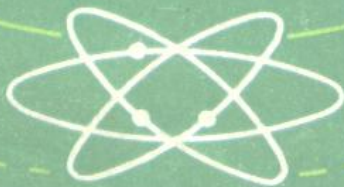


—高等学校教材—

天线原理

西北电讯工程学院 魏文元 宫德明 陈必森 编



国防工业出版社

天 线 原 理

西北电讯工程学院
魏文元 宫德明 陈必森 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书由工科电子类专业有关教材编审委员会评选审定，并推荐出版。

全书共十章，注重线天线和面天线基本理论。内容包括：天线电性能参数的定义和推导计算；天线阵的方向特性；多元耦合振子阵的阻抗；地面对天线的方向性和阻抗的影响；缝隙天线；微带天线；常用宽频带天线；矩形和圆形光壁喇叭、多模喇叭以及波纹喇叭；单反射面和双反射面天线（包括赋形波束天线和修改反射面天线）；天线测量等。书中系统地分析叙述天线工作原理和设计方法以及天线问题综合；同时还适当介绍一些新的分析计算方法和新近天线内容，增设天线计算机辅助设计和电性能参数计算机程序。书末附有习题。

本书适用对象为电磁场与微波技术专业的大学本科学生，也可供其他专业选用和天线工程技术人员参考。

天 线 原 理

西北电讯工程学院

魏文元 宫德明 陈必森 编

责任编辑 耿新暖

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张 22 508千字

1985年6月第一版 1985年6月第一次印刷 印数：0,001—5,800册

统一书号：15034·2907 定价：4.05元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校，特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》，中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二~一九八五年教材编审出版规划，列入规划的教材、教学参考书、实验指导书共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编者、各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为 提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

本教材系由电磁场与微波技术教材编审委员会天线与电波编审小组评选审定，并推荐出版。

本教材由西北电讯工程学院魏文元担任主编，解放军通信工程学院沈铁汉教授担任主审。编审者均依据天线与电波编审小组审定的编写大纲进行编写和审阅。

本课程的参考教学时数为80学时。其主要内容为：线天线与面天线基本理论；天线特性参数的定义和推导计算；常用天线工作原理和设计方法；天线问题综合等等。为适应不专门开设天线测量课程的院校需用，本书最后一章介绍常规天线测量内容。书中除基本理论外，尽量使一些内容章节保持其独立性，以便供不同要求时选用。为适应天线技术的发展，本书还介绍了一些新的天线分析计算方法。随着现代计算技术的迅速发展和电子计算机的普遍使用，为培养学生分析计算天线问题的能力，书中设有天线的计算机辅助设计内容，附有一些参数的计算机程序，并选择少量使用计算机的习题。各章习题附于书末。

本书可供从事天线工程技术的人员阅读参考。

本教材由宫德明编写第一、二、六章以及第五章中的微带天线，陈必森编写第三、四、十章以及第五章中的其余部分，魏文元编写第七、八、九章并统编全稿。参加审阅工作的还有汪茂光副教授。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

一九八四年四月

目 录

绪论	1
第一章 电磁场方程及其解	4
§ 1.1 电磁场基本方程	4
§ 1.2 位函数及其解——矢位法	8
§ 1.3 辐射条件	11
§ 1.4 电流元的电磁场	12
§ 1.5 磁流、磁荷与对偶定理	15
§ 1.6 磁流元的电磁场	18
第二章 对称振子；天线的基本电参数	20
§ 2.1 对称振子的电流分布	20
§ 2.2 辐射方向图 and 对称振子的方向图	24
§ 2.3 辐射功率和辐射电阻	30
§ 2.4 有效长度	33
§ 2.5 方向系数	34
§ 2.6 输入阻抗及对称振子的输入阻抗	39
§ 2.7 天线的效率和增益	45
§ 2.8 接收天线	47
§ 2.9 天线的极化	53
§ 2.10 天线的带宽	56
§ 2.11 对称振子的平衡馈电	57
第三章 天线阵的方向性	61
§ 3.1 离散元直线阵	61
§ 3.2 均匀直线阵	64
§ 3.3 均匀直线阵的方向性分析	72
§ 3.4 不等幅等间距边射直线阵	79
§ 3.5 边射阵最优方向图的综合与分析	83
§ 3.6 离散元平面阵、立体阵和圆阵	91
§ 3.7 连续线源	102
§ 3.8 理想导电平面上天线的方向性	108
第四章 对称振子阵的阻抗	115
§ 4.1 二元耦合对称振子的阻抗	115
§ 4.2 感应电动势法	117
§ 4.3 对称振子的互阻抗和自阻抗	119
§ 4.4 无源振子	125
§ 4.5 理想导电平面上对称振子阵的辐射阻抗	127
§ 4.6 多元对称振子阵的阻抗	128
§ 4.7 耦合对称振子阵的输入阻抗	130

第五章 缝隙天线和微带天线	133
§ 5.1 巴俾涅原理和缝隙天线	133
§ 5.2 矩形波导缝隙天线	137
§ 5.3 波导缝隙天线阵	141
§ 5.4 微带天线	147
第六章 常用宽频带天线及引向天线	152
§ 6.1 行波单导线的辐射	152
§ 6.2 菱形天线	154
§ 6.3 螺旋天线	158
§ 6.4 对数周期天线	163
§ 6.5 引向天线	168
第七章 面天线基本理论	176
§ 7.1 基本理论及求解方法	176
§ 7.2 远区场	184
§ 7.3 惠更斯辐射元	187
§ 7.4 面天线的电性能参数	187
§ 7.5 平面口径绕射问题	189
第八章 波导辐射器和喇叭天线	206
§ 8.1 矩形波导辐射器	206
§ 8.2 圆形波导辐射器	208
§ 8.3 矩形喇叭天线	213
§ 8.4 圆锥喇叭天线	226
§ 8.5 喇叭天线设计	228
§ 8.6 喇叭天线的相位中心	229
§ 8.7 多模喇叭与波纹喇叭	232
§ 8.8 波导辐射器和喇叭天线的方向图精确计算	239
第九章 反射面天线	241
§ 9.1 抛物面天线的分析方法和几何特性	241
§ 9.2 抛物面天线的辐射场	243
§ 9.3 方向系数和增益	256
§ 9.4 馈源	260
§ 9.5 抛物面天线的偏焦特性及其应用	262
§ 9.6 反射面对馈源的影响及其消除方法	267
§ 9.7 扇形波瓣	270
§ 9.8 天线噪声温度	272
§ 9.9 抛物面天线的副瓣辐射	273
§ 9.10 卡塞格伦天线的工作原理与几何特性	274
§ 9.11 卡塞格伦天线辐射场计算	276
§ 9.12 影响反射面天线方向特性的因素	279
§ 9.13 反射面天线的设计方法	284
§ 9.14 其他型式的双反射面天线	285
§ 9.15 赋形波束反射面天线	286

第十章 天线测量	295
§ 10.1 测试条件	295
§ 10.2 方向图测量	300
§ 10.3 方向系数、增益和效率测量	304
§ 10.4 输入阻抗测量	307
习题	311
附录	325
I. 封闭面 S 内的场源在 S 面上建立的 A 和 $\frac{\partial A}{\partial n}$ 对 S 面内的点的场无贡献	325
II. 证明式 (7-10) 中, 当 r 趋于无限大时, 表面 σ_1 的积分为零	326
III. 证明式 (7-21) 和 (7-22)	327
IV. 计算机某些电参数的计算机程序	329
V. 计算机辅助设计引向天线的几个主要子程序	340
参考书刊	343

结 论

通信、雷达、导航、广播、电视等无线电技术设备，都是通过无线电波来传递信息的，都需要有无线电波的辐射和接收。在无线电技术设备中，用来辐射和接收无线电波的装置称为天线。天线和发射机、接收机一样，也是无线电技术设备的一个重要组成部分。

显然，天线的作用首先在于辐射和接收无线电波。但是能辐射或接收电磁波的东西不一定都能用来作为天线。任何高频电路，只要不被完全屏蔽，都可以向周围空间或多或少地辐射电磁波，或从周围空间或多或少地接收电磁波。但是任意一个高频电路并不一定能用作天线，因为它的辐射或接收效率可能很低。要能够有效地辐射或接收电磁波，天线在结构和形式上必须满足一定的要求。例如象平行双导线传输线这样的封闭结构就不能用作天线，因为双导线传输线在周围空间激发的电磁场很微弱。图 0-1 表示由平行双导线传输线演变为天线的过程。终端开始的平行双导线传输线的线上电流呈驻波分布〔如图 0-1(a) 所示〕。在两根互相平行的导线上，电流方向相反，线间距离 d 又远远小于波长，它们所激发的电磁场在两线外部的大部分空间由于相位相反而互相抵消。如果将两线末端逐渐张开，如图 0-1(b) 所示，辐射将会逐渐增强。当两线完全张开时，如图 0-1(c) 所示，张开的两臂上电流方向相同，它们在周围空间激发的电磁场只在一定方向由于相位关系而互相抵消，在大部分方向则或者互相叠加，或者部分叠

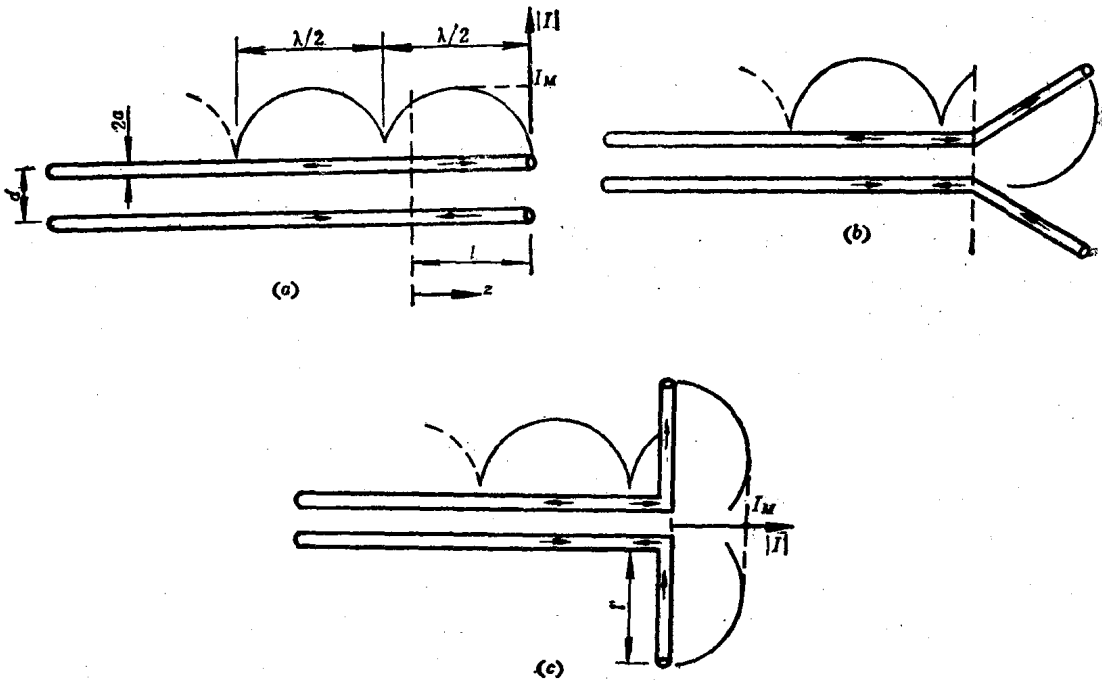


图0-1 将末端开路的平行双导线传输线张开形成对称振子天线
(a) 末端开路的双导线传输线；(b) 双导线逐渐张开；(c) 对称振子天线。

加、部分抵消，使辐射显著增强。这样的结构称为开放式结构。由末端开路的平行双导线传输线张开而成的天线，就是通常的对称振子天线。

其次，根据无线电技术设备的任务不同，常常还要求天线不是向所有方向均匀地辐射（或对所有方向具有同等的接收能力），而是只向某个特定的区域辐射（或只接收来自特定区域的无线电波），在其它方向不辐射或辐射很弱（接收能力很弱或不能接收）。也就是说，要求天线具有所谓方向性。例如，就雷达而言，它的任务是搜索或跟踪特定的目标。如果天线不具有尖锐的方向性，就无法辨别和测定特定目标的位置。而且，如果天线没有方向性，对发射天线来说，它所辐射的功率中只有很少一部分到达所需要的方向，大部分功率浪费在不需要的方向上；对接收天线来说，在接收到所需要的信号同时，还接收到来自其它方向的干扰和噪声，甚至使信号完全淹没在干扰和噪声中。因此，一副好的天线，在有效地辐射或接收无线电波的同时，还应该具有为完成某种任务而要求的方向特性。

天线辐射的是无线电波，接收的也是无线电波，然而，发射机通过馈线送入天线的并不是无线电波，接收天线也不能把无线电波直接经馈线送入接收机，其中必须进行能量的转换。下面我们以无线电通信设备为例分析一下信号的传输过程，进而说明天线的能量转换作用。

图 0-2 是进行无线电通信时，从发射机到接收机信号通路的简单方框图。在发射端，发射机产生的已调制的高频振荡电流（能量）经馈电设备传输到发射天线（馈电设备可随频率和形式的不同，直接传输电流波或导引电磁波——称为导波），发射天线将高频电流或导波（能量）转变成无线电波——自由电磁波（能量）向周围空间辐射；在接收端，无线电波（能量）通过接收天线转变成高频电流或导波（能量）经馈电设备传送到接收机。

从上述过程可以看出，天线除了能有效地辐射或接收无线电波外，还能完成高频电流或导波（能量）到同频率无线电波（能量）的转换，或者完成无线电波（能量）到同频率的高频电流或导波（能量）的转换。所以，

天线还是一个能量转换器。一副好的天线，就是一个好的能量转换器。

天线的型式很多，为了便于研究，可以根据不同情况进行分类。

按用途分类，有发射天线，接收天线和收发共用天线。

按使用范围分类，有通信天线，雷达天线，导航天线，测向天线，广播天线，电视天线等。

按天线特性分类，从方向特性分，有强方向性天线，弱方向性天线，定向天线，全向天线，针形波束天线，扇形波束天线等等；从极化特性分，有线极化（垂直极化和水平极化）天线，圆极化天线和椭圆极化天线；从频带特性分，有窄频带天线，宽频带天线和超宽频带天线。

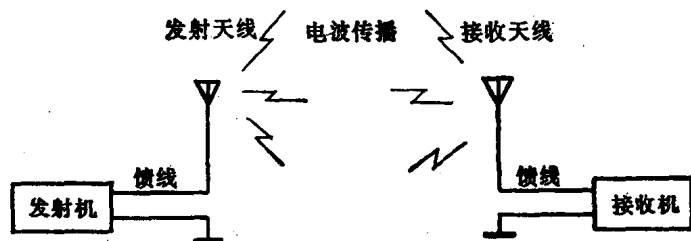


图0-2 无线电通信系统中的信号通道简单方框图

按馈电方式分类，有对称天线，不对称天线。

按天线上的电流分类，有行波天线，驻波天线。

按使用波段分类，有长波、超长波天线，中波天线，短波天线，超短波天线和微波天线。

按天线外形分类，有T形天线， Γ 形天线，V形天线，菱形天线，鱼骨形天线，环形天线，螺旋天线，喇叭天线，反射面天线等等。

此外，还发展起一些新型天线，如单脉冲天线，相控阵天线，微带天线，自适应天线等等。

从便于分析和研究天线的性能出发，可以将大部分天线按其结构型式分为两大类：一类是由半径远小于波长的金属导线构成的线状天线——称为线天线，另一类是用尺寸大于波长的金属或介质面构成的面状天线——称为面天线。线天线主要用于长、中、短波波段，面天线主要用于微波波段，超短波波段则两者兼用。线天线和面天线的基本辐射原理是相同的，但分析方法则有所不同。

把天线和发射机或接收机连接起来的馈线系统也是无线电技术设备的必要组成部分。馈线的形式随频率不同而不同，它可以是双线（或四线）传输线，同轴线传输线，波导，微带线等等。由于馈线系统和天线的联系十分紧密，有时把天线和馈线系统看成一个部件，统称天线馈线设备或简称天馈（天线）设备。

研究天线问题，实质上是研究天线所产生的空间电磁场分布，以及由空间电磁场分布所决定的天线特性。空间任一点的电磁场满足电磁场方程——麦克斯韦(Maxwell)方程和边界条件。因此，求解天线问题实质上是求解电磁场方程并满足边界条件，天线问题实质上是电磁场问题，它的理论基础是电磁场理论。

电磁场方程主要是两个一阶非齐次线性联立的偏微分方程，它的求解方法有很多，通常可以归结为两类：直接方法和间接方法。所谓直接方法，是将两个场量（电场和磁场）的一阶线性偏微分方程化成一个场量的二阶偏微分方程（矢量波动方程），通过求解该二阶偏微分方程直接求得场量。间接方法则是从麦克斯韦方程出发，引入辅助函数，通过求解辅助函数求解电磁场。无论是直接方法还是间接方法，都归结为求解一个齐次或非齐次的标量或矢量波动方程——二阶线性偏微分方程的问题。应当指出，天线所研究的问题是求解特定条件下的麦克斯韦方程，所谓特定条件，是指激励条件、边界条件和辐射条件（辐射条件也可以认为是无限远处的边界条件）。严格求解波动方程并考虑上述条件是十分困难的，在实际问题中，往往将条件理想化，进行一些近似处理，从而得到近似结果，这是天线工程中最常用的方法。

本课程作为天线的一门原理课程，我们不准备详细介绍求解天线电磁场问题的各种严格理论，而是首先求解基本辐射单元（电流元、磁流元和惠更斯元）的电磁场，并利用电磁场的叠加定理求得天线的电磁场。由于天线的种类十分繁多，我们不可能也没有必要逐个加以讨论，而是着重介绍天线的基本理论和基本分析方法，围绕基本理论和基本分析方法的学习，还讨论了一些常用的典型天线。

本课程的教学时数为80学时。

本书中出现的各物理量全部采用国际标准化组织(SIO)推荐的MKS(m, kg, s)制，称为SI单位制。

第一章 电磁场方程及其解

天线的理论基础是电磁场理论。电磁场理论我们已在《电磁场理论》课程中学习过。为了承前启后，我们首先简要地叙述一下电磁场理论的一些主要结论，然后加以扩展，讨论天线的一些最基本问题，包括求解电流元和磁流元的电磁场问题。

§ 1.1 电磁场基本方程

电磁场理论的核心，是描述空间电场、磁场间以及场与电荷、电流间相互关系普遍规律的电磁场基本方程。电磁场基本方程包括麦克斯韦方程、边界条件、电流连续性方程、媒质特性方程以及由它们推导出来的电磁场波动方程。

一 麦克斯韦方程

麦克斯韦方程是在实验基础上总结出来的，它的数学表达形式有两种，一种是微分形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad (1-1)$$

另一种是积分形式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \end{array} \right. \quad (1-2)$$

式中 \mathbf{E} ——电场强度矢量 (V/m);
 \mathbf{H} ——磁场强度矢量 (A/m);
 \mathbf{D} ——电感应强度矢量 (C/m²);
 \mathbf{B} ——磁感应强度矢量 (T);
 \mathbf{J} ——体电流密度矢量 (A/m²);
 ρ ——体电荷密度 (C/m³);
 Q ——电荷量 (C)。

麦克斯韦方程表明，不仅电荷能产生电场，电流能产生磁场，而且变化的电场也能产生磁场，变化的磁场又能产生电场，从而揭示出电磁波的存在。

二 边界条件

过两种不同媒质的分界面，媒质参数要发生突变，引起某些场分量的不连续，它们的空间导数不存在，麦克斯韦方程的微分形式不再适用。可以从麦克斯韦方程的积分形式导出媒质分界面上电磁场的边界条件：

$$\begin{cases} \hat{n} \times (H_2 - H_1) = J_s \\ \hat{n} \times (E_2 - E_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (B_2 - B_1) = 0 \\ \hat{n} \cdot (D_2 - D_1) = \rho_s \end{cases} \quad (1-3)$$

式中 H_1 、 E_1 、 B_1 、 D_1 、和 H_2 、 E_2 、 B_2 、 D_2 ——分别是媒质 1 和 2 中的磁场强度、电场强度、磁感应强度、电感应强度矢量；

J_s 和 ρ_s ——分界面上的面电流密度和面电荷密度；

\hat{n} ——分界面的法线方向单位矢量，从媒质 1 指向媒质 2。

边界条件是麦克斯韦方程在边界上的形式，表述分界面上磁场强度的切线分量发生突变，突变值等于分界面上的面电流密度；电感应强度的法线分量也发生突变，突变值等于分界面上的面电荷密度；电场强度的切线分量和磁感应强度的法线分量在分界面的两侧则是连续的。

如果媒质 1 是理想导体，由于导体内部的场量为零，式 (1-3) 变为

$$\begin{cases} \hat{n} \times H_2 = J_s \\ \hat{n} \times E_2 = 0 \\ \hat{n} \cdot B_2 = 0 \\ \hat{n} \cdot D_2 = \rho_s \end{cases} \quad (1-4)$$

三 连续性方程和媒质的特性方程

根据电荷守恒定律，电流与电荷的联系为

$$\oint_S J \cdot ds = - \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (1-5)$$

$$\nabla \cdot J = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1-6)$$

式 (1-5) 和式 (1-6) 分别称为积分形式和微分形式的连续性方程。

麦克斯韦方程的四个方程中仅有两个是独立的，而未知量却有六个，考虑到连续性方程，要得到麦克斯韦方程的解，尚需三个方程，它们是

$$\begin{cases} D = \epsilon E \\ B = \mu H \\ J = \sigma E + J_0 \end{cases} \quad (1-7)$$

式中 J_0 ——外加电流密度；

ϵ 、 μ 、 σ ——媒质的介电常数 (F/m)、磁导率 (H/m)、电导率 (S/m)。最一般情况下，这三个媒质参数是张量。在线性各向同性媒质中，这些媒质参数不是时间的函数。代入式 (1-7) 后，麦克斯韦方程变为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \end{cases} \quad (1-8)$$

在真空(空气)中, $\epsilon = \epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9} \text{F/m}$, $\mu = \mu_0 = (4\pi) \times 10^{-7} \text{H/m}$, $\sigma = \sigma_0 = 0$ 。

式(1-7)是反映媒质特性的,称为媒质的特性方程,是求解麦克斯韦方程的三个辅助方程。

四 玻印廷(Poynting)定理

空间电磁场的能量关系满足能量守恒定律。玻印廷定理是电磁场的能量守恒定律,考虑到电磁场的时间关系和能量的空间流动,玻印廷定理反映了电磁场的功率关系。设空间有任一封闭面 S ,所包围的体积为 V ,从麦克斯韦旋度方程出发,利用矢量公式:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

和散度定理:

$$\oint_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s}$$

可以导出:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 \right] dv = \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv \quad (1-9)$$

它表述体积 V 内能量的减少率等于从 V 内流出的功率通量与 V 内功率“损耗”之和。式中 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 是单位时间通过单位面积的能量,称为电磁场功率通量密度或玻印廷矢量,记为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1-10)$$

对于时谐电磁场,复数形式的玻印廷矢量为

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (1-11)$$

它的实部表示一个周期内的平均功率通量密度(本文讨论的场都是时谐场,为了书写方便,下面不再用“ \cdot ”表示复振幅,直接使用 $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ 表示复数玻印廷矢量)。

对于时谐场,由麦克斯韦方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H}^* = \mathbf{J}^* - j\omega\epsilon\mathbf{E}^* \end{cases}$$

重复前面的推导,并考虑到 $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}_0^* + \sigma\mathbf{E}^*$,可以得到

$$P_r = P_f + P_d + j2\omega(W_m - W_e) \quad (1-12)$$

式中 P_r ——外供给体积 V 内的平均功率,且

$$P_r = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dv \quad (1-12a)$$

P_f ——通过封闭面 S , 从体积 V 内流出的平均功率, 且

$$P_f = \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{s} \quad (1-12b)$$

P_s ——体积 V 内平均热损耗功率, 且

$$P_s = \frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dv \quad (1-12c)$$

W_m ——体积 V 内平均贮存的磁能, 且

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{2} \mu |\mathbf{H}|^2 dv \quad (1-12d)$$

W_e ——体积 V 内平均贮存的电能, 且

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{E}|^2 dv \quad (1-12e)$$

式 (1-9) 和式 (1-12) 称为电磁场的玻印廷定理。

五 矢量波动方程

为了求解麦克斯韦方程, 将式 (1-8) 的第一方程和第二方程取旋度, 考虑到该式的第三方程和第四方程, 利用矢量公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E}$, 可以得到电磁场的矢量波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}_0}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{J}_0 \end{cases} \quad (1-13)$$

给定电流密度 \mathbf{J}_0 和电荷密度 ρ , 从求解矢量波动方程便可得到麦克斯韦方程的解。

对于时谐场源, 用 $j\omega$ 代替 $\partial/\partial t$, 式 (1-13) 变为

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = j\omega \mu \mathbf{J}_0 + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_0 \end{cases} \quad (1-14)$$

式中

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma \quad (1-15)$$

在非导电媒质中, $\sigma = 0$, 则有

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

这里的 k 称为波数。

式 (1-14) 称为矢量形式的非齐次亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程。在无源区域, $\mathbf{J}_0 = \rho = 0$, 它化为齐次亥姆霍兹方程:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

直接求解矢量波动方程得到电磁场解, 就是所谓的直接方法。但要指出, 满足麦克斯韦方程的场量必然满足矢量波动方程, 反之并不成立。因此, 通常是先求解一个场量的矢量波动方程, 再利用麦克斯韦方程求解第二个场量, 这样得到的结果既满足波动方程, 又满足麦克斯韦方程。

满足波动方程或麦克斯韦方程的场量解可有无穷多个, 其中满足具体问题的电磁场

边界条件的解，才是所需要的唯一解。

§ 1.2 位函数及其解——矢位法

在许多情况下，直接法求解电磁场有很多不方便之处，因此，往往采用间接方法。所谓间接法，就是不去直接求解麦克斯韦方程或场量的矢量波动方程，而是通过求解辅助函数以得到电磁场，因此也称为辅助函数法。在天线技术中，常用的辅助函数是矢量磁位和标量电位，简称矢位和标位。

一 矢位、标位及其波动方程

由麦克斯韦第三方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，引入辅助函数 \mathbf{A} ，即令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-17)$$

代入麦克斯韦第二方程，得

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1-18)$$

再引入另一辅助函数 Φ ，即令

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

得

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (1-19)$$

所引入的辅助函数 \mathbf{A} 和 Φ 分别称为矢位和标位。求解 \mathbf{A} 和 Φ ，利用式 (1-17) 和式 (1-19) 可以求得电磁场。为了得到 \mathbf{A} 和 Φ 所满足的方程，将式 (1-17) 和式 (1-19) 代入麦克斯韦第一方程，利用矢量公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ，得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_0 + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu\sigma \Phi \right) \quad (1-20)$$

前面给出了矢位 \mathbf{A} 的旋度。只给出一个矢量的旋度是不能单值地确定它的。例如，若 \mathbf{A} 满足式 (1-17)，则 $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} + \nabla \psi$ 也满足式 (1-17)。场的这种性质称为规范不变性。为了能够单值地确定 \mathbf{A} 和 Φ ，可以引入一个附加条件：

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu\sigma \Phi = 0 \quad (1-21)$$

式 (1-21) 称为洛伦兹 (Lorentz) 条件，它表达了 \mathbf{A} 与 Φ 的关系。由洛伦兹条件，利用式 (1-20) 和麦克斯韦第四方程可以推导出电流连续性方程 (1-6)。因此，洛伦兹条件实质上反映了交变场中的连续性原理，故又称为位函数连续性方程。

将式 (1-21) 代入式 (1-20)，得到矢位 \mathbf{A} 的波动方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (1-22)$$

将式 (1-19) 两边取旋度，利用洛伦兹条件 (1-21) 和麦克斯韦第四方程，得到标位 Φ 的波动方程

$$\nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-23)$$

对于时谐场，如果观察点处 $\sigma = 0$ ，则洛伦兹条件变为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\mu\epsilon\Phi \quad (1-24)$$

而 \mathbf{A} 和 Φ 所满足的波动方程变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (1-25)$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-26)$$

式中 $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0$.

二 矢位法

求解式 (1-25) 和式 (1-26), 利用式 (1-17) 和式 (1-19) 可以得到电磁场解。事实上无须求解两个波动方程, 如果解出矢位 \mathbf{A} , 利用劳仑兹条件便可得到电磁场解, 这就是矢位法。

矢位 \mathbf{A} 的波动方程 (1-25), 在直角坐标系下, 可以写成三个标量波动方程

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x + k^2 A_x = -\mu J_{0x} \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y = -\mu J_{0y} \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_{0z} \end{cases} \quad (1-27)$$

这就是说, 求解矢量波动方程, 在直角坐标系下可以归结为求解三个标量波动方程, 其一般形式为

$$\nabla^2 A + k^2 A = -\mu J_0 \quad (1-28)$$

求解标量波动方程 (1-28), 可以应用格林定理: 设某个正则曲面 S 所包围的体积为 V , 对于 V 内和 S 上的调和函数 f 和 g , 有下式成立

$$\int_V [f \nabla^2 g - g \nabla^2 f] dv = \int_S \left[f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \quad (1-29)$$

式中对 n 的偏导数是 S 面上外法线方向偏导数, 即 \hat{n} 为 S 面的外法线方向单位矢量。适当地选择 f 和 g 为

$$\begin{aligned} f &= A(\mathbf{r}') \\ g &= \frac{e^{-jkR}}{R} \end{aligned}$$

其中 $R = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ 表示源点到场点的距离。当 $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ 时, 函数 g 出现奇点, 为了排除此奇点, 以场点 P 为中心, R_0 为半径作一小球, 设小球面积为 S_0 , 体积为 V_0 。(如图 1-1 所示), 然后应用格林定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_{V-V_0} \left[A(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \nabla^2 A(\mathbf{r}') \right] dv \\ &= \int_{S+S_0} \left[A(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial}{\partial n} A(\mathbf{r}') \right] ds \end{aligned} \quad (1-30)$$

将式 (1-28) 代入式 (1-30), 考虑到 $\nabla^2 g + k^2 g = 0$, 体积分变为

$$\int_{V-V_0} \left[A(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \nabla^2 A(\mathbf{r}') \right] dv = \int_{V-V_0} \frac{\mu J_0 e^{-jkR}}{R} dv$$

面积分可以写成两个面积分之和, 其中 S_0 面上的积分, 由于 $\partial/\partial n = -\partial/\partial R$, 利用积分中值定理, $R_0 \rightarrow 0$ 时变为

$$\int_{S_0} \left[A(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial}{\partial n} A(\mathbf{r}') \right] ds = 4\pi A(\mathbf{r})$$