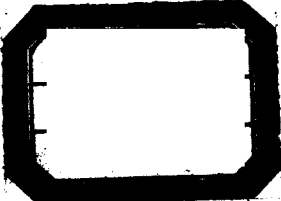


有限元素法选讲

复 旦 大 学 数 学 系

《有限元素法选讲》编写组编

科 学 出 版 社



有限元素法选讲

复旦大学数学系

《有限元素法选讲》编写组编

科学出版社

1976

内 容 简 介

本书主要介绍有限元素法的基本知识,以及在进行框架、平面、轴对称等结构应力分析和相应温度场计算时的各种应用。书中包括一定数量的实例,书末附有适用范围较广的标准计算程序。

本书可供从事机械和建筑结构强度分析的工程技术人员、计算工作者使用,也可供高等院校有关专业师生参考。

有 限 元 素 法 选 讲

复 旦 大 学 数 学 系
《有限元素法选讲》编写组编

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

外文印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1976 年 10 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1976 年 10 月第一次印刷 印张: 9 1/2

印数: 0001—24,750 字数: 217,000

统一书号: 13031·479

本社书号: 714·13-1

定 价: 0.88 元

目 录

第一章	引言	1
第二章	平面杆件系统的结构分析	11
§ 1	问题的提出和概述	11
§ 2	单根弹性杆件的总位能表达式	14
§ 3	基本方程的推导和计算格式的形成	25
§ 4	杆件内力的计算	46
§ 5	小结	48
§ 6	计算实例	49
第三章	平面应力分析	54
§ 1	弹性力学的有关知识	54
§ 2	平面应力状态	59
§ 3	基本方程的推导	61
§ 4	计算格式的形成	81
§ 5	平面应变状态	91
§ 6	应力和应变分量的计算	93
§ 7	计算实例	96
第四章	轴对称应力分析	109
§ 1	基本概念	110
§ 2	基本方程的推导	113
§ 3	计算格式的形成	126
§ 4	应力分量的计算	146
§ 5	计算实例	156
第五章	稳定温度场计算	164
§ 1	平面稳定温度场计算	165
§ 2	轴对称稳定温度场计算	185

第六章 具有对称正定系数阵的线性代数方程组的解法	193
§ 1 迭代法	194
§ 2 直接法	199
附录一 矩阵与行列式的一些有关知识	211
§ 1 矩阵	211
§ 2 行列式	220
§ 3 对称正定阵与正定二次型	223
附录二 标准程序	226
§ 1 平面杆件系统计算程序	229
§ 2 平面问题计算程序	246
§ 3 轴对称应力分析计算程序	264
§ 4 稳定温度场计算程序	283

第一章 引 言

有限元素法是根据变分原理来求解数学物理问题的一种数值计算方法。它的基本思想虽在四十年代初期已经有人提出,但当时并未引起人们的重视。“社会一旦有技术上的需要,则这种需要就会比十所大学更能把科学推向前进。”到了五十年代中期,在实践需要的直接推动下,有限元素法才从结构矩阵分析方法的基础上迅速地发展起来,并得到了愈来愈广泛的应用。而当时高速数字电子计算机的出现和发展,也为使用这个方法提供了重要的物质条件。“理论的基础是实践,又反过来为实践服务。”有限元素法最初应用于航空工程部门,由于其方法的有效性,迅速被推广应用于造船、建筑、机械等工程部门,并取得了显著的效果。

在物体的形状及载荷的方式相当任意的情况下,许多应力分析问题(包括求机械应力及热应力),都可用有限元素法来求解;其他问题,例如温度场的计算、一些流体力学的问题、振动问题等,也都可以用有限元素法来求解。这种方法的应用范围是相当广泛的。

我国工人阶级和广大科学技术人员,经过无产阶级文化大革命的锻炼,阶级斗争和路线斗争的觉悟不断提高,同时也大大加快了赶超世界科学技术先进水平的步伐,这就有力地促进了有限元素法在我国科学技术各个方面的应用和发展。“中国应当对于人类有较大的贡献。”在学习和实践有限元素法的过程中,我们一定可以使得这个方法进一步向前发展,为中国革命及世界革命贡献更大的力量。

为了说明有限元素法的基本思想, 并和有限差分法等计算方法进行初步的比较, 我们首先考察一个简单的例子。

考察图 1.1(a) 所示的一长度为 L 的均匀弹簧, 其弹性模量为 E (常数)。

把某一端 O 固定, 将弹簧拉长 a (图 1.1(b))。

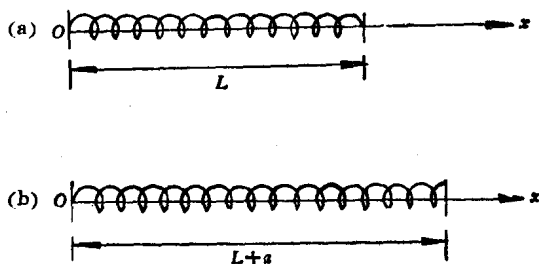


图 1.1

这时弹簧上原来坐标为 x 的点, 其坐标变为 $x+u(x)$, 而 $u(x)$ 是 x 点弹簧的位移, 称为位移函数。显然有

$$\begin{aligned} x=0, & \quad u=0, \\ x=L, & \quad u=a. \end{aligned} \quad (1.1)$$

要对此弹簧进行应力分析, 关键是求出位移函数 $u=u(x)$ 。

事实上, 由力学的知识可知, 如果位移函数 $u=u(x)$ 已知, 就可决定应变函数:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad (1.2)$$

再由虎克定律, 可得应力函数:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx}. \quad (1.3)$$

把求得的 σ 值与许用应力比较, 就可知是否满足强度条件。

因此, 关键是求出位移函数 $u=u(x)$ 。

显然, 在现在均匀拉伸的简单情况下, $u(x)$ 一定是一个

线性函数(图 1.2):

$$u=u(x)=\frac{ax}{L}, \quad (1.4)$$

而不必花什么气力去求它。因此,下面所述寻求 $u(x)$ 的数值方法并没有任何实际价值,而完全是为了说明有关方法的基本思想,作为以后处理更复杂情况时的借鉴。

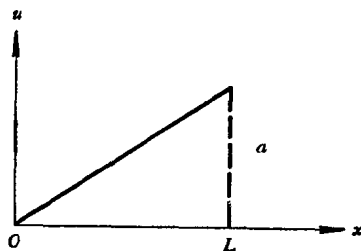


图 1.2

从数值求解的角度,求位移函数 $u=u(x)$ 可以通过下面两种不同的途径来进行:

1. 有限差分法——从物理模型列出相应的微分方程,再经过离散化得到差分方程而求解。

显然,在均匀拉伸的情况下,弹簧上各点的正应力 σ 是相等的,即

$$\frac{d\sigma}{dx}=0.$$

因此由(1.3)式,可得位移函数 $u=u(x)$ 所满足的微分方程为

$$\frac{d}{dx}\left(E\frac{du}{dx}\right)=0, \quad (1.5)$$

或

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0. \quad (1.6)$$

相应的边界条件就是(1.1)式。

这是一个二阶常微分方程的边值问题, 可将问题离散化, 用有限差分法来求解. 方法是: 在求解区间 $[0, L]$ 上取若干个节点 $x_0=0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=L$ (如图 1.3 所示). 为简单计, 这里我们设各节点之间是等距的, 步长 $h=\frac{L}{n}$. 我们只考虑 u 在节点上的值 (通常是近似值) u_i ($i=$

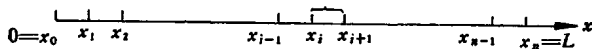


图 1.3

$0, 1, 2, \dots, n$). 在每个内节点 x_i ($i=1, \dots, n-1$) 上, 用 u_i 值的相应的差商来代替(1.6)式中的微商, 同(1.1)式一起, 就可列出相应的差分方程:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0, & (i=1, 2, \dots, n-1), \\ u_0 = 0, u_n = a. \end{cases} \quad (1.7)$$

即

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{2}(u_{i-1} + u_{i+1}), & (i=1, 2, \dots, n-1), \\ u_0 = 0, u_n = a. \end{cases} \quad (1.8)$$

由此便可得到 u 在节点上之近似解为

$$u_i = \frac{ia}{n}, \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (1.9)$$

此时, 它和(1.4)式所给出的精确解是一致的.

2. 有限元素法——利用最小总位能原理, 把问题化为一个变分问题(即求泛函极值的问题), 再经过离散化得到计算格式而求解.

从图(1.4)所示的简单的模型就可知道,一物体的稳定平衡位置是使位能极小的位置。对弹性体来说,它的稳定平衡状态应是其各种可能存在的位移状态中使总位能达到极小的状态,这就是最小总位能原理。

弹性体受力作用发生变形,在变形过程中克服内力所作的功,就作为能量积蓄在弹性体内部,称为变形能。例如,拧紧的钟表发条就具有这种变形能,它可以用对外界做功的方式(如推动钟表走动)表现出来。这种变形能就是弹性体总位能的一部分。对本节所考察的弹簧来说,其总位能就是变形能。

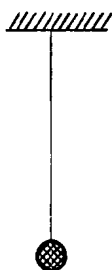


图 1.4

根据力学知识,并注意到(1.2)、(1.3)式,知此时变形能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \varepsilon dx = \frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \quad (1.10)$$

在知道了位移函数 $u=u(x)$ 后,就可由(1.10)通过积分求得 U 值。因此,变形能 U 可看成“位移函数 $u(x)$ 的函数”。这种“函数的函数”,数学上称为泛函。又因为(1.10)右端包含 $u(x)$ 导数的平方项,故又称变形能 U 为位移函数 $u=u(x)$ 的二次泛函。

于是,根据最小总位能原理,所求的位移函数 $u=u(x)$ 应是在满足边界条件(1.1)的各种可能的函数中(参见图(1.5))

使总位能 $U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$ 达到极小的函数。这就把问题

化为一个求泛函极值的问题(通常称为变分问题)来处理。

容易证明,这个变分问题同前述二阶常微分方程的边值

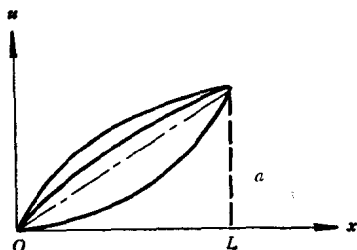


图 1.5

问题(1.5), (1.1)实际上是等价的。

这个变分问题可以通过离散化用下面的方法来求解。方法是：先把求解区间 $[0, L]$ 划分为由有限个互不重叠的小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) 所组成，其中 $x_0=0, x_n=L$ (参见图 1.6)。称这些小区间为元素。在每个元素 $[x_i,$

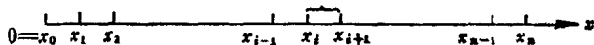


图 1.6

$x_{i+1}]$ 上，再选择一些节点，通常就选择其二个端点 x_i, x_{i+1} 为节点，而着眼于寻求极小函数 $u=u(x)$ 在这些节点上的值（通常是近似值） u_i ($i=0, 1, \dots, n$)，但使 $u_0=0, u_n=a$ 。

节点上的近似值 u_i 要根据使泛函 (1.10) 达到极小的要求来寻找。但要计算泛函 (1.10)，就必须知道在整个求解区间 $[0, L]$ 上的函数值。因此，首先必须用适当的方法，由节点上的值 u_i ($i=0, 1, \dots, n$) 来构造整个求解区间上的函数，才能根据使泛函达到极小的要求来确定 u 在节点上的近似值 u_i 。这种由节点上的函数值 u_i 所构造出来的整个求解区间上的函数，称为插值函数。它的作用就是将节点之间的函数值用

适当的方式补充起来。

为了在整个求解区间上构造插值函数，可以在每个元素上分别进行。例如，对第 i 个元素 $[x_i, x_{i+1}]$ ，若节点 x_i, x_{i+1} 上的函数值分别为 u_i, u_{i+1} ，那末插值函数在此元素上的值就可以用线性插值的方法很方便地构造出来（参见图 1.7）：

$$u(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1},$$

$$(x_i \leq x \leq x_{i+1}). \quad (1.11)$$

显然，这样构造的插值函数，在相邻二元素的公共节点上保持连续（称为满足相容性条件）；而且由于已经规定 $u_0 = 0$ ， $u_n = a$ ，此插值函数也满足边界条件(1.1)。这样，如果已知节点上的值 $u_i (i=0, 1, \dots, n)$ ，就可以在整个求解区间上构造如图(1.8)所示的一条折线，这就是所求的插值函数。

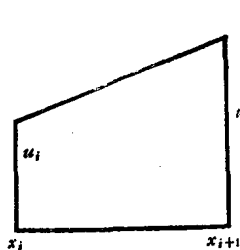


图 1.7

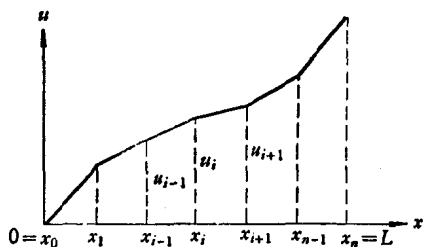


图 1.8

将此插值函数(1.11)代入泛函(1.10)，可得

$$U = \frac{E}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (1.12)$$

$$= \frac{E}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 dx = \frac{E}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{x_{i+1} - x_i}.$$

这就是用节点位移 u_i 写出的泛函(1.10)的表示式,但在其中已取定 $u_0=0$, $u_n=a$ 。

由最小总位能原理,节点位移 u_i ($i=1, \dots, n-1$) 不能任意,它要使泛函达到极小,即应满足条件:

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = E \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \right) = 0, \\ (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (1.13)$$

这是一个以 u_i 为未知数 ($i=1, 2, \dots, n-1$) 的线性代数方程组,求解之,就可得到节点上位移的近似值 u_i 。

如果所有元素的长度相等: $x_{i+1} - x_i = h$ ($i=0, 1, \dots, n-1$), 那末上面的计算格式(1.13)就可简写为(1.8)的形式,因此其解就同样是(1.9),而得到和有限差分法相同的结果。

上述方法,即将求解区间划分为有限个元素,通过构造插值函数,而利用最小总位能原理求得元素节点上的位移近似值,就称为有限元素法。¹⁾

显然,在求得节点位移的近似值后,就可利用插值函数及(1.3)式求出各个元素上的应力 σ 值,而节点上的应力值可取为相邻二元素上应力的平均值,由此就可得到应力分析的结论。

从上面这个简单的例子可以看到,有限元素法可以直接从所考察的物理模型出发,利用诸如最小总位能原理等力学原理,直接进行离散化处理而列出计算格式,而不必通过把问题归结为微分方程这一中间手续后再进行离散化处理,因此具有更明确的物理意义。

1) 严格地说,这只是有限元素法中最常应用的一种,即有限元素法中的位移法。其他还有利用余位能进行变分的力法以及用混合变分的混合法等。本书中只着重介绍位移法。

我们还可以看到,有限元素法实际上是古典变分法(能量法或 Ritz 法)的一种变体。由于对具有复杂形状的区域,光滑的坐标函数(它必须满足某些边界条件)实际上无法选取,故古典变分方法此时很难采用。而有限元素法通过离散化处理,用构造分块光滑的(有时是近似的)坐标函数克服了这个困难,可以说使古典变分方法经过改造获得了新的生命。

从下面几章中我们可以看到,和以往习惯使用的有限差分法相比较,有限元素法由于节点配置的方式比较任意,因此,对于具有复杂形状的物体,可以使边界节点完全落在区域边界上,而在边界上给出较好的逼近;对于由几种材料组合而成的物体,也可以通过把节点取在分界面上而得到较好的处理;同时,可以根据实际的^{Fig. 1.10}需要,在一部分求解区域中(如应力集中处)配置较密集的节点,而在另一部分求解区域中配置较稀疏的节点,使能在不过分增加节点总数的情况下,提高计算的精确度。而这些,对采用直交网格的有限差分法均是难以实现的。

此外,由于有限元素法用统一的观点对区域内节点及边界节点列出计算格式,也克服了有限差分法孤立地对微分方程及定解条件分别列出差分格式的弊病,使各节点的精度在总体上比较协调;而且其最后要求解的线性代数方程组的系数阵也具有较好的性质(是对称正定阵),这对问题的求解将带来很大的方便。这也是有限元素法比有限差分法优越之处。

当然,有限差分法由于采用直交网格,列计算格式比较简便,而有限元素法由于节点配置任意,列计算格式就要复杂一些。但因为有限元素法的计算格式同样可在电子计算机上自动形成,这对实际计算并无任何妨碍,相反还易于编制通用的标准程序,以节省人力,并有利于向设计自动化方面发展。

然而,也必须指出,在求解区域的形状比较规则时,有些问题用差分法来处理将是更合宜的;同时,有些问题尽管用有限元素法目前还不能处理,但用有限差分法却仍可以求解。因此,在有限元素法出现以后,有限差分法仍不失为一种比较有效的计算方法,起到和有限元素法相辅相成的作用,而且其本身仍在不断地发展。

为了帮助读者掌握和使用有限元素法,在第二章中我们介绍平面杆件系统的结构分析方法,在第三及第四章中分别对平面应力分析及轴对称应力分析进行介绍,第五章介绍用有限元素法求解平面和轴对称稳定温度场的方法,而在第六章中对采用有限元素法时经常碰到的具有对称正定系数阵的线性代数方程组的解法进行初步的讨论。

为了便于学习和使用,上述各章的内容都是相对独立的,可以根据实际的需要首先选读有关的章节。同时在附录中还列出了几个有关的计算程序,可供使用时参考。

上述各章的内容,已可用来在一定的精度内求解一些重要工程构件的温度场及应力分析等问题。至于有限元素法的进一步的内容,例如板、壳的应力分析,空间应力分析,非线性应力分析,振动计算,不定常问题以及元素的自动划分和求解具有对称正定系数阵的线代数方程组的更有效的办法等,将在进一步实践的基础上另行介绍。

第二章 平面杆件系统的结构分析

在生产斗争和科学实验中,时常需要对平面杆件系统进行结构分析。譬如,在进行工业厂房结构设计时,要计算单式或复式的框架、排架;在进行桥梁结构设计时,要考虑作为桁架或刚架的桥身在单位荷重作用下的影响线;又譬如,在各种金属杆件结构的起重机械、运输机械的总体构造和各种挤压机械的机架等的设计过程中,往往要对各种受力情况所引起的变形及内力进行强度校核。随着结构的复杂化和对计算精度要求的提高,必然会使计算工作量增加,而以往工程上习惯使用的一些算法则往往不能胜任。结构的矩阵分析法正是适应这一要求而发展起来的。在这一章里,我们将介绍利用结构矩阵分析法,即平面杆件系统的有限元素法,来处理平面杆件系统结构分析问题的方法。对连续体进行应力分析的有限元素法,正是从这种结构矩阵分析法中发展而来的。因此,对结构矩阵分析法的讨论,也为进一步理解连续体的有限元素法提供了借鉴。

§ 1 问题的提出和概述

在同一平面内的若干弹性杆件,以一定的方式连接起来而形成的结构物,通常称为平面杆件系统。它的杆件可以是梁、柱,也可以是其他的结构构件。连接的方式可以是刚接的,也可以是铰接的。而杆件的材料可以是金属、钢筋混凝土等弹性材料。在某些空间结构问题中,如果忽略一些次要因素,并做一些简化处理后,就能看作是平面杆件系统来进行计

算。另一方面,按照处理平面杆件系统问题的思路,对更复杂一些的杆件系统(如板架、空间桁架等)的结构分析,也可以类似地加以处理。因此,这里所介绍的方法,是具有一般性的。

用有限元素法对平面杆件系统进行结构分析时,通常采用位移法,即把各节点的位移作为基本未知量来求解。在求解过程中,我们把平面杆件系统看成是由有限个元素以一定方式连接和组合而成的一个结构。这些元素一般是等截面的直杆件,而这些杆件的端点以刚接、铰接等方式彼此连接。解法的总的思路可以大致地描述如下:以节点位移作为基本未知量,根据有关的力学概念,并通过一定的数学运算,推导出

用节点位移表示的单根杆件的总位能表达式及用节点位移表示的整个杆件系统的总位能表达式,最后由最小总位能原理求解节点位移,并进而求得各杆件的内力。

在正式介绍有限元素法之前,先考察一下元素的划分和编号、节点的编号和坐标系的建立方式等问题。以图 2.1 所

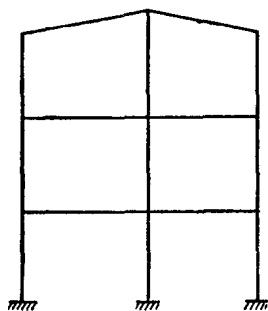


图 2.1

示的结构为例来加以说明。这是一个框架结构的工业厂房,两跨三层,屋面板有一定的倾斜度。整个结构通过底层的三根柱子刚固于地基上。因此在框架结构承受外载荷时,这三根柱子的底部既不能有线位移也不能有转角。

1. 元素的划分和编号, 节点的编号。从图 2.1 中可以看出,这个结构共有九根柱,四根梁和二根屋面梁,它由十五根杆件所组成。在通常情况下,可将一根杆件作为一个元素,这样就把整个框架结构划分成为十五个元素。在某些具体问题