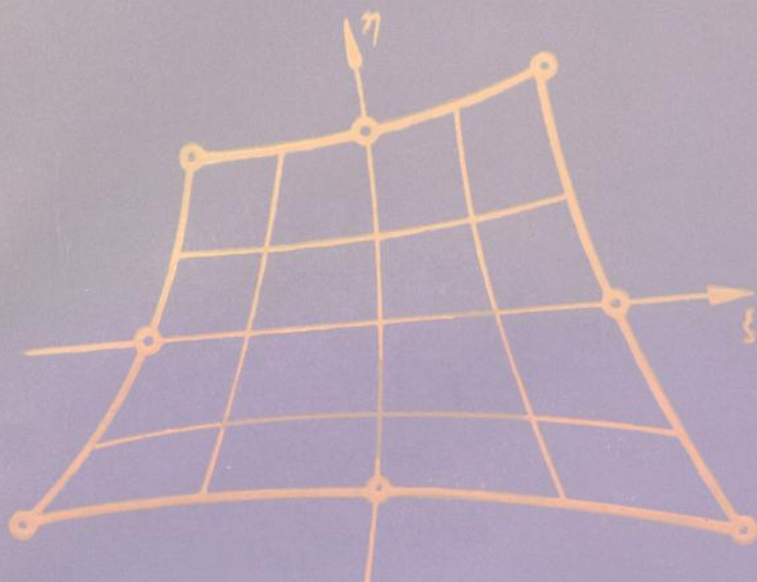




有限单元法实用导论

Y.K. 张 M.Y. Yeo 著

罗松发 李君如 刘纪先 王中慧 译

广西人民出版社

52

8

52.52

588

有限单元法实用导论

Y.K.张 M.Y.Yeo 著

罗松发 李君如 刘纪先 王中慧 译

广西人民出版社

内 容 简 介

本书主要阐述有限单元法的基本理论在弹性力学平面问题中的应用,并介绍了目前程序设计两个较新方法:线性方程组的波阵解法及网格的自动形成。本书的叙述由浅入深,有简单而完整的算例及应用程序,且对程序的语句加有详细的注解,易于阅读。书中所阐明的理论和方法也同样适用于三维弹性体的问题。本书可供有关这一专业的高年级大学生、研究生、教师和从事这方面研究的工程技术人员参考。

DS92/34
94

有限单元法实用导论

Y. K. 张 M. Y. Yeo 著

罗松发 李君如 刘纪先 王中慧 译

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 梧州地区印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 12印张 281千字

1982年8月第1版 1982年8月第1次印刷

印 数 1—2780册

书号: 15113·90 定价: 1.10元

中译本序言

本书是我和M.F.Yeo博士1977年在澳大利亚脱稿的，发表于1979年。有限单元法用数学术语来说，就是从变分原理出发，通过分区插值，把二次泛函（能量积分）的极值问题化为一组多元线性代数方程来求解。它是工程分析中最强有力而又最通用的计算方法，应用范围很广，并且由于其实践性而具有强大的生命力。因此，本书在叙述有限单元计算理论的同时，还注重于如何通过程序来使这些理论上的计算付诸实施，故书中既有基本理论，又有应用程序及实例。书中的一个特点是每个子程序都附有极其详细的注解。

近年来，我曾多次回国讲学，在广州得到华南工学院和其他单位的学者和工程师的盛情接待，并有机会参加了一系列的座谈，收获很大，我很高兴能够向众多同行不只一次地介绍各种先进的计算方法。如果我的工作对祖国实现四个现代化能有所助益，我将感到无限快慰。

华南工学院是我的亲爱的母校，在那里我经历过四年辛勤的学习，为我今日所取得的一点点成绩打下了巩固的基础。现在，我的这本著作，也和我1967年著的“结构和连续力学中的有限单元体法”和1976年著的“结构分析的有限条法”，都先后被译为中文，并且由于这次翻译工作是由华南工学院筹划，这对我有特殊的意义。我借此机会，谨向翻译本书的华南工学院土木系主任罗崧发教授和广西区建委综合设计院院长李君如总工程师等诸位先生致意。

张佑启

香港大学工学院院长兼土木系主任

华南工学院名誉教授

1981年4月1日于香港

译者序

张佑启教授曾回国内多次讲学，他先前的几本著作已被国内同行译成中文本，不少同志对他比较熟悉。张佑启教授对有限单元法的理论有很深的研究和独创的发展（结构分析的有限条法），且有较丰富的工程实践经验。我们翻译了他和 M.F.Yeo 博士合作的近著“Practical Introduction To Finite Element Analysis”，并请他为中译本写了序言。

作者根据自己多年研究和实践经验，对有限单元法实际应用中的的一些重要方法，诸如位移函数的选择，单元刚度公式化，数值积分，组集，方程解法，边界条件的处理和网格自动形成等方面，在本书中都作了较详细的论述。

波阵解法是目前用计算机解线性方程组的最有效的方法之一，它可以大大地节省内存，将此法使用在国内中小型计算机上解算大题目，其优点更为显著。

在这里要说明一点，本书的特点是在叙述计算理论时与程序设计紧密地结合起来的，因此请读者务必对照书中程序一并阅读，这会有助于对理论运用的认识。

在翻译过程中，对原书的一些笔误之处作了更正，并根据我们自己的理解，对原著某些地方加了注解，以方便读者阅读。

付子智、梁耀光同志帮助校对了译稿，方槐森同志抄正了全部译稿及绘制了书中插图，谨致感谢。

一九八一年六月

序 言

作者试图在本书中介绍有限单元法的导论。这个方法已成为适合工程师们的一种最强有力而通用的计算方法。在一般有限元书籍中详细地研究该法的理论发展及其应用，而本书是着重介绍方法的实用方面。如(i)详细地叙述了选择位移函数的各种技巧、刚度矩阵的公式、数值积分、组集、方程组的解法以及网格的形成；(ii)详细地阐述了从低级到高级的各种水平的计算机程序，且对程序中大部分的语句作了注解；(iii)通过若干个学习的实例，在程序执行的各阶段中输出中间结果及最后结果，致使读者们了解程序每一步的计算结果。

本书是为高年级大学生、研究生和有经验的工程师们而写的。书中所包含的内容是很齐全的，只要求读者们具有一些基本的矩阵代数和福屈兰(Fortran)程序的知识就能阅读。为了使本书的篇幅缩减到适当的程度，这里只讨论平面应力问题。然而，显然地它的基本数值计算和编写程序的方法同样可以应用在三维弹性问题、理想的流体问题及其它一些问题中。

在第一章中论述了有限单元法的理论，并着重于位移函数的研究。第二章推导了平面应力三角形单元，并以一步一步的方式叙述了简单可行的程序。第三章介绍了等参数单元、讨论了数值积分方法和计算单元刚度元素的各种不同的省力技巧。在第四章里详细地介绍了波阵解的技巧，这种方法被认为是一些最有效的解算方法之一，同时使用了一个写出全部计算步骤的简明例子来帮助读者掌握方法的运用。第五章列出了一个完整的高级计算机程序，并且在例题中附有输入数据及输出结果。最后在第六章里介绍了两种简单的网格形成方法，并列有相应的程序。

我们感谢Adelaide大学的G.Sved先生阅读了手稿和提出改进本书的宝贵建议。感谢Adelaide大学的二位博士研究生S.Swaddiwudhipong先生和C.Rigon先生对一部分手稿作了校核，同时也感谢G.Stock太太非常熟练地为我们打印手稿。

最后我们深深地感谢Yuk.Ba.Cheung太太对本书的编写所给予坚定的支持和鼓励。

Y. K. Cheung

M. F. Yeo

1978年8月

目 录

第一章 有限单元法	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 虚功原理	(1)
1.3 最小总势能原理	(2)
1.4 轴力杆刚度矩阵	(3)
1.5 梁杆件刚度矩阵	(3)
1.6 有限单元化过程	(4)
1.7 位移函数	(5)
1.8 位移函数的选择	(14)
1.9 刚度矩阵和荷载矩阵公式	(19)
1.10 轴力杆单元刚度矩阵再推导	(22)
1.11 梁单元刚度矩阵再推导	(23)
第二章 弹性力学平面问题的三角形单元与简单计算机程序	(27)
2.1 引言	(27)
2.2 常应变三角形单元	(27)
2.3 例题	(34)
2.4 数据准备	(36)
2.5 单元刚度矩阵形成	(42)
2.6 结构刚度矩阵组集	(45)
2.7 给定位移条件的引入	(51)
2.8 荷载矩阵	(55)
2.9 联立方程解法	(57)
2.10 单元应力计算	(64)
第三章 弹性力学平面问题二次等参数单元	(77)
3.1 引言	(77)
3.2 等参数概念	(78)
3.3 等参数单元族	(79)
3.4 刚度矩阵公式化	(83)

3.5	数值积分.....	(86)
3.6	单元刚度计算.....	(89)
3.7	应力矩阵.....	(97)
3.8	一致荷载矩阵.....	(100)
第四章	波阵解法	(112)
4.1	引言.....	(112)
4.2	波阵解法.....	(113)
4.3	变换约束.....	(130)
4.4	提高运算效率.....	(134)
第五章	计算机程序与采用等参数单元的计算	(139)
5.1	计算机程序.....	(139)
5.2	采用等参数单元的例题.....	(151)
5.3	6 度扇形体数据的输入.....	(152)
第六章	网格自动形成	(163)
6.1	引言.....	(163)
6.2	网格形成.....	(163)

第一章 有限单元法

1.1 引言

人们所熟知的这种有限单元法,已成为当前分析和应用范围很广的最强有力的工具。它随着刚度法或称位移法的扩展而提出的。在刚度法中,假设骨架结构^①由一维单元,如轴力杆单元(轴力作用)、梁单元(弯曲作用)和刚架单元(轴向、弯曲及扭转作用)组集而成。

以骨架结构而言,刚度法是把一个实际结构的各个单元在离散的节点上相互连接起来,同时建立全部节点的外荷载与杆端力的平衡方程式,求解出节点位移。每个杆件的杆端力和杆端位移之间的关系以刚度矩阵表示。它可以直接通过各种能量理论,例如虚功原理或最小总势能原理的推导而得。

同理,对固体力学的二维或三维单元,例如连接在若干人为确立的结点上,几何形状为三角形、四边形和六面体的单元,也可用同样方法推导出其结点的位移和等效结点力之间的刚度关系式。在这个方法中,一个无限自由度的连续体,可以离散为一个有限自由度的等价体系。

在近几年中,有限单元法已广泛地用于非结构问题,同时,有限单元法的公式当前是以变分原理或加权残数法为其主要的基础。这些都可以从辛格尔威茨的论著〔1〕中找到详尽的陈述。

全书用能量原理对刚度和荷载矩阵进行了推导。为使本书的叙述尽量简单,为此所有单元及其以后提到的例题均在二维弹性范围内。然而,书中讨论的很多材料也直接可应用到三维弹性问题,甚至应用到流体问题。

1.2 虚功原理

这原理涉及到两个不同的各自的系统,其中第一个系统是一组平衡力(以 P 和 σ 分别表示为外力和内应力);第二个系统是一组几何协调变形(以 Δ 和 ϵ 分别表示位移和应变)。虚功原理表明了任一处于平衡的体系,外虚功必须等于内虚功,即:

$$\begin{array}{c} \text{平衡力的系统} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ \Sigma P \cdot \Delta = \int_V \sigma \cdot \epsilon dv \\ \uparrow \text{几何上} \uparrow \text{的协调变形} \end{array} \quad (1.1)$$

① 或称杆系结构——译者注

注意在实际应用中，这两种系统之一，总是与结构求解某一种真实解即实在的解有关，而另一个系统是假设的或虚设的，因此在假设系统时可以有所选择：

(i) 虚力理论，以真实位移和应变为系统，使与虚设的力和应力系统相匹配。应用方程式(1.1)我们得：

$$\Sigma(\text{虚外力}) \cdot (\text{真实位移}) = \int_V (\text{虚应力}) \cdot (\text{真实应变}) dv \quad (1.2)$$

(ii) 虚位移理论，以真实的力和应力为一系统，使与虚设的位移和应变系统相匹配。再次用方程式(1.1)

$$\Sigma(\text{真实外力}) \cdot (\text{虚位移}) = \int_V (\text{真实应力}) \cdot (\text{虚应变}) dv \quad (1.3)$$

式(1.2)通常用于计算位移并导出单位荷载理论。而式(1.3)通常用于计算外力并导出单位位移理论。

1.3 最小总势能原理

一个系统的总势能被定义为：

$$\phi = U + W \quad (1.4)$$

式中W是变形结构上的外力所具有的势能，并定义为：

$$W = -\Sigma P \cdot \Delta \quad (1.5)$$

而U是变形结构的应变能，并由下式得出：

$$U = \int_V (\int \sigma d\epsilon) dv \quad (1.6)$$

如果现在将结构变形取为真实的即实际的系统，而一组微小的几何协调位移 $\delta\Delta$ 作为虚系统，随后借助于式(1.3)，就能建立：

$$\Sigma P \cdot \delta\Delta = \int_V (\sigma \cdot \delta\epsilon) dv \quad (1.7)$$

然而，由于施加了虚位移，实际系统的总势能亦将经受如下的变化：

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \delta U + \delta W \\ &= \int_V (\sigma \cdot \delta\epsilon) dv - \Sigma P \cdot \delta\Delta \end{aligned} \quad (1.8)$$

将式(1.7)同式(1.8)比较，可知：

$$\delta\phi = 0 \quad (1.9)$$

也就是说，在平衡中一个系统的总势能有驻值。同时因为进而能证明这种势能对稳定结构总是最小值，故称为有驻值的总势能原理，或更经常称作最小总势能原理。这原理也可表达为：满足于边界条件的各种可能的协调位移中，使得总势能有一驻值的那些位移必定满足于静力平衡条件。对于线性弹性问题而言，一个既满足于平衡和协调条件的解答必定是正确的解。然而这样的解题方法即便是可能的话，但在多数情况下表明是困难的。因而研究者们必

须借助于近似解的方法，即先假设具有不定参数的协调位移方程，而后使系统总势能为最小来确定这些位移参数值。

由此可得出：若取一组具有未知参数 Δ_i 的位移函数用于逼近一个系统的实际位移，那就可以由总势能进行极小化来确定这组 Δ_i ，即进行下面演算：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Delta_i} = 0 \quad (1.10)$$

式(1.10)已经广泛地用于推导有限单元法的刚度矩阵。

1.4 轴力杆刚度矩阵

轴力杆最初用于桁架，它们被假设为只承受轴向力。杆的刚度系数可由虎克定律直接导出。由图1.1(a)可知，如果端点2固定而端点1允许移动，则

$$P_{x1} = \frac{EA}{l} U_1 \quad (1.11)$$

$$P_{x2} = -\frac{EA}{l} U_1$$

同理，若端点1被固定而端点2允许移动，则从图1.1(b)便能断定：

$$P_{x1} = -\frac{EA}{l} U_2 \quad (1.12)$$

$$P_{x2} = \frac{EA}{l} U_2$$

整个刚度关系式即由式(1.11)和式(1.12)合并而得：

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

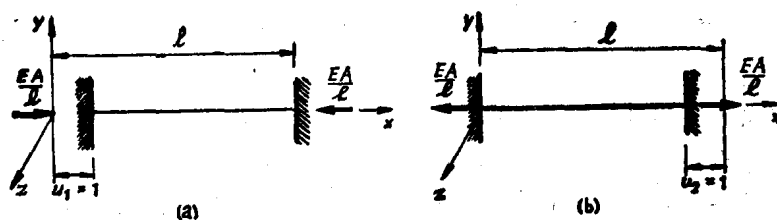


图1.1 轴力杆

1.5 梁杆件刚度矩阵

梁杆件只是和弯曲作用有关，而它的刚度关系式就是熟知的倾角挠度方程的简单扩展，其形式为：

$$\begin{aligned} M_1 &= (6EI/l^2)v_1 + (4EI/l)\theta_1 - (6EI/l^2)v_2 + (2EI/l)\theta_2 \\ M_2 &= (6EI/l^2)v_1 + (2EI/l)\theta_1 - (6EI/l^2)v_2 + (4EI/l)\theta_2 \end{aligned} \quad (1.14a)$$

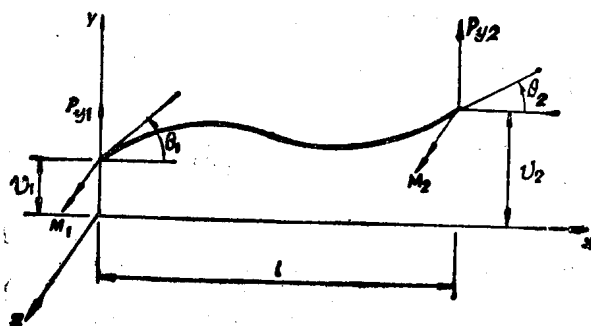


图1.2 梁杆件

杆端剪力 P_{y1} 和 P_{y2} (图1.2) 是大小相等而反方向的。这一对力构成的力偶等于杆端弯矩之总和。从式 (1.14a), 杆端剪力为:

$$\begin{aligned} P_{y1} &= -P_{y2} = (M_1 + M_2) / l \\ &= (12EI/l^3)v_1 + (6EI/l^2)\theta_1 - (12EI/l^3)v_2 + (6EI/l^2)\theta_2 \end{aligned} \quad (1.14b)$$

把式 (1.14) 写成矩阵形式, 梁的刚度关系式成为:

$$\begin{Bmatrix} P_{y1} \\ M_1 \\ P_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 4EI/l & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 2EI/l & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

注意, 此处坐标系统采用右手法则。在本书的其余部分也将使用这种坐标系统。

1.6 有限单元化过程

在我们进一步深入详细推导之前, 值得指出三种常用的单元类型。在已知的各种有限单元中, 绝大多数是采用假设位移模式的位移单元, 而平衡单元〔2〕(基于假设应力模式) 和杂交单元〔3〕(基于既假设位移模式又假设应力模式) 使用于较小的范围。本书只论述位移单元。既然遍布整个单元范围内的假设的位移模式是以所谓的位移函数来描述的, 那么读者以后将注意到, 我们对选择适合于各种有限单元的位移函数给予十分重视。

如前所述, 有限单元法开始于刚度法的引伸, 并把它应用到结构力学中的二维和三维问题。可是弹性连续体与骨架结构不同, 没有明确的节点来建立平衡方程式, 为此连续体必须被离散为许多任意形状的单元, 同时还必须人为地建立起单元之间的节点或称结点, 用这种方法, 把连续体近似地化成了一个具有有限自由度且可以进行数值解的体系。下面将详细叙述有限单元方法。

(i) 连续体被划分为二维或三维的有限单元, 这些单元以直线或曲线割开 (二维单元)

或以平面或曲面割开(三维单元)。

既然这个方法允许每个单元有不同的形状、大小、物性和厚度,那么就可以很好地适用于非均匀性质、不规则几何图形、复杂的支承条件和各种荷载组合等问题。

在很多情况下,一个问题只需使用一种单元。但不同的单元也可混合使用,如由于实际需要,把梁单元与弯曲的板单元连接起来,或在应力集中问题上把高阶单元与低阶单元相连。

(ii)假设各个单元是由一些离散结点连接起来,这些结点位置通常在单元角上和边界处,不过有时也会出现那些与其它任何单元没有连接的内部结点(图1.3(a))。

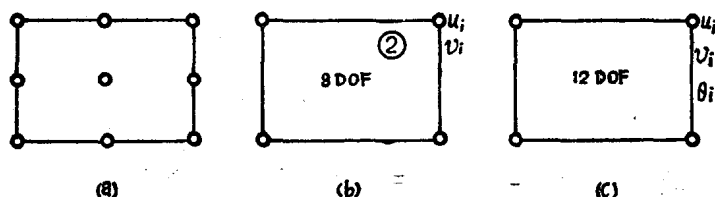


图1.3 矩形平面应力单元

结点的自由度(在每个单元内,各结点可以有不同的自由度)称为结点位移参数。它主要是指在一点上的位移和位移第一偏导数(转角),但经常也可以指另一些象应力、应变以及第二或更高阶偏导数等。例如,图1.3(b)的矩形板的应力单元(双线性单元)有8个自由度,表示在四个角结点上X方向的平移 u 和Y方向的平移 v 。图1.3(c)的高阶平面应力单元(梁类单元)还有四个附加的旋转自由度(即转角)。

(iii)为了表示单元内的位移变化,我们按照坐标变量 x 、 y 和结点位移参数(如图1.3中的 u_i 、 v_i)选择位移函数。这样的位移函数试图逼近布满整个单元的真实位移场,同时运用如前所述的虚功原理或最小总势能原理就能推导出联系结点力与结点位移之间的刚度矩阵。

1.7 位移函数

从上面的论述,显然选择合理的位移函数是整个方法中极为重要的一部分,一个好的位移函数将使单元具有高精度和收敛性质。而相反,错误地选择位移函数,就会产生非收敛的不良结果,而有时最糟的是使问题收敛于不正确的解答。克拉夫研究和评述了后者的现象[4],但是幸而这种现象不是普遍出现的。

一个位移函数可由两种方法给出:

(i)用具有待定系数的多项式表示位移函数,随后将这些待定系数转变成相应的结点位移参数。

(ii)直接用形状函数表示位移函数,形状函数通常是一个密切的多项式[5]。形状函数在表示位移或其偏导数时,在被考虑的结点上形状函数的值为1,而在单元其它结点上形状函数值为零。实际上,当我们对指定的结点位移参数给于位移值1,而对其余各结点位移参数给于零值时,则与指定结点位移参数相关联的形状函数就给出单元的整个位移场。在图1.4

② DOF为“自由度”的英语缩写

——译者注

中给出一些形状函数的例子。因此，位移函数既可以由第一种方法给出：

$$f = A_1 + A_2 x + A_3 y + \dots \quad (1.16a)$$

式中 A_1 、 A_2 等是多项式的待定常数；也可以由第二种方法给出：

$$f = N_1(x, y)f_1 + N_2(x, y)f_2 + \dots \quad (1.16b)$$

式中 f_1 、 f_2 等是结点位移参数，而 N_1 、 N_2 等是相应的结点形状函数。

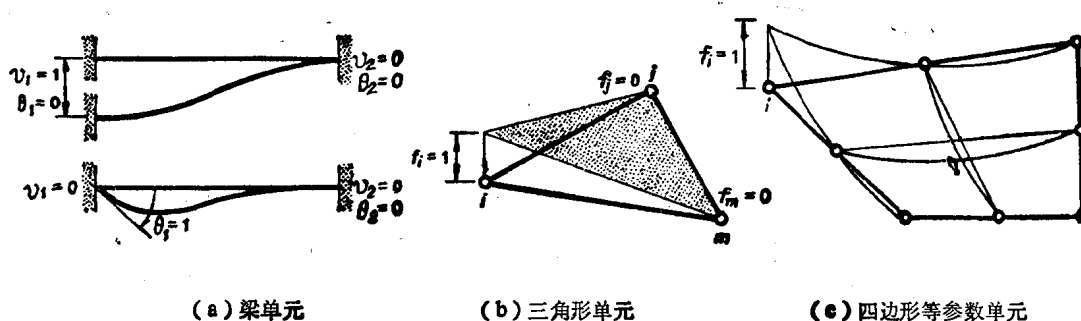


图1.4 形状函数诸例

在这一阶段，让我们熟悉下述的概念是适宜的，它将帮助我们建立一些位移函数。

1.7.1 巴斯加三角形

为了用多项式给出二维单元的位移函数，则巴斯加三角形有助于决定应该使用那些项来进行组合。在这里使用的巴斯加三角形名词术语与人们在数学中所用的处理二项式定理系数的那个术语略有不同。

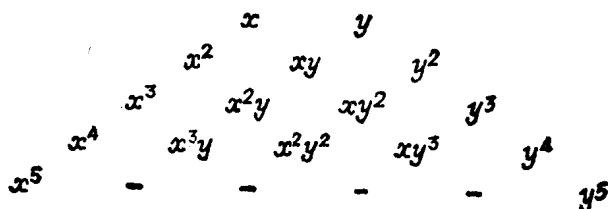
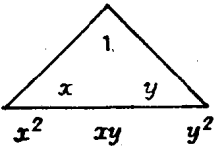
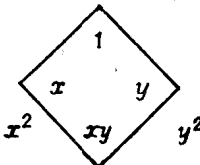
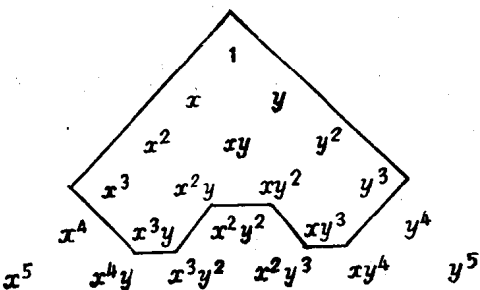
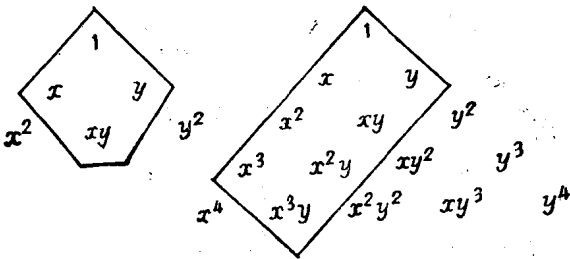
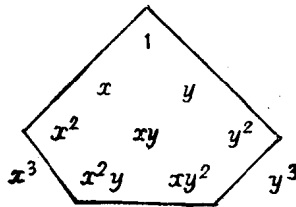


图1.5 巴斯加三角形

利用巴斯加三角形给出的位移函数例子示于表1.1中。应该注意对于一般用途的单元而言，巴斯加三角形中的对称项总是被一起保留，而且通常在采用更多的较高次项之前，应当先使用全部的较低次项。

表1.1 具有不同自由度和位移函数的典型有限单元

单元类型	巴斯加三角形	注
常应变三角形单元 $u - 3 \text{ DOF}$ $v - 3 \text{ DOF}$		u 与 v 线性变化
平面应力矩形单元 $u - 4 \text{ DOF}$ $v - 4 \text{ DOF}$		u 和 v 沿着单元边缘需要线性变化，而 xy 项在边缘上不是退化为 x 就是退化为 y ，因此第四项 xy 是适宜的。
弯曲矩形单元 $W - 12\text{DOF}$		沿单元边缘需要三次变化，只是在边缘上 x^3y 退化为 x 的三次函数， xy^3 退化为 y 的三次函数，因此这二项是适宜的。
矩形梁类的平面 应力单元 $u - 4 \text{ DOF}$ $v - 8 \text{ DOF}$		u 沿着边缘线性变化， v 在 y 方向上线性变化，而在 x 方向上三次变化，致使正确地模拟梁的特性。
具有角结点和中间 结点的矩形平面应 力单元 $u - 8 \text{ DOF}$ $v - 8 \text{ DOF}$		u 和 v 沿着边缘抛物线变化，故将 x^3 和 y^3 除去。

1.7.2 拉格朗日多项式

拉格朗日多项式(配置多项式)[5]常被用来构造单元形状函数。在多项式中只指定结点的函数值而不指定导数值。在一维坐标系中具有几个结点的拉格朗日基本形式为:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i^n(x) f_i \quad (1.17)$$

式中 $L_i^n(x)$ 称为拉格朗日乘子, 并由下式给出:

$$L_i^n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad (1.18)$$

很明显 $L_i^n(x)$ 具有如下的性质:

$$L_i^n(x_k) \begin{cases} = 0 & k \neq i \\ = 1 & k = i \end{cases}$$

因此, 它符合形状函数的定义。在表1.2中给出一些拉格朗日多项式的例子。

拉格朗日多项式也可应用于具有二个或甚至三个坐标的形状函数, 因此, 在二维问题上的形状函数应是:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m L_i^n(x) L_j^m(y) f_{ij} \quad (1.19)$$

式中, n 与 m 分别表示 x 、 y 方向上的子分段个数或自变量个数。

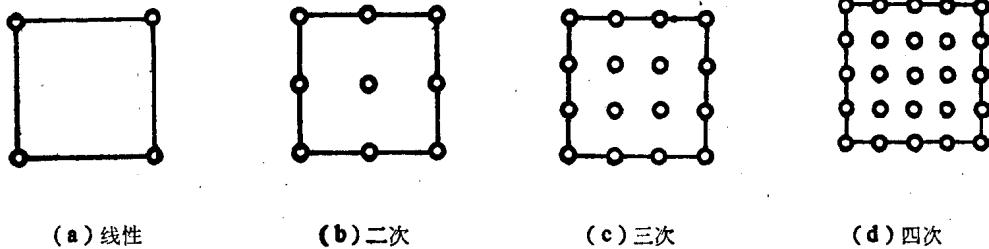
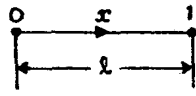


图1.6 拉格朗日单元族

式(1.19)中所给出的形状函数, 事实上构成了图1.6中所示的平面应力单元族的基底。然而由于这些单元族出现大量的内结点, 而使它的用途受到严重的限制, 因而实际中, 大多数研究工作者只局限于对线性单元(图1.6(a))的使用。

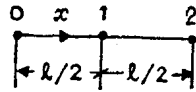
表1.2 拉格朗日多项式 (一维坐标)



线性

$$L_0^1(x) = \frac{x - x_1}{0 - x_1} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$L_1^1(x) = \frac{x}{x_1} = \frac{x}{l}$$



抛物线

$$L_0^2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(0 - x_1)(0 - x_2)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x_1 x_2}$$

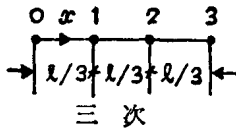
$$= \left(2\frac{x}{l} - 1\right)\left(\frac{x}{l} - 1\right) = (1 - 2L_1^1)L_1^1$$

$$L_1^2(x) = \frac{(x - 0)(x - x_2)}{(x_1 - 0)(x_1 - x_2)} = \frac{x(x - x_2)}{x_1(x_1 - x_2)}$$

$$= 4\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) = 4L_0^1L_1^1$$

$$L_2^2(x) = \frac{(x - 0)(x - x_1)}{(x_2 - 0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x - x_1)}{x_2(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{x}{l}\left(2\frac{x}{l} - 1\right) = L_1^1(2L_1^1 - 1)$$



三次

$$L_0^3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(0 - x_1)(0 - x_2)(0 - x_3)}$$

$$= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)}{x_1 x_2 x_3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3x}{l}\right)\left(2 - \frac{3x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 3L_1^1)(2 - 3L_1^1)L_0^1$$

$$L_1^3(x) = \frac{(x - 0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - 0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{x(x - x_2)(x - x_3)}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$= \frac{9x}{2l}\left(3\frac{x}{l} - 2\right)\left(\frac{x}{l} - 1\right) = \frac{9}{2}L_1^1(2 - 3L_1^1)L_0^1$$

$$L_2^3(x) = \frac{(x - 0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - 0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{x(x - x_1)(x - x_3)}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$= \frac{9x}{2l}\left(3\frac{x}{l} - 1\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right) = \frac{9}{2}L_1^1(3L_1^1 - 1)L_0^1$$

$$L_3^3(x) = \frac{(x - 0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - 0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{x(x - x_1)(x - x_2)}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x}{l}\left(3\frac{x}{l} - 1\right)\left(3\frac{x}{l} - 2\right) = \frac{1}{2}L_1^1(3L_1^1 - 1)(3L_1^1 - 2)$$