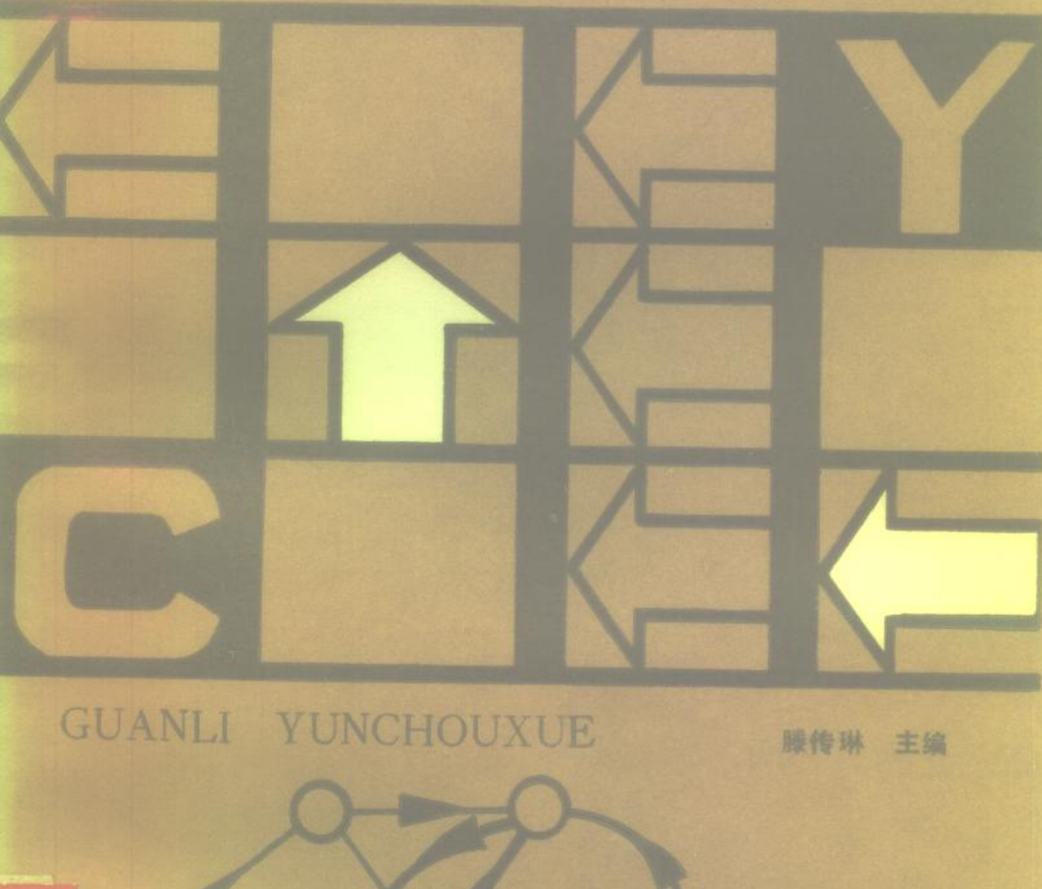
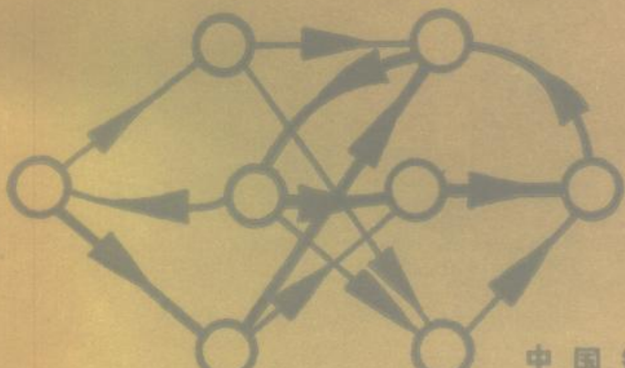
管理运筹学



GUANLI YUNCHOUXUE

滕传琳 主编



中国铁道出版社

管 理 运 筹 学

滕传琳　主编
朱松年
李致中　主审

中 国 铁 道 出 版 社
1986年·北京

管理运筹学
滕传琳　主编
中国铁道出版社出版
责任编辑　林瑞耕　黄燕
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
河北省邮电印刷厂印
开本：850×1168毫米1/32　印张：17.375　字数：459千
1986年11月第1版第1次印刷
印数：0001-10,000册　定价4.40元

前　　言

本书是为铁道运输管理专业编写的《管理运筹学》教科书，也可适用于其他管理工程专业。全书讲课时数为104学时，若不讲目录中带“*”的部分，讲课时数约为90学时。

我们在编写中，力求使本书做到以下几点：

一、为适应管理工程专业的需要，比一般教材加强了整数规划、网络规划、排队论等内容，增加了系统模拟内容。

二、为加强对学生建立数学模型能力的训练，本书编进了较多各具特色的例题，讲解建模的基本思路和技巧。教材内容及习题，都力求做到开阔学生思路，培养他们运用运筹学解决管理工作中实际问题的能力。

三、对算法的讲解，既注意数学上的逻辑性、严密性，又考虑到管理工程专业学生的数学基础及将来工作的需要，不作过多的数学推导和证明，对一些问题，还结合例题说明其经济意义，使之更易为管理工程专业学生接受和运用。

本书共分线性规划、整数规划、动态规划、网络规划、统筹方法、排队论、存贮论、决策论、系统模拟九部分。各部分内容由以下同志分工编写：

线性规划的第一章至第五章　滕传琳（兰州铁道学院运输系）；

线性规划的第六章　朱茂礼（西南交通大学运输工程系）；

整数规划　滕传琳；

动态规划　顾守淮（兰州铁道学院运输系）；

网络规划　傅家良（上海铁道学院运输管理系）；

统筹方法　池宪武（北方交通大学应用数理系）；

排队论　顾守淮；

存贮论　汤代焱（长沙铁道学院运输系）；

决策论　池宪武；

系统模拟　施其洲（上海铁道学院运输管理系）。

本书由兰州铁道学院滕传琳主编；西南交通大学朱松年、长沙铁道学院李致中主审。北方交通大学应用数理系郭照人、西南交通大学运输工程系张挚祺也参加了部分审稿工作。

由于编写组成员水平有限，不妥之处在所难免，希望读者指正。

编　者

一九八五年八月

目　　录

※　　※　　※

※　　※　　※

第一章　线性规划基础

人们在生产实践中，常常遇到如何运用现有的资源（如人力、机器小时、原材料等等）安排生产，使产值最大或利润最高；或者，对于给定的任务，如何统筹安排，以便用最少的资源消耗去完成。这种对于从生产的计划与组织中提出的达到最大或最小目标问题的研究，构成了运筹学的一个重要组成部分——数学规划论，而线性规划又是其中发展最早、理论比较成熟、应用最为广泛的一个分支。

早在1939年，苏联数学家康特洛维奇就研究了运输和下料等问题，编著了《生产组织与计划中的数学方法》一书。由于他当时未能给出系统的、有效的算法等原因，他的工作在一段时间内，没有为人们所注意。后来这两个问题，其他学者也曾独立地进行了研究，并将类似问题提出探讨，特别是由于*Dantzig*和*Kuhn*等数学家提出了单纯形法和对偶理论等等，大大完善了线性规划的理论和计算方法，并引起了工程技术人员、管理人员和经济学者的重视，使线性规划被广泛应用于各个部门，取得较好的效果。

本书从第一章至第六章对线性规划的几个最基本、最重要的问题，进行讲解。

第一节　线性规划问题的一般模型

我们先用两个简单例题来说明什么是线性规划问题以及如何建立线性规划模型。

例1　有甲、乙两种产品，都要在车间A和车间B加工。有关资料如表1-1。

表 1-1

产　　品	在A加工时数	在B加工时数	单位产品利润（元）	市场限制
甲	2	1	6	-
乙	1	1	4	≤7
车间可用工时	10	8		

问如何组织生产，使利润最大？

所谓建立数学模型，就是将问题用数学语言来描述。在初等代数中列出解应用题的方程式或方程组，就是建立简单的数学模型。建立线性规划问题数学模型的步骤如下：

1．**确定决策变量**

以后我们将会看到，在一些复杂的线性规划问题中，确定合适的决策变量是能否成功地建立数学模型的关键。但是在例1中，我们很容易设：

x_1＝产品甲的产量，

x_2＝产品乙的产量。

2．**确定目标函数**

就是将题目要追求的目标列成函数形式。很明显，例1中的目标函数是：

使　$z=6x_1+4x_2$最大。一般写成：

$$\max \quad z=6x_1+4x_2。\tag{1-1}$$

3．**确定约束条件方程**

因为车间A和车间B的可用工时是有限的，我们不能使x_1和x_2无限制增加使利润最大。因此，x_1和x_2的取值分别受两个车间工时的限制，x_2还受市场的限制。将限制条件列成代数方程式，就是约束条件方程。此外，产品的产量必须是正数，这也是约束条件。例1的约束条件是：

$$
\text{满足}\quad\begin{cases}2x_1+x_2\leqslant 10, & (1\text{-}2)\\ x_1+x_2\leqslant 8, & (1\text{-}3)\\ \qquad x_2\leqslant 7, & (1\text{-}4)\\ x_j\geqslant 0,\ \text{对一切}\ j\ 。 & (1\text{-}5)\end{cases}
$$

例 2　某工厂用钢与橡胶生产 3 种产品 A 、B 、C，有关资料如表1-2。

表 1-2

产　　品	单位产品钢消耗量	单位产品橡胶消耗量	单位产品利润
A	2	3	40
B	3	3	45
C	1	2	24

已知每天可获得100单位的钢和120单位橡胶，问每天生产 A 、B 、C 各多少使总利润最大？

这个问题的数学模型是：

设：　$x_1=A$ 的日产量，

　　　$x_2=B$ 的日产量，

　　　$x_3=C$ 的日产量，

$$
\max\quad z=40x_1+45x_2+24x_3; \qquad (1\text{-}6)
$$

$$
\text{满足}\quad\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3\leqslant 100, & (1\text{-}7)\\ 3x_1+3x_2+2x_3\leqslant 120, & (1\text{-}8)\\ x_j\geqslant 0,\ \text{对一切}\ j\ 。 & (1\text{-}9)\end{cases}
$$

从以上两个例题，我们看到：

1．每个问题都追求一个目标，这个目标可表示为一组变量的线性函数。

2．问题中有若干约束条件，这些约束条件可用线性等式或线性不等式表达。

3．在满足约束条件方程的情况下，如果变量取连续值，问题有无穷组解，在例题中就是工厂有无穷组生产方案可供选择。

运筹学工作者的任务就是要选择一组或多组方案，使目标函数值最大或最小。从选择方案的角度说，这是规划问题。从使目标函数值最大或最小的角度说，就是优化问题。

我们称具有上述 3 个特征的问题为线性规划问题。

第二节　线性规划问题的标准型

线性规划问题的数学模型，可以有繁简不同的 3 种描述型式：

1. 对具体的线性规划问题，都将模型列成以下型式：

$$\max(\min) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$

满足
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m, \\ x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

2. 为了讨论方便，有时将线性规划问题列成以下简式：

$$\max(\min) \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

满足
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i, & i = 1, 2, \cdots, m, \\ x_j \geqslant 0, & j = 1, \ 2, \ \cdots, \ n. \end{cases}$$

3. 有时用矩阵和向量描述线性规划问题，便于数学上的讨论。

$$\max(\min) \quad z = CX;$$

满足
$$\begin{cases} AX \leqslant (=, \geqslant) b, \\ X \geqslant 0. \end{cases}$$

其中：

$C = (c_1, \ c_2, \ \cdots, \ c_n)$,

$A = [a_{ij}]$, $i = 1, \ 2, \ \cdots, \ m$,

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T,$$

$$b=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)^T。$$

由上可见，线性规划的目标函数，可以是求最大值（例如追求利润最大），也可以是求最小值（例如追求成本最小）；约束条件方程（不包括$x_j\geqslant 0$的非负约束），有“$\leqslant$”、“$=$”和“$\geqslant$”三种型式。用“$\leqslant$”号的，其经济意义是可用的资源（如劳动力、资金、机器小时、原材料等等）有数量上的限制，消耗数量不能超过右端值b_i；用“$\geqslant$”号的经济意义是在混合问题中，某种成份至少必须达到右端值b_i的水平；用“$=$”号表示等式左边的事物恰好满足等式右边的要求。

线性规划目标函数和约束条件方程的这种多样性会给讨论带来不便，为了便于以后单纯形法的讨论，本书规定线性规划的标准型为：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots,m, \\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

我们还规定上式中的$b_i\geqslant 0$。若问题中有$b_i<0$，可对等式两端乘以-1。

如果根据实际问题建立起来的线性规划模型不是标准型的，可以用下述方法将它化成标准型。

1．若目标函数是

$$\min \quad z=\sum c_j x_j;$$

可令$z=-z'$，将目标函数转化为：

$$\max \quad z'=-\sum c_j x_j。$$

2．若约束条件方程是“$\leqslant$”，可在方程左边加上非负变量，将方程转化为等式方程。如式（1-2）可转化为：

$$2x_1+x_2+x_3=10,\quad x_3\geqslant 0。$$

这里x_3的经济意义是A车间没有用完的工时。我们称x_3为**松弛变量**。

3．若约束条件方程是“$\geqslant$”，可在方程左边减去非负变量，将方程转化为等式方程。这个非负变量称为**多余变量**。

一般说来，松弛变量和多余变量的目标函数系数$c_j = 0$。

4．若有一个变量x_k没有非负约束（称为**自由变量**），为了满足标准型对变量的非负要求，可令$x_k = x_l - x_m$，其中$x_l \geqslant 0$，$x_m \geqslant 0$。由于x_l可能大于x_m，也可能小于x_m，所以x_k可能为正，也可能为负。

例 3 将下列线性规划问题化为标准型。

$$\min \quad z = x_1 + 2x_2;$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

解 对自由变量x_2作替换，令$x_2 = x_3 - x_4$，其中$x_3 \geqslant 0$，$x_4 \geqslant 0$，再引入松弛变量x_5，多余变量x_6，得：

$$\max \quad z' = -x_1 - 2x_3 + 2x_4;$$

$$\text{满足} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 \qquad = 6, \\ x_1 + x_3 - x_4 \qquad\qquad - x_6 = 4, \\ x_1 - x_3 + x_4 \qquad\qquad\quad = 3, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, 6. \end{cases}$$

在继续深入讨论之前，有必要说一下线性规划问题明显的或暗含的假定，这就是成比例性、独立性、可分性和确定性。所谓成比例性，就是在同一问题的同一活动范围内c_j值和a_{ij}值都不随变量大小而变动，这样，目标函数和约束条件方程才能保证是线性的。但在实际生产活动中，c_j和a_{ij}值并不总是常数，这时仍可用线性规划模型近似地描述实际情况，否则，就要建立复杂得多的数学模型，求解的费用会大得多。所谓独立性，就是任一变量x_j

的参数c_j和a_{ij}对其它变量不产生影响，例如，例1中生产甲得到的利润不影响产品乙的数量，如果没有这个假定，问题就复杂化了。所谓可分性就是允许变量取带小数的数值，对小数解不符合实际情况的问题（如不能生产0.3架飞机）可以用整数规划来解决。最后，所谓确定性就是假定所有的参数c_j，a_{ij}，b_i都是确定性的，遇到不确定的情况，可以用灵敏度分析、参数规划和随机性线性规划来帮助解决。

第三节 线性规划问题的图解法

只有两个或三个变量的线性规划问题，可以画成平面图或立体图用图解法求解，它虽然没有多大实用价值，但简单直观，有助于初学者了解线性规划问题求解的基本原理。从对简单问题的直观认识扩展加深到较大问题的一般数学理论，将在第二章第一节讨论。

例4 现在对两个变量问题的例1用图解法求解。

例1的数学模型是：

$$\max \quad z=6x_1+4x_2;$$

$$\text{满足}\quad \begin{cases} 2x_1+x_2\leqslant 10, \\ x_1+x_2\leqslant 8, \\ \qquad x_2\leqslant 7, \\ x_j\geqslant 0, \text{对一切} j。 \end{cases}$$

解 如图1-1，以x_1，x_2为坐标轴的直角坐标系第一象限(包括坐标轴）是满足$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$的一切点的集合。将题目中3条不等式约束条件方程改成等式方程，画出直线，这3条直线左下方（包括直线本身）和两条坐标轴围成的平面，是满足所有约束条件的一切点的集合，称为**可行域**。

目标函数$z=6x_1+4x_2$在坐标平面上，表示以z为参数的一族平行直线。其中的任一直线，是产生相同利润的点的集合，