支 臂

在上一章中，从拓扑图的节点、支臂关系指定了三种矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$，并且得出矩阵和克希霍夫定律的几个关系式：

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}\mathbf{i}_b=\mathbf{0}; & \mathbf{A}^T\mathbf{v}_n=\mathbf{v}_b \\ \mathbf{B}\mathbf{v}_b=\mathbf{0}; & \mathbf{B}^T\mathbf{i}_l=\mathbf{i}_b \\ \mathbf{C}\mathbf{i}_b=\mathbf{0} & \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

它们表示出支臂电压 $\mathbf{v}_b$，支臂电流 $\mathbf{i}_b$，节点电压 $\mathbf{v}_n$ 和环路电流 $\mathbf{i}_l$ 与拓扑矩阵的关系。如果我们要进一步解恒参数量线性电路，我们必须定出每个支臂中的实际内容，即支臂中包括怎样的具体元件，例如电阻、电容、电感等，还有外加的独立电流源、电压源等等；因此我们需要定出一种标准的支臂，以便装入拓扑图中，构成实际的线路图。

我们可以定出初步的标准支臂图（图 2.1），其中包括：

（1）外加独立电压源 v_g；

（2）外加独立电流源 i_g；

（3）电阻 R（或电导 G）；

（4）电容 $C\left(\text{或倒电容 } S=\dfrac{1}{C}\right)$；

（5）电感 $L\left(\text{或倒电感 } \Gamma=\dfrac{1}{L}\right)$。

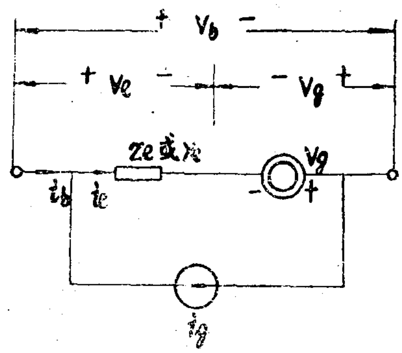

图 2.1　包括外加独立源的标准支臂

后三者可用元件的阻抗 z_e 或导纳 y_e 来代表（图 2.1）。如果支臂中没有外加电源，则 $v_g=i_g=0$；如果没有外加元件，z_e 或 y_e 就可以用来代表外加电源的内阻。注意图中所规定的电压、电流的极性和方向（各种文献中没有统一规定）。图中元件中的电流是 i_e，元件两端的电压是 v_e。这样支臂电压 v_b，支臂电流 i_b 有下列关系式：

$$\left.\begin{array}{ll} \overset{(M\times 1)}{\mathbf{v}_b}=\mathbf{v}_e-\mathbf{v}_g & \text{或 } \overset{(M\times 1)}{\mathbf{v}_e}=\mathbf{v}_b+\mathbf{v}_g \\ \mathbf{i}_b=\mathbf{i}_e-\mathbf{i}_g & \text{或 } \mathbf{i}_e=\mathbf{i}_b+\mathbf{i}_g \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

上式已写成向量公式，其中：

$$\mathbf{v}_b\triangleq[v_{b1},v_{b2},\cdots v_{bM}]^T,\quad \mathbf{v}_e\triangleq[v_{e1},v_{e2},\cdots v_{eM}]^T \text{ 等。}$$

拓扑图的支臂数为 M，独立节点数为 N。

根据欧姆定律，可以写出：

$$\overset{[M\times1]}{\mathbf{v}_e}=\overset{[M\times M]}{\mathbf{Z}_e}\overset{[M\times1]}{\mathbf{i}_e} \qquad 或\mathbf{i}_e=\mathbf{Y}_e\mathbf{v}_e \tag{2.3}$$

其中 $\mathbf{Z}_e$和$\mathbf{Y}_e$是$[M\times M]$矩阵。在交流稳态和不计互感的情况下，可以写成：

$$\overset{[M\times M]}{\mathbf{Z}_e}=\overset{[M\times M]}{\mathbf{R}}+\frac{1}{j\omega}\overset{[M\times M]}{\mathbf{S}}+j\omega\overset{[M\times M]}{\mathbf{L}} \tag{2-4-a}$$

$$\overset{[M\times M]}{\mathbf{Y}_e}=\overset{[M\times M]}{\mathbf{G}}+\frac{1}{j\omega}\overset{[M\times M]}{\Gamma}+j\omega\overset{[M\times M]}{\mathbf{C}} \tag{2.4-b}$$

式中 $S=\frac{1}{C}$，$\Gamma=\frac{1}{L}$。

从公式（2.3）可见，在无互感的情况下，$\mathbf{Z}_e$，$\mathbf{Y}_e$ 都是对角线矩阵，例如：

$$\mathbf{Y}_e=\begin{bmatrix} \frac{1}{R_{11}} & & & & & \\ & \frac{1}{R_{22}} & & & \mathbf{0} & \\ & & j\omega C_{33} & & & \\ & & & j\omega C_{44} & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{1}{j\omega L_{66}} \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

所以公式（2.4-b）中的 $\mathbf{G},\Gamma,\mathbf{C}$ 等矩阵比公式（2.5）的更是希疏了。由于 $\mathbf{Y}_e,\mathbf{Z}_e$ 都是对角线矩阵，故有 $\mathbf{Z}_e=\mathbf{Y}_e^{-1}$。

在直流情况下，电容 C 相当于开路，电感 L 相当于短路，在实际情况下，计及电容及电感中的损耗，电容可以用它的损耗电阻（例如 10 兆欧）来代替，电感也可用损耗电阻（例如 0.1 欧）来代替。

上面示出了初步标准支臂的情况，其中尚未讨论非独立电源和互感的影响，在电路分析命题中，一般给定的是外加电源 $\mathbf{v}_g,\mathbf{i}_g$，元件 $\mathbf{Z}_e$ 或 $\mathbf{Y}_e$，再加上上一章的拓扑矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 等，以及拓扑矩阵的公式（2.1）；需要求的是 $\mathbf{v}_b,\mathbf{i}_b,\mathbf{v}_e,\mathbf{i}_e$，即支臂和元件上的电压、电流等，以及与之有关的参数，如功率等。

§2.2 节点分析法

恒参量线性电路的分析方法有节点分析法，环路分析法，以及直接分析法[3]。对一般电子线路来说，节点的数目比支臂的数目为甚少，因此采用节点分析法比环路分析法为简单。而且每一节点相对于参考节点间的电压是唯一地决定的，应用节点上电流为零的条件就有充分的公式来求出节点上的电压。在环路分析法中，在电路比较复杂时要选择独立的环路是较为困难的，所以下面仅讨论节点分析法。节点分析法与电路的一般节点电流法相似，只是更有系统地运用了拓扑矩阵 $\mathbf{A}$。

节点分析法中首先要解出节点电压 $\mathbf{v}_n$，然后根据 $\mathbf{v}_n$ 分别求出 $\mathbf{v}_b,\mathbf{i}_b,\mathbf{v}_e,\mathbf{i}_e$ 等。其方法如下。

自公式（2.2)和(2.1)，有：

$$v_b = v_e - v_g = A^T v_n \qquad (2.6)$$

并且有：
$$A i_b = A(i_e - i_g) = 0 \qquad (2.7)$$

或
$$A i_e = A i_g$$

用公式 $i_e = Y_e v_e$ 代入上式，得：

$$A Y_e v_e = A i_g \qquad (2.8)$$

把(2.6)式中的 v_e 代入上式，有：

$$A Y_e (A^T v_n + v_g) = A i_g \qquad (2.9)$$

解 v_n，得：

$$A Y_e A^T v_n = A i_g - A Y_e v_g \qquad (2.10)$$

因为 $\overset{[N\times M]}{A}\ \overset{[M\times M]}{Y_e}\ \overset{[M\times N]}{A^T}$ 是$[N\times N]$方“矩阵”，在此方阵的逆矩阵存在情况下，令：

$$A Y_e A^T \triangleq Y_n \qquad (2.11)$$

Y_n 称为“节点导纳矩阵”，则：

$$Y_n v_n = A i_g - A Y_e v_g \qquad (2.12)$$

上式左边 Y_n 是由电路元件 Y_e 和电路构型 A 所决定。右边是外加电源的向量 i_g 和 v_g 的等效型式，从而求解 v_n。在直流和交流稳态情况下，上式相应是实数和复数的代数方程系，可以用高斯消去法（见§3.5）来求解 v_n。如果用 i_s 来代表上式右部：

$$i_s \triangleq A i_g - A Y_e v_g \qquad (2.13)$$

则 v_n 的解常用增广矩阵的型式来表出：

$$v_n \triangleq [Y_n \ \vdots\ i_s] \qquad (2.14)$$

用高斯消去法时 v_n 呈现在此增广矩阵的第$(N+1)$列中。

如果用逆矩阵的求解法，v_n 也可写成：

$$v_n = Y_n^{-1}(A i_g - A Y_e v_g) \qquad (2.15)$$

在节点电压向量 v_n 求出后，不难求出 v_b, i_b, v_e, i_e，应用的公式如下：

$$v_b = A^T v_n \qquad (2.16)$$

$$i_b = i_e - i_g = Y_e v_e - i_g$$
$$= Y_e(v_b + v_g) - i_g \qquad (2.17a)$$
$$= Y_e v_b + Y_e v_g - i_g \qquad (2.17б)$$

$$v_e = v_b + v_g \qquad (2.18)$$

$$i_e = i_b + i_g \qquad (2.19)$$

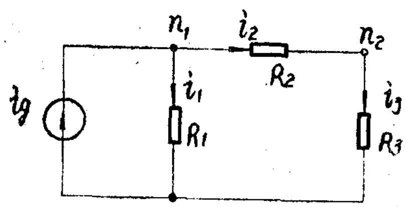

图 2.2　例题

例（2.1） 用节点分析法写出图中公式，并与一般节点电流法比较。

节点分析法

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c}\\ n_1\\ n_2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}b_1 & b_2 & b_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\mathbf{Y}_e=\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{i}_g=\begin{pmatrix}i_g\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_g=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_e\mathbf{A}^T\mathbf{v}_n=\mathbf{A}\mathbf{i}_g$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{R_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{v}_n$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}i_g\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{n1}\\ v_{n2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_g\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}, & -\frac{1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2}, & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{n1}\\ v_{n2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i_g\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{n1}-\frac{1}{R_2}v_{n2}=i_g\\ -\frac{1}{R_2}v_{n1}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_{n2}=0\end{cases}$$

节点电流法

$$i_1=\frac{v_{n1}}{R_1}$$

$$i_2=\frac{v_{n1}-v_{n2}}{R_2}$$

$$i_3=\frac{v_{n2}}{R_3}$$

或
$$\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1} & 0\\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}\\ 0 & \frac{1}{R_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{n1}\\ v_{n2}\end{pmatrix}$$

因
$$i_g=i_1+i_2$$
$$i_2=i_3$$

$$\begin{pmatrix}i_g\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & +1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1} & 0\\ \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}\\ 0 & \frac{1}{R_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{n1}\\ v_{n2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{n1}\\ v_{n2}\end{pmatrix}$$

$$i_g=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_{n1}-\frac{1}{R_2}v_{n2}$$

$$0=-\frac{1}{R_2}v_{n1}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_{n2}$$

从上例可见，采用了拓扑矩阵 **A** 后，计算就系统化了，便于计算机逐步求解了。