希耳伯特空间问题集

P. R. 哈尔莫斯　著

上海科学技术出版社

希耳伯特空间问题集

P·R·哈尔莫斯 著

林　　辰 译

上海科学技术出版社

A HILBERT SPACE

PROBLEM BOOK

By

Paul R. Halmos

American Book Company, 1967

希耳伯特空间问题集

P. R. 哈尔莫斯 著

林 辰 译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 9.75 字数 254,000
1984 年11月第1版 1984 年11月第1次印刷
印数 1—7,500

统一书号: 13119·1171 定价: 1.55 元

序　言

学习数学的唯一途径是研究数学，这个原则是“自己动手”教学法，即苏格拉底式的教学法或得克萨斯 (Texas) 方法[注] 的基础，使用这个方法时，教师在学生和学习对象之间扮演一个博学全能但多半时间却是缄默寡言的审定人的角色. 尽管这样的方法通常是，而且也许必须是，口述的，但本书则试图用同样方法给出希耳伯特空间理论的某些课题的书面评述.

学习数学的正确方法是先看概念的定义和定理的陈述，然后把书放在一边，尝试着去发现合适的证明. 如果定理不是简单明显的，这个企图可能会失败，但读者也将同样地受到教益. 对于被动的读者来说，他总是跟着书本，尽管一些灵巧的令人惊奇的结果会象做一次常规计算那样容易地到手，但过了不久，当他必须依靠自己的时候，就会发现那些来得容易的东西去得也容易. 积极主动的读者由于找出了那些行不通的办法，他就处于更有利的地位，能够理解著作者的方法之所以成功的理由，以后他自己就能找到书本上所没有的答案.

本书就是为那些主动积极的读者们写的. 第一部分由问题组成，每个问题前面常介绍定义以及讨论这个问题的动机；有些问题后面有系(推论)和关于历史的评注. 大多数问题是欲证命题的陈述，但也有一些是提问(如：是否？是什么？)，有一些是带有挑逗性的要求(如：构造，确定). 第二部分很短，由提示组成. 每个提示是一个词或一段文字，通常为了帮助读者寻求解答. 提示本身不必是一个浓缩的解答，它可能仅仅指出我所认为的问题的核心.

[注] R. L. Moore 提倡一种以让学生自己动手证明定理、解决问题为主的数学教学方法，曾在得克萨斯大学推行，颇著成效；Halmos 认为这是与苏格拉底所说奥林匹克运动会的竞赛精神的混合物. 参阅美国数学月刊1977年第84卷第4期文《Moore 教学法》. ——译者注

有时在问题中隐藏着一个圈套，则提示可能有助于告诫读者不要太鲁莽地闯进去．第三部分最长，由解答组成，其内容依问题的性质分别为证明、答案或构造法．

提出这些问题是要对思考能力有所促进，而不是为了追求刻板的技巧细节．读者如果仅满足于提出狭义的解答．（这正是原来人们所要求于他的，他也这样做了），反而得不到要领，也领会不到其中许多乐趣．所以切莫只顾就题作答，还要思考有关的其他问题，要想到推广（如：如果算子非正规，则将如何？），想到特例（如：在有限维情形下将会怎样？）．是什么使一个断语成立？怎样一来它又会成为谬误？

如果你解不出一个问题，而提示也不能帮助你，第一步要做的事最好是继续去看另一个问题．如果没有解出的问题是一个命题，以后不要犹豫而不敢用它；用了它，甚至用错了它，都可能给求解该问题以有价值的启示．另一方面，如果你得到了一个问题的解，不管怎样，要看看提示，然后再看看解．可能你会找到你以前没有想到的改进、推广和特例．解中有时会介绍一些标准的术语，讨论该课题的某些历史，并且举出某些有关的参考文献．

本书的课题，其讨论范围是从相当标准的课本内容一直延伸到目前现有知识的边缘．我力图排除可按常规解答的那些沉闷乏味的问题；书中的每一个问题都曾一度使我感到疑难．我不想在书中各问题接触到的所有方向都达到最大的一般性．我的意图在交流思想和技巧，而让读者自己去推广．

为了从本书获得最大的益处，读者应该了解一般拓扑学、测度论、以及实和复分析的基本技巧和结果，我没有说明出处也不指出参考文献便使用了诸如拓扑的子基、准紧距离空间、Lindelöf 空间、连通性和网的收敛等概念，以及诸如具有可数基的紧空间可赋距离、紧空间的笛卡儿乘积是紧的等结果（参考：Kelley [1955]）．测度论方面：我使用了诸如 σ-体和 $\mathbf{L}^p$ 空间等概念，以及诸如 $\mathbf{L}^p$ 收敛序列有几乎处处收敛的子序列和勒贝格控制收敛定理等结果（参考：Halmos [1950 b]）．实分析方面，我至少需要绝对连续函数

的导数和 Weierstrass 多项式逼近定理的有关事实(参考:Hewitt-Stromberg[1965]). 复分析方面, 我需要诸如泰劳和罗朗级数, 次均匀(subuniform) 收敛和最大模原理等知识 (参考: Ahlfors [1953]).

本书不是希耳伯特空间理论的导论. 该理论的某些知识应是阅读本书的预备知识; 最少应在读本书时同时进行希耳伯特空间基础理论的学习. 较理想的是, 读者应了解类如 Halmos[1951] 开头两章的那些知识.

我试图指出我从哪里知道这些问题和解, 以及哪里可以得到关于这些问题的其它资料. 但在许多场合, 我不能找到有关参考文献. 当我把一个结果归于某人而没有附带地在括号中指出年份时(注上年份表明该资料来源的细节见于书末所附参考文献表中), 我是引证了口头交流的材料或未发表的预印本. 有时没有说明来源, 这不是申明那是属于我的创造, 很可能该结果是一个通俗的定理.

本书中记号和术语都用最标准的, 用时不加说明. 只要是论及希耳伯特空间的, 我都按照 Halmos[1951] 的用法, 但一些细节除外. 譬如说, 现在我用 f 和 g 表示矢量而不用 x 和 y (后者更宜于用以表示测度空间中的点之类); 又如, 为了与流行用法取得一致, 我用"核"代替"零空间". (该词有三种用法, 同时表示(1)零空间, (2)矩阵的(从离散到)连续的类比, (3)伴随着一个函数希耳伯特空间的再生函数, 这是一件憾事而又不可避免, 但它似乎不会引致任何混乱.) 偶然地, "核"(kernel) 和"值域" (range) 缩写成 ker 和 ran, "维数"(dimension)缩写成 dim, "迹"(trace)缩写成 tr, 而实部和虚部则如通常一样, 用 Re 和 Im 表示. 复数的"符号函数" (signum), 即 $z/|z|$ 或 0 依 $z\neq 0$ 或 $z=0$ 而定, 则用 sgn$z$ 表示. 希耳伯特空间的子空间的余维数就是其正交补的维数(或等价地说, 它所确定的商空间的维数). 记号 $\vee$ 用来表示张成空间, 于是 $\mathbf{M}\vee\mathbf{N}$ 就是包含 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的最小闭线性流形, 类似地, $\vee_j \mathbf{M}_j$ 是包含各个 $\mathbf{M}_j$ 的最小闭线性流形. 顺便地说, 子空间指

闭线性流形，而算子指有界线性变换[注1].

箭头有两种用法：$f_n \to f$ 表明序列 $\{f_n\}$ 趋于极限 f，而 $x \to x^2$ 表示由 $\varphi(x)=x^2$ 定义的函数 φ. 由于两矢量 f 和 g 的内积常用 (f, g) 表示，所以它们所构成的序对需要另一个记号，我使用 $\langle f, g\rangle$. 这引导到用尖括号包括一个矢量的诸坐标的系统用法，就象 $\langle f_0, f_1, f_2, \cdots\rangle$ 那样. 依据那种不大合理但却被广泛采用的办法，我既用大括号表示集，也用它来表示序列；这样，$\{x\}$ 是仅含一元素 x 的集，而 $\{x_n\}$ 是一个序列，其第 n 项是 x_n，$n=1, 2, 3, \cdots$. 这似乎会导致混乱，但联系上下文来看就不见得会这样. 我用 z^* 表示复数 z 的共轭复数. 这有可能使数学家们感到不安，但物理学家们广泛使用它，这种用法能与算子的伴随算子的标准记号协调一致，而且它在印刷上有方便之处（复数集 $\mathbf{M}$ 在映象 $z \to z^*$ 下的象是 $\mathbf{M}^*$，记号 $\overline{\mathbf{M}}$ 则指拓扑学上的闭包）.

多年来我一直坚持用 proper values 来称呼"特征值"，而反对那个通常用以指称它们的翻译得不彻底的德英混合词[注2]. 现在我认识到争论已经结束，eigenvalues 已经取得胜利. 在本书中我也用了这个词来称呼"特征值".

由于我用求解问题的方法教授希耳伯特空间理论已经多年，我感谢学生和同事中许多朋友对我的帮助，人数太多了，不能在这里一一提及他们的名字. 对他们各位我都一样怀着真诚的感激. 没有他们就不会有这本书. 脱离数学界，闭门著述，是写不出这一类书来的. 我应该向 Ronald Douglas, Eric Nordgren 和 Carl Pearcy 表达特殊的谢意，他们各位都校阅了全部手稿（的确几乎全部的手稿）并且帮助我免除了许多愚蠢的错误.

P·R·哈尔莫斯于密歇根大学

[注1] 本书中，"算子"都指自一空间到该空间本身中的有界线性变换.——译者注

[注2] 指 eigenvalues. proper values, eigenvalues 义同，通常译为"固有值"、"本征值"或""特征值"，本译本用"特征值". proper 为英语，eigen 原为德语，都有"固有的"，"特有的"，"本征的"，"专有的"，"自身的"等意义，value 为英语，其字义为"值". ——译者注

目　　录

问 题

第一章 矢量与空间

1. 二次型的极限. 希耳伯特空间的研究中主要关心的对象倒不是空间里的矢量，而是它上面的算子. 自称研究希耳伯特空间理论的大多数人实际上是研究算子理论. 这是由于矢量的代数及几何，线性泛函，二次型，子空间之类的对象都比算子理论容易而且已经相当好地得到了解决. 这些容易而且熟知的东西，某些是有用的，某些是有趣的，而且也许某些是两者兼备的.

开始时请先回忆，复矢量空间 $\mathbf{H}$ 上的双线性泛函有时被定义为 $\mathbf{H}$ 与其自身的笛卡儿乘积(空间)上的关于第一变元是线性的，关于第二变元是共轭线性的复值函数；见 Halmos[1951, 12 页][注]. 有些数学家，在这方面的论述或在其他一些更普遍的范围中，使用"半线性"代替"共轭线性"，还偶然用"型"代替"泛函". 因为在拉丁文中 sesqui 的意义是"一个半"，有人建议双线性泛函可以更精确地描述为一次半型(sesquilinear form).

在 Halmos [1951, 12 页] 中，二次型被定义为通过方程 $\varphi^{-}(f)=\varphi(f, f)$ 与一次半型 φ 相伴随的函数 φ^{-}(在那里，用记号 $\hat{\varphi}$ 代替 φ^{-}). 说得更确切些，二次型是这样的一个函数 ψ，存在一

[注] 这里正文中引用的文献都见本书末的参考文献栏. ——译者注

个一次半型 φ 使得 $\psi(f)=\varphi(f, f)$. 这样的存在性定义，甚至使最简单的代数问题，诸如两二次型的和是否都是二次型(是)，以及两个二次型的积是否都是二次型(否)，也成为棘手的.

问题 **1**. 一个二次型序列的极限是否一个二次型?

2. 线性泛函的表示. 黎斯表示定理说，对于希耳伯特空间 $\mathbf{H}$ 上的每一个有界线性泛函 ξ 必有 $\mathbf{H}$ 中一个矢量 g 与之相应，使得 $\xi(f)=(f, g)$ 对一切 f 成立. 这个陈述是“不变”的或“与坐标无关的”，因此根据流行的数学规范，(该陈述的)证明也必然地是如此. 麻烦的是，与坐标最无关系的证明 (就象 Halmos [1951, 32 页] 书中的那个证明) 虽是那么漂亮，却掩蔽了事物的实质.

问题 **2**. 求黎斯表示定理的一个坐标化的证明.

3. 严格凸性. 在实矢量空间中(因而，特别是在复矢量空间中)联结两矢量 f 和 g 的线段按定义就是形如 $tf+(1-t)g$ (此处 $0\leqslant t\leqslant 1$) 的矢量全体的集. 实矢量空间的子集是凸的，是指对于它所含有的任一对矢量说，它也含有联结它们的线段上的一切矢量. 凸性在现代矢量空间理论中起着日益重要的作用. 希耳伯特空间中已有那么丰富的其它更有力的结构，以致凸性对于它的作用，有时不如对于其它矢量空间的作用那样显而易见. 在希耳伯特空间中凸集的一个简易的例子是单位球，按定义，它就是满足 $\|f\|\leqslant 1$ 的矢量 f 全体的集. 另一例子是开单位球，即满足 $\|f\|<1$ 的矢量 f 全体的集. (可以把形容词“闭”字加于单位球，使与它的开的形式区别开来，但实际上这只在需要特别强调时才用到.) 这些例子即使在一维(复)希耳伯特空间的极端情形也具有几何兴趣; 这时它们分别约化为复平面上闭的和开的单位圆域.

如果 $h=tf+(1-t)g$ 是联结 f 和 g 的线段上的一点，又若 $0<t<1$ (着重点是 $t\neq 0$ 且 $t\neq 1$)，那末 h 称为这线段的一个内点. 如果凸集的一点不是该集中任一线段的内点，它就称为该集的一个端点. 复平面中单位闭圆域的端点就是它的周界(单位圆)上的一切点. 复平面中单位开圆域没有端点. 满足 $|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|\leqslant 1$