

高等学校试用教材

运筹学应用案例

西安交通大学 陶谦坎 主编

机械工业出版社



本书的应用案例涉及线性规划及灵敏度分析、运输问题、网络最大流问题、网络最短路问题、网络计划技术、目标规划、整数规划、动态规划、决策分析及随机模拟等内容。全书共 23 个案例、紧密结合生产实际,详细论述了建模过程、给出了计算结果并附有部分计算机程序。案例内容涉及到工业、农业、矿山、电力、运输等各个方面,每个案例均有充分的结果分析,以利读者配合相应教材进行理论联系实际的实践活动。

本书为高等学校管理类、经济类专业《运筹学》的配套教材,也可供广大经济、管理和工程技术人员自学参考。

运筹学应用案例

西安交通大学 陶谦坎 主编

*

责任编辑:刘同桥 责任校对:刘思璐 樊中英

封面设计:郭景云 版式设计:王 颖

责任印制:路 琳

*

机械工业出版社出版(北京市百万庄大街 22 号)

邮政编码:100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号)

中国建筑工业出版社密云印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ · 印张 $9^{1/2}$ · 字数 231 千字

1998 年 6 月第 1 版 第 2 次印刷

印数 1901-5900 · 定价:12.50 元

*

ISBN 7-111-03418-X/F · 455(课)

前 言

《运筹学应用案例》一书是根据高等工业学校管理工程专业教学指导委员会1986~1990年教材编审出版规划编写的。本书主要供高等学校教材《运筹学》配套使用。

运筹学是用数学方法研究各类系统最优化问题的学科。它用数学语言描述实际系统，建立数学模型，并据此求得合理运用人力、物力和财力等资源的最优方案。近年来，我国有关高等院校的管理、财经类专业都普遍开设了运筹学课程，一些管理工程、系统工程类专业的硕士点，还把运筹学作为学位课程列入培养计划，大量的管理干部进修班和研究生班，也设置了这方面的有关课程。

运筹学是一门实践性很强的学科，几年来虽然陆续出版了不少有关运筹学的教材供教学使用，但介绍有关运筹学实际应用方面的教材和书籍尚不多见。本书就是为了帮助读者更好地学习和掌握运筹学的知识、加强理论联系实际而编写的。本书共收集编写了23个应用案例，极大多数案例均有实际应用背景，并在实际中获得良好的效益。书中案例根据与之配套的《运筹学》一书的章节顺序编排而成。

参加本书编写的有：陶谦坎（西安交通大学），官世荣（同济大学），徐渝（西安交通大学），孙昌言（上海建材学院），王意冈（上海社会科学院），袁治平（西安交通大学），刘树林（西安交通大学）。陶谦坎担任主编。

本书由天津大学管理工程系教授李维铮担任主审，天津大学管理工程系杜纲同志等参加了审稿。特在此表示谢意。

本书为大专院校管理类、财经类有关专业的运筹学补充教材，也可作为管理干部进修班、研究班及自学者的参考书。

本书在编者多年实践的基础上编写而成，但鉴于所涉及的运筹学内容多面广，限于编者的水平，书中不妥和错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编 者

目 录

前 言

案例 1	某木器制造厂年度产品生产计划的优化研究.....	1
案例 2	某地区玻璃马赛克厂月生产计划的优化分析.....	13
案例 3	某汽车修配厂钢板综合下料问题的研究.....	18
案例 4	某配合饲料厂关于饲料配方的优化研究.....	27
案例 5	某县种植业的优化规划研究.....	32
案例 6	福州市某乡作物种植计划的制定.....	42
案例 7	上海某绘图仪器厂月度生产计划的优化分析.....	46
案例 8	北方某金属罐铸造厂生产计划的优化分析.....	52
案例 9	南方某白泥矿合理配车问题的研究.....	59
案例 10	电力公司增建输电线路问题的网络分析.....	64
案例 11	火车调车场作业调度问题的分析.....	67
案例 12	某钢铁厂平炉大修网络计划.....	69
案例 13	新产品生产定型网络计划的制定.....	73
案例 14	电冰箱厂装配车间生产计划制定的优化分析.....	76
案例 15	某有色冶金公司投资计划的优化分析.....	82
案例 16	陕西省某号公路选线的研究.....	86
案例 17	计算中心值班人员的优化配置.....	90
案例 18	矿山重型自卸汽车更新问题的研究.....	95
案例 19	露天矿均衡剥离工作的探讨	101
案例 20	某工业企业设备技术方案的决策	107
案例 21	火箭发动机质量检验方案的决策	111
案例 22	设备维修问题的模拟分析	115
案例 23	煤炭运输船队的模拟分析	127

案例1 某木器制造厂年度产品生产计划的优化研究

一、问题的提出

某木器制造厂是生产木器制品的专业厂家，有多年生产该类产品的丰富经验和悠久历史，无论从生产组织、产品开发、技术力量还是从经营销售等哪一方面来看，在当地同行业中均占有相当的优势。但另一方面，也确实存在着管理方法陈旧、管理手段落后的实际问题，尤其是近年来，随着经济体制改革的逐步实施，整个市场情况发生了很大的变化。以计划经济为主、市场调节为辅的指导性生产计划代替了传统的统购包销的指令性计划。这种新形势的出现迫使企业必须提高自身对市场需求变化的适应能力、必须重视和加强对产品生产总体经济效益的分析与研究，努力提高企业的素质。

厂管理部门通过认真的分析研究认为：年度产品生产计划是企业的纲领性计划，它直接影响到企业整个计划体系，如物资供应计划、人员培训计划、设备更新改造计划等的制定。全厂目前已经开发生产的产品有26种，以往在编制产品生产计划时完全依照上级下达的指令性计划进行生产，企业可以自行调整的幅度并不大，凭经验完全可以应付。现在则截然不同了，必须从企业的实际情况出发，充分考虑市场需求兼顾社会效益，自己动手制定使企业总体效益最优的方案。因此，千方百计提高企业在编制产品生产计划时的科学性就成为一个重要的努力目标。

二、生产现状及资料分析

木器加工的主要生产过程如图1-1所示。

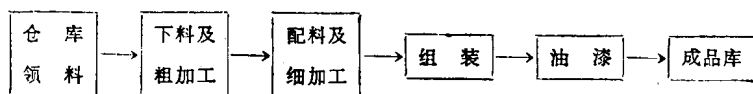


图 1-1 木器加工生产过程

由图1-1可知，根据所制定的生产计划，按生产品种及数量到仓库领料，然后改板、下料（制品毛坯），并对体积较大的毛坯进行粗加工，这些工序主要由机器完成（如电锯、电刨、电动改板机等），可以归入机加工类。根据不同产品品种将所需毛坯进行细加工（人工锯、刨、开榫等）并加以搭配送组装车间组装成半成品，以上各工序均由各类木工车间完成，可归入木加工类，最后将木器半成品送下道工序“打底”（磨光、批腻子）、涂装（各类油漆处理）而成为最终产品，这些工序可归入油漆加工类。可以看出，与产品生产和产值有关的主要因素有单位产品的产值、加工能力（生产能力）、原材料供应量及市场需求情况等。

每种产品的单位产值均已核出，如表1-1所示。

表 1-1 各种产品的单位产值表

产品编号	产品名称	单位产值 (元)	产品编号	产品名称	单位产值 (元)
1	3051 木箱	42.62	14	设备资料柜	782.35
2	B513 木笼	300.07	15	期刊架	302.89
3	3151 木箱	42.62	16	阅览桌	48.11
4	122 木箱	30.25	17	板架	269.28
5	762 步枪箱	93.25	18	资料柜	262.41
6	B122 卡板	6.72	19	写字台	88.00
7	B713 卡板	19.01	20	偏几桌	60.00
8	102 烟箱	18.17	21	文件柜	88.00
9	活动房子	3200	22	单人床板	55.00
10	讲台	92.74	23	诊断床	100
11	双人学生桌椅	100.66	24	地板木料	1008.60
12	地板块	1008.60	25	耳窗门套	72.04
13	M90K	117.72	26	耳窗门扇	76.39

为了简化问题,可以将所有木器产品按其加工性质的不同分为机加工、木加工和油漆工三类,并测算了每件产品所需要的机加工、木加工和油漆工工时(见表1-2)以及每天全厂所能提供的总工时,以便统一地考虑生产能力。

表 1-2 单位产品所需加工工时表

产品 编号	产品名称	单位产品所需工时(工时)			产品 编号	产品名称	单位产品所需工时(工时)		
		机工	木工	油工			机工	木工	油工
1	3051 木箱	0.12	0.095	0.02	14	设备资料柜	1	10	4.2
2	B513 木笼	1	0.5	0.2	15	期刊架	0.5	4	3.5
3	3151 木箱	0.12	0.095	0.02	16	阅览桌	0.2	0.6	0.6
4	122 木箱	0.13	0.1	0.25	17	板架	0.36	3.5	2.3
5	762 步枪箱	0.02	0.12	0.05	18	资料柜	0.5	4	2.1
6	B122 卡板	0.02	—	—	19	写字台	0.5	4	2
7	B713 卡板	0.05	—	—	20	偏几桌	0.4	1.5	1
8	102 烟箱	0.11	0.1	0.22	21	文件柜	0.3	1.5	0.5
9	活动房子	12	3	6	22	单人床板	0.5	2.5	1.5
10	讲台	0.2	0.7	0.3	23	诊断床	1	2.6	1.3
11	双人学生桌椅	0.4	1.2	0.6	24	地木料	15	—	—
12	地板块	15	—	0.3	25	耳窗门套	0.3	0.3	—
13	M90K	0.8	0.53	—	26	耳窗门扇	0.6	0.42	—

测算的结果是:每天全厂可提供230个机加工工时、180个木加工工时及80个油漆工工时,若一年按300天计,则可计算出全年的生产能力为:

$$230\text{工时} \times 300 = 69\,000\text{工时(机加工总工时)}$$

$$180\text{工时} \times 300 = 54\,000\text{工时(木加工总工时)}$$

$$80\text{工时} \times 300 = 24\,000\text{工时(油漆工总工时)}$$

其次,已知各类木制产品的原料主要是红松、白松、落叶松、曲柳、椴木、杨木、阔叶木及细木板8大类木材及加工材,供应科根据历年的统计资料及当年的原材料市场情况,可以估算出当年8大类原材料的货源情况,从而给出一个原材料供应的最大可能值(见表1-3)。

单位产品原材料消耗情况经核定如表1-4所示。

表 1-3 原材料最大供应量

种 类	红 松 (m³)	白 松 (m³)	落叶松 (m³)	曲 柳 (m³)	椴 木 (m³)	杨 木 (m³)	阔叶木 (m³)	细木板 (m²)
最大供应量	38 000	15 000	9 850	800	4 000	4 500	15 000	18 000

表 1-4 单位产品原材料消耗定额表

产品编号	产 品	材 料 (m³)							加工材 (m²)
		红 松	白 松	落叶松	曲 柳	椴 木	杨 木	阔叶木	
1	3051 木箱		0.038 26						
2	B 513 木笼			1.364					
3	3151 木箱		0.040 99						
4	122 木箱		0.055 42						
5	762 步枪箱			0.134 71					0.1760
6	B 122 卡板		0.001 02						
7	B 713 卡板		0.003 73						
8	102 烟箱	0.045 42							
9	活动房子	2.213 32							284.3375
10	讲 台				0.043 81		0.025 89		0.141 98
11	双人学生桌椅				0.0714				
12	地板块						2		
13	M90 K				0.010 85		0.052 85		
14	设备资料柜	0.2802			0.0231		0.001 73		0.0026
15	期刊架				0.0495		0.006 17		
16	阅览桌								
17	板 架				0.0412	0.002 68			0.038 85
18	资料柜				0.055 25				0.1321
19	写字台	0.074				0.0439		0.019 33	0.104 75
20	偏几桌	0.005				0.025		0.1	0.085
21	文件柜	0.004				0.016 90	0.106 63	0.106 63	0.059 74
22	单人床板				0.076 24				
23	诊断床				0.0436				
24	地木料						2		
25	耳窗门套			0.143 70					
26	耳窗门扇			0.0928					

关于市场情况可以专门立题研究，这里，仅引用销售科近期组织专门力量进行市场调查的结果。根据市场销售及预测的结果表明，26种产品中绝大部分销路都很好，只有762步枪箱、讲台、阅览桌、板架、耳窗门、耳窗门扇的市场需求量有限，其预测值分别为500、150、15、10、1000、1000。

根据以上资料，就可以来研究如何制定较为科学的产品计划了。

三、建模与求解

厂领导希望尽量挖掘企业潜力，在力所能及的条件下使各种产品的总产值尽可能提高。因此，在制定产品计划时，可以将产品总产值 Z 作为目标要求，使之尽可能大。

表1-2和表1-3所提供的数据实际上是全厂的资源限制条件，市场调查的结果给出了市场

需求量限制条件。由此看来,所提供的背景材料及数据资料使该问题具备了优化条件(总产值最大)及限制条件,而选择条件(即存在不同的生产计划方案)则是显然的,因此可以试用运筹学的优化技术建立产品品种计划的数学模型。

将26种产品依表1-1所示的编号依次假设其产量分别为 x_j , $j=1, 2, \dots, 26$; 若将相应的单位产品产值分别用 c_j , $j=1, 2, \dots, 26$ 来表示, 则其总产值可以用下面的线性函数来表示, 即

$$Z = \sum_{j=1}^{26} c_j x_j$$

根据表1-2所列数据及相关资料可以将工时限制分别就机工、木工、油工列出3个线性不等式约束。根据表1-3、表1-4及有关资料可以就8类主要原材料供应限制列出8个线性不等式约束; 市场需求量限制条件则由最后的6个不等式约束加以描述, 这样就可以建立产品品种计划的数学模型如下:

$$\begin{aligned} \text{极大化 } Z = & 42.62x_1 + 300.07x_2 + 42.62x_3 + 30.25x_4 + 93.25x_5 + 6.72x_6 + 19.01x_7 \\ & + 16.17x_8 + 3200x_9 + 92.74x_{10} + 100.66x_{11} + 1008.6x_{12} + 117.72x_{13} \\ & + 782.35x_{14} + 302.89x_{15} + 48.11x_{16} + 269.28x_{17} + 262.41x_{18} + 88x_{19} \\ & + 60x_{20} + 88x_{21} + 55x_{22} + 100x_{23} + 1008.6x_{24} + 72.04x_{25} + 76.84x_{26} \end{aligned}$$

约束条件:

- (1) $0.12x_1 + x_2 + 0.12x_3 + 0.13x_4 + 0.02x_5 + 0.06x_6 + 0.05x_7 + 0.11x_8 + 12x_9 + 0.2x_{10} + 0.4x_{11} + 15x_{12} + 0.8x_{13} + x_{14} + 0.5x_{15} + 0.2x_{16} + 0.36x_{17} + 0.5x_{18} + 0.5x_{19} + 0.4x_{20} + 0.3x_{21} + 0.5x_{22} + x_{23} + 15x_{24} + 0.3x_{25} + 0.6x_{26} \leq 69\ 000$
- (2) $0.095x_1 + 0.5x_2 + 0.095x_3 + 0.1x_4 + 0.12x_5 + 0.1x_6 + 3x_9 + 0.7x_{10} + 1.2x_{11} + 0.53x_{13} + 10x_{14} + 4x_{15} + 0.6x_{16} + 3.5x_{17} + 4x_{18} + 4x_{19} + 1.5x_{20} + 1.5x_{21} + 2.5x_{22} + 2.6x_{23} + 0.3x_{25} + 0.42x_{26} \leq 54\ 000$
- (3) $0.02x_1 + 0.2x_2 + 0.02x_3 + 0.25x_4 + 0.05x_5 + 0.22x_6 + 6x_9 + 0.3x_{10} + 0.6x_{11} + 0.3x_{12} + 4.2x_{14} + 3.5x_{15} + 0.6x_{16} + 2.3x_{17} + 2.1x_{18} + 2x_{19} + x_{20} + 0.5x_{21} + 1.5x_{22} + 1.3x_{23} \leq 24\ 000$
- (4) $0.045\ 42x_8 + 2.213\ 32x_9 + 0.2802x_{14} + 0.094x_{19} + 0.004x_{21} \leq 38\ 000$
- (5) $0.038\ 26x_1 + 0.040\ 99x_3 + 0.055\ 42x_4 + 0.001\ 02x_6 + 0.003\ 173x_7 \leq 15\ 000$
- (6) $1.364x_2 + 0.134\ 71x_5 + 0.1487x_{25} + 0.0928x_{26} \leq 9850$
- (7) $0.043\ 81x_{10} + 0.0714x_{11} + 0.010\ 85x_{13} + 0.0231x_{14} + 0.0495x_{16} + 0.0412x_{17} + 0.055\ 25x_{18} + 0.096\ 24x_{22} + 0.0436x_{23} \leq 800$
- (8) $0.002\ 68x_{17} + 0.0439x_{19} + 0.016\ 96x_{21} \leq 4000$
- (9) $0.025\ 89x_{10} + 2x_{12} + 0.052\ 85x_{13} + 0.001\ 73x_{14} + 0.006\ 17x_{15} + 0.106\ 63x_{21} \leq 4500$
- (10) $0.019\ 33x_{19} + 0.106\ 63x_{21} \leq 15\ 000$
- (11) $0.1760x_5 + 284.337\ 5x_9 + 0.141\ 96x_{10} \leq 18\ 000$
- (12) $x_5 \leq 500$
- (13) $x_{10} \leq 150$
- (14) $x_{16} \leq 15$

$$(15) x_{17} \leq 10$$

$$(16) x_{25} \leq 1000$$

$$(17) x_{28} \leq 1000$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 26$$

上述数学模型由于目标函数和约束条件均为线性，因此是一个线性规划模型，运用 QSB 软件用单纯形法解算该线性规划，经过15次迭代计算其结果如表1-5和表1-6所示。

表 1-5 线性规划模型迭代计算结果 I

Summarized Results for all Page:1					
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
1 X 1	0.0000	6.8244	16 X 16	0.0000	52.0590
2 X 2	0.0000	100.2375	17 X 17	0.0000	8.3445
3 X 3	0.0000	6.8244	18 X 18	0.0000	89.5500
4 X 4	0.0000	23.1975	19 X 19	0.0000	282.9800
5 X 5	500.0000	0.0000	20 X 20	0.0000	152.4025
6 X 6	0.0000	0.8840	21 X 21	0.0000	86.3825
7 X 7	1271920.00	0.0000	22 X 22	0.0000	235.6375
8 X 8	0.0000	29.6735	23 X 23	0.0000	384.7590
9 X 9	0.0000	1483.0449	24 X 24	0.0000	4694.3999
10 X 10	0.0000	11.4505	25 X 25	0.0000	54.0845
11 X 11	0.0000	99.6780	26 X 26	0.0000	168.1703
12 X 12	0.0000	4694.3999	27 S 1	0.0000	380.2000
13 X 13	0.0000	207.7539	28 S 2	0.0000	40.2150
14 X 14	5394.0000	0.0000	29 S 3	1320.2019	0.0000
15 X 15	0.0000	48.0700	30 S 4	36488.6016	0.0000
Maximum value of the OBJ = 2.8445282E+0.7 Iters. = 15					

表 1-6 线性规划模型迭代计算结果 I

Summarized Results for all Page:2					
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
31 S 5	10964.1982	0.0000	38 S 12	0.0000	80.8212
32 S 6	9782.6445	0.0000	39 S 13	150.0000	0.0000
33 S 7	675.3986	0.0000	40 S 14	15.0000	0.0000
34 S 8	4000.0000	0.0000	41 S 15	10.0000	0.0000
35 S 9	4490.6685	0.0000	42 S 16	1000.0000	0.0000
36 S 10	15000.0000	0.0000	43 S 17	1000.0000	0.0000
37 S 11	17865.6113	0.0000			
Maximum value of the OBJ = 2.844582E+07 Iters. = 15					

由表所示可知，该线性规划的最优解为：

$x_5 = 500$, $x_7 = 1\,271\,920$, $x_{14} = 5394$, 其余决策变量值均为零，目标函数 Z 的最大值为 2844.582 万元。

四、结果分析

1. 由计算结果可知, 使总产值最大的产品品种计划是: 全年生产 762 步枪箱 500 件, B713 卡板 1271 920 件, 设备资料柜 5394 个, 其余产品均不生产, 这样可使全年总产值达到 2844.582 万元。

2. 松弛变量 $s_1, s_2, \dots, s_{17}$ 的取值表明各种资源的节余量及市场需求量的非饱和量, 具体分析如下: $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = 1320.2019$ 说明机加工和木加工工时全部用完没有节余, 而油工生产工时尚节余 1300 多工时, 从木材及加工材的消耗来看, 椴木及阔叶木根本没有用上, 落叶松及杨木也消耗得很少, 分别为 64.35m^3 及 9.33m^3 , 曲柳及细木板消耗量也不多, 均在 $120 \sim 150\text{m}^3$ 范围之内。主要消耗量是白松 (4035.8m^3) 及红松 (1512m^3), 从另一角度来看, 原材料的供应十分充足, 工厂一方面应设法扩大机加工、木加工的生产能力以提高产品产量增加产值; 另一方面应考虑调整供应计划, 以减少不必要的原材料积压。

$s_{12}, s_{13}, \dots, s_{17}$ 代表市场需求的不饱和量, 从结果可以看出, 762 步枪箱市场已饱和 ($s_{12} = 0$), 因此不能再增加产量, 而 B713 卡板及设备资料柜均有广阔的市场, 应努力提高产品产量以增加产值。

3. 市场需求量限制是通过市场预测得到的, 在建模及求解过程中, 它是作为模型外预测值处理的, 需要强调的是市场预测工作本身是很重要的, 预测方法是否科学, 预测值是否准确对建模及求解结果均有很大影响。比如, 若 762 步枪箱市场需求量能够扩大或可望开辟出新的市场, 则提高该产品产量以增加产值就有潜可挖。而一旦最优产品计划中确定生产的产品其市场需求量减少, 则很可能会影响到全局, 甚至不得不重新考虑调整产品生产结构, 这一点需要引起足够的重视。

4. 求解结果表明, 当前的最优解是唯一的, 因为所有非基变量的检验数均严格小于零。这就是说, 根据计算结果所确定的产品品种计划是唯一使总产值达到最大的生产计划, 倘若厂领导考虑到其他目标要求及影响因素, 比如充分利用本地木材资源, 满足市场对多个产品品种的需求等等, 则可添加适当的约束条件重新计算出新的最优方案。

5. 从单位产品的产值来看, 比较高的是活动房子 (x_9), 地板块 (x_{12}) 和地板木料 (x_{24}), 但产品品种计划中却没有安排生产, 这是为什么呢? 从求解结果中可以得知, x_9 、 x_{12} 、 x_{24} 三个非基变量对应的检验数分别为 -1483.0449 、 -4694.3999 和 -4694.3999 , 全都是绝对值不小的负数, 这就是说如果安排生产, 会使总产值下降得很多, 进一步究其原因, 从表 1-2 中不难发现, 这三种产品所消耗的机加工工时相对其他产品要多得多, 为 12~600 倍, 而机加工工时又是工厂比较紧缺的, 这就从另一个角度阐述了必需千方百计提高机加工能力的理由。

五、进一步的讨论

从计算及结果分析中得出的结论是, 所给出的最优生产方案是唯一的。这个结果有一个明显的缺陷, 即生产的产品品种太少, 全厂到目前已开发出的品种共有 26 种, 但最优生产计划中只安排了 3 种, 这无论从满足市场对品种的需求及工厂本身对不断开发新产品的要求来说都不能令人满意, 作为生产厂家, 很自然地会提出进一步修改计划使之更能切合实际的要求。

1. 关于工时约束的讨论。前面的分析表明, 机工工时和木工工时全部用完而没有剩余, 两者相比, 又以机加工工时最为紧张。以机加工工时为例做进一步讨论, 倘若能设法提高机

加工能力, 如由原来的69 000提高到100 000, 其他条件不变, 则可得计算结果如表 1-7 和表 1-8 所示。

表 1-7 机加工能力提高后的迭代计算结果 I

Summarized Results for 11 Page: 1					
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
1 X 1	0.0000	6.8244	16 X 16	0.0000	52.0590
2 X 2	0.0000	100.2375	17 X 17	0.0000	8.3445
3 X 3	0.0000	6.8244	18 X 18	0.0000	88.5500
4 X 4	0.0000	23.1975	19 X 19	0.0000	262.9800
5 X 5	500.0000	0.0000	20 X 20	0.0000	152.4025
6 X 6	0.0000	0.8840	21 X 21	0.0000	86.3825
7 X 7	1891920.00	0.0000	22 X 22	0.0000	235.6375
8 X 8	0.0000	29.6735	23 X 23	0.0000	384.7590
9 X 9	0.0000	1483.0449	24 X 24	0.0000	4694.3999
10 X 10	0.0000	11.4505	25 X 25	0.0000	54.0845
11 X 11	0.0000	99.6780	26 X 26	0.0000	168.1703
12 X 12	0.0000	4694.3999	27 S 1	0.0000	380.2000
13 X 13	0.0000	207.7539	28 S 2	0.0000	40.2150
14 X 14	5394.0000	0.0000	29 S 3	1320.2019	0.0000
15 X 15	0.0000	48.0700	30 S 4	36488.6016	0.0000
Maximum value of the OBJ = 4.023202 E+07 Iters. = 16					

表 1-8 机加工能力提高后的迭代计算结果 I

Summarized Results for 11 Page: 2					
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
31 S 5	8996.9375	0.0000	38 S 12	0.0000	80.8202
32 S 6	9782.6445	0.0000	39 S 13	150.0000	0.0000
33 S 7	675.3986	0.0000	40 S 14	15.0000	0.0000
34 S 8	4000.0000	0.0000	41 S 15	10.0000	0.0000
35 S 9	4490.6685	0.0000	42 S 16	1000.0000	0.0000
36 S 10	15000.0000	0.0000	43 S 17	1000.0000	0.0000
37 S 11	17865.6113	0.0000			
Maximum value of the OBJ = 4.023202 E+07 Iters. = 16					

由表所示可知, 其中B713卡板产量由原来的1271 920件提高到 1891 920件, 从而使总产值由原来的2844.582万元猛增到4023.2万元。

如果进一步放宽约束, 或者取极端情况, 即将机加工工时约束取消, 做到机加工生产能力没有限制, 结果显示“最优解无界”, 即产值可以任意大。这又从另一个角度说明了千方百计提高机加工生产能力的重要性。

2. 关于轮番生产方案的构想及实现。生产及管理部门根据市场实际情况, 希望能提出一个在几年内轮番生产所有已开发出来的26种产品, 根据这个要求, 先试探一下按产值大小

排出一个若干年的生产计划,具体设想是:根据前面的优化模型,第1年安排3种产品生产,然后在原模型中删除相应的决策变量(x_5, x_7, x_{14}),重新计算修改后的线性规划,算出的最优解即为第2年的生产产品品种计划,依此类推,直至将26种产品全部安排生产为止,以后则重复执行这一轮番生产计划。按照这一设想,可以构成一个9年轮番生产计划,具体计算结果如表1-9所示。

表 1-9 9 年轮番生产计划

年 份	安排生产的产品及其产量(件)	总产值(万元)
1	$x_5=500, x_7=1271.920, x_{14}=5394$	2844.582
2	$x_1=361149.625, x_6=1159229.87$ $x_{10}=150, x_{15}=4603.4614, x_{17}=10, x_{18}=284.236$	2466.775
3	$x_2=7116.0557, x_3=365942.937, x_9=63.3051$ $x_{11}=4260.8071, x_{13}=19008.5117, x_{23}=1000$	2067.299
4	$x_4=88396.2188, x_{21}=3801.8892, x_{26}=93946.5391$	1022.74
5	$x_8=109050, x_{16}=15, x_{24}=3800.1001$	559.6841
6	$x_{12}=2250, x_{23}=17942.3086$	406.3581
7	$x_{20}=24000$	144.0000
8	$x_{19}=12000$	105.0000
9	$x_{22}=8312.5518$	45.7196

注:表中数值仅供分析用,故未作化整处理。

但这个9年轮番生产计划有许多明显不足之处。首先是周期过长,不能适应市场多变的需求;其次是9年中总产值逐年下跌,第1年与第9年其产值相差竟达60余倍。这是工厂无论如何所不能接受的。另外,每年的生产产品品种最多只有6种,最少只有1种,产品品种过于单调不仅不利于满足市场需求,同时也对制定一个相对稳定的原材料供应计划造成困难。

尽管如此,这个9年轮番生产计划仍然能提供一些有用的信息。比如,可以从中得到产品关于产值的优先顺序,如表1-10所示。这里级别序号愈小,表示优先权数愈大。

表 1-10 产品关于产值的优先顺序表

级别序号	第1级	第2级	第3级	第4级	第5级	第6级	第7级	第8级	第9级
产品对应的产量	x_5, x_7, x_{14}	x_1, x_6 x_{10}, x_{15} x_{17}, x_{18}	x_2, x_3, x_9 x_{11}, x_{13}, x_{23}	x_4, x_{21}, x_{26}	x_8, x_{16}, x_{24}	x_{12}, x_{22}	x_{20}	x_{19}	x_{22}

由此可得到启发:能否将级别序号小的产品与序号大的产品搭配生产,使每年生产的产品品种都能在7、8种以上?为了避免“简单搭配”所造成的序号小的产品“进基”,序号大的产品对应看“非基变量”的结果,可以对序号大的产品的产量增加一个下限值的约束,然后再分层计算得出相应的年度产品计划来。

首先,通过调查、分析订货及销售情况后确定第6~9级的产品其产量下限分别为:

$$x_{18} \geq 600, \quad x_{12} \geq 110, \quad x_{22} \geq 400, \quad x_{23} \geq 800, \quad x_{20} \geq 1200$$

将上述 5 个产量下限作为约束条件加到原来的线性规划模型中，其计算所得结果如表 1-11 和表 1-12 所示。

表 1-11 增加第 6~9 级产品产量下限后的计算结果 I

Summarized Results for 11 Page : 1							
Variables		Solution	Opportunity Cost	Variables		Solution	Opportunity Cost
No.	Names			No.	Names		
1	X 1	0.0000	6.8244	16	X 16	0.0000	52.0590
2	X 2	0.0000	100.2375	17	X 17	0.0000	8.3445
3	X 3	0.0000	6.8244	18	X 18	0.0000	88.5500
4	X 4	0.0000	23.1975	19	X 19	600.0000	0.0000
5	X 5	500.0000	0.0000	20	X 20	1200.0000	0.0000
6	X 6	0.0000	0.8840	21	X 21	0.0000	86.3825
7	X 7	%1217880.00	0.0000	22	X 22	400.0000	0.0000
8	X 8	0.0000	29.6735	23	X 23	800.0000	0.0000
9	X 9	0.0000	1483.0449	24	X 24	0.0000	4694.3999
10	X 10	0.0000	11.4505	25	X 25	0.0000	54.0845
11	X 11	0.0000	99.6780	26	X 26	0.0000	168.1703
12	X 12	110.0000	0.0000	27	S 1	0.0000	380.2000
13	X 13	0.0000	207.7539	28	S 2	0.0000	40.2150
14	X 14	4666.0000	0.0000	29	S 3	304.8018	0.0000
15	X 15	0.0000	48.0700	30	S 4	36636.1875	0.0000
Maximum value of the OBJ=2.718671 E+07 Iters. = 22							

表 1-12 增加第 6~9 级产品产量下限后的计算结果 I

Summarized Results for 11 Page : 2							
Variables		Solution	Opportunity Cost	Variables		Solution	Opportunity Cost
No.	Names			No.	Names		
31	S 5	11135.6670	0.0000	46	S 19	%1217879.00	0.0000
32	S 6	9782.6445	0.0000	47	A 19	0.0000	0.0000
33	S 7	618.8395	0.0000	48	S 20	4665.0000	0.0000
34	S 8	3973.6599	0.0000	49	A 20	0.0000	0.0000
35	S 9	4271.9277	0.0000	50	S 21	0.0000	262.9600
36	S 10	14988.4023	0.0000	51	A 21	0.0000	-262.9600
37	S 11	17809.0234	0.0000	52	S 22	0.0000	235.6375
38	S 12	0.0000	80.8202	53	A 22	0.0000	-235.6375
39	S 13	150.0000	0.0000	54	S 23	0.0000	152.4025
40	S 14	15.0000	0.0000	55	A 23	0.0000	-152.4025
41	S 15	10.0000	0.0000	56	S 24	0.0000	4694.3999
42	S 16	1000.0000	0.0000	57	A 24	0.0000	-4694.3999
43	S 17	1000.0000	0.0000	58	S 25	0.0000	384.7590
44	S 18	499.0000	0.0000	59	A 25	0.0000	-384.7590
45	A 18	0.0000	0.0000				
Maximum value of the OBJ=2.718671 E+07 Iters. = 22							

其次,在上述模型中删除决策变量 x_5 、 x_7 、 x_{12} 、 x_{14} 、 x_{18} 、 x_{20} 、 x_{22} 、 x_{23} 及相应的大序号产品产量值的下限约束,再增加第 5 级序号的产品产量下限约束,即:

$$x_8 \geq 500, \quad x_{16} \geq 10, \quad x_{24} \geq 200$$

继续计算得到结果如表 1-13 和表 1-14 所示。

表 1-13 删除变量和修改约束后的计算结果 I

Summarized Results for 12 Page: 1					
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
1 X 1	9365899.875	0.0000	16 X 24	200.0000	0.0000
2 X 2	0.0000	44.5785	17 X 25	0.0000	30.9100
3 X 3	0.0000	0.0768	18 X 26	0.0000	127.5116
4 X 4	0.0000	22.8919	19 S 1	0.0000	334.5647
5 X 6	9981048.812	0.0000	20 S 2	0.0000	8.8019
6 X 8	500.0000	0.0000	21 S 3	0.0000	28.9143
7 X 9	0.0000	1014.0674	22 S 4	37977.2891	0.0000
8 X 10	150.0000	0.0000	23 S 5	0.0000	28.1435
9 X 11	0.0000	60.8367	24 S 6	9850.0000	0.0000
10 X 13	0.0000	154.4908	25 S 7	556.6752	0.0000
11 X 15	4642.9712	0.0000	26 S 8	3999.9731	0.0000
12 X 16	10.0000	0.0000	27 S 9	4467.4688	0.0000
13 X 17	10.0000	0.0000	28 S 10	15000.0000	0.0000
14 X 18	117.9077	0.0000	29 S 11	17962.7422	0.0000
15 X 21	0.0000	39.7294	30 S 12	500.0000	0.0000

Maximum value of the OBJ = 2.385144 E+07 Iters. = 22

表 1-14 删除变量和修改约束的计算结果 I

Summarized Results for 12 Page: 2					
Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost	Variables No. Names	Solution	Opportunity Cost
31 S 13	0.0000	11.1314	37 A 18	0.0000	-27.8534
32 S 14	5.0000	0.0000	38 S 19	0.0000	41.3127
33 S 15	0.0000	52.2271	39 A 19	0.0000	-41.3127
34 S 16	1000.0000	0.0000	40 S 20	0.0000	4009.8701
35 S 17	1000.0000	0.0000	41 A 20	0.0000	-4009.8701
36 S 18	0.0000	27.8534			

Maximum value of the OBJ = 2.385144 E+07 Iters. = 22

最后,在上述模型中删除决策变量 x_1 、 x_6 、 x_8 、 x_{10} 、 x_{15} 、 x_{16} 、 x_{17} 、 x_{18} 和 x_{24} 及相应的大序号产品产量的下限约束,增加第 4 级产品的产量下限约束,即:

$$x_4 \geq 500, \quad x_{21} \geq 200, \quad x_{26} \geq 500$$

据此计算结果如表 1-15 所示。

表 1-15 最后一次修改模型后的计算结果

Summarized Results for 13						
Variables		Solution	Opportunity Cost	Variables		Opportunity Cost
No.	Names			No.	Names	
1	X 2	7082.0381	0.0000	17	S 8	3996.6079
2	X 3	365266.906	0.0000	18	S 9	3486.7756
3	X 4	500.0000	0.0000	19	S 10	14078.6738
4	X 9	63.2630	0.0000	20	S 11	0.0000
5	X 11	3968.0352	0.0000	21	S 12	500.0000
6	X 13	18768.1777	0.0000	22	S 13	150.0000
7	X 21	200.0000	0.0000	23	S 14	15.0000
8	X 25	1000.0000	0.0000	24	S 15	10.0000
9	X 26	500.0000	0.0000	25	S 16	0.0000
10	S 1	0.0000	117.5323	26	S 17	1000.0000
11	S 2	0.0000	44.7059	27	S 18	0.0000
12	S 3	12292.8252	0.0000	28	A 18	0.0000
13	S 4	37859.1797	0.0000	29	S 19	0.0000
14	S 5	0.0000	592.0726	30	A 19	0.0000
15	S 6	0.0000	117.4375	31	S 20	0.0000
16	S 7	313.0439	0.0000	32	A 20	0.0000
Maximum value of the OBJ=2.064723 E+07 Iters. = 13						

综合上面的计算结果,可以得到一个3年轮番生产的产品计划:

- 第1年生产: (1) 762步枪箱 $x_5 = 500$
 (2) B713卡板 $x_7 = 1217380$
 (3) 地板块 $x_{12} = 110$
 (4) 设备资料柜 $x_{14} = 4666$
 (5) 写字台 $x_{19} = 600$
 (6) 偏几桌 $x_{20} = 1200$
 (7) 单人床板 $x_{22} = 400$
 (8) 诊断床 $x_{23} = 800$

以上共8种产品,其总产值为2718.671万元。

- 第2年生产: (1) 3051木箱 $x_1 \approx 365900$
 (2) B122卡板 $x_8 \approx 981049$
 (3) 102烟箱 $x_9 = 500$
 (4) 讲台 $x_{10} = 150$
 (5) 期刊架 $x_{15} \approx 4643$
 (6) 阅览桌 $x_{16} = 16$
 (7) 板架 $x_{17} = 10$
 (8) 资料柜 $x_{18} \approx 118$
 (9) 地板木料 $x_{24} = 200$

以上共9种产品,其总产值为2385.144万元。

第3年生产: (1) B513木笼	$x_2 \approx 7082$
(2) 3151木箱	$x_3 \approx 365\,267$
(3) 122木箱	$x_4 = 500$
(4) 活动房子	$x_9 \approx 63$
(5) 双人学生桌椅	$x_{11} = 3968$
(6) M90K	$x_{13} \approx 18\,768$
(7) 文件柜	$x_{21} = 200$
(8) 耳窗门套	$x_{25} = 1000$
(9) 耳窗门扇	$x_{26} = 500$

以上共9种产品, 其总产值为2064.723万元。

按照这个计划, 可以在3年内轮番生产已开发出来的全部26种产品, 且年总产值均高于2000万元, 轮番生产周期也不长, 因此, 这个生产计划是比较切合实际的。

当然, 还可以针对每一年的生产计划进一步做灵敏度分析, 找出对计划影响最大的因素。有针对性地作些调整, 同时综合考虑市场需求和社会效益, 使该生产计划更加具有可接受性。

另外, 在建模和计算过程中, 只简单地进行了“舍入化整”处理, 而没有增加变量的取整要求, 这是因为相同规模的整数线性规划比线性规划的迭代次数多得多, 加上这里决策变量的取值相对于1而言都比较大, 不会发生太大的误差, 即使影响到某些约束条件, 通过人为地调整都是可以解决的。在用一个定量方法解决一个实际问题时, 应尽可能采用既简单又能解决问题的模型。能用较简单的模型处理问题时就不要用复杂的模型处理, 这是一条很有用的经验。

案例2 某地区玻璃马赛克厂月生产计划的优化分析

一、问题的提出

玻璃马赛克是近年来在国际国内市场上推出的新型建筑物饰面材料，主要用于建筑物的室内外表面装饰，也可用来镶嵌和铺贴大型壁画。它是以石英砂为主要原料，并引入多种化合物作为助溶剂、着色剂，经熔融后机压成型的。

固光牌马赛克由中科院成都光电技术研究所研制，某地区拖拉机配件厂（简称拖配厂）玻璃马赛克分厂生产。该厂经过试生产、小批量接受订货阶段后，现已开始进入稳定生产阶段。在过去的3个月中，这个厂基本上是根据用户订货组织生产的。第4季度将是建筑施工的淡季和本厂生产的旺季（与来年第1季度正好相反），这个季度应根据本厂生产经营现状和目标，并参照前几个月的销售情况制定计划和组织生产。这里拟运用线性规划方法对该厂今年第4季度月生产的安排做一初步的优化分析。

二、生产概况及有关资料分析

（一）生产概况

玻璃马赛克分厂现共有职工95名，其中生产工人84名。主要设备是2台熔烧炉和2台压机，每台炉子有8口锅，每口锅的最大容量为100kg，需2人看管。该厂每天24h连续生产，节假日不停炉、不停机。原料入锅到成品出机平均需10h，成品率（成品重量/原料重量）约为60%。拖配厂只有解放牌4t卡车1辆，可供马赛克的原材料运输。

（二）产品结构及有关经济资料

该厂目前的产品根据颜色不同分为7类，所用原料约为21种（按照厂方意见，这里的不同产品和原料均用代号表示）。根据厂方提供的资料，经整理得表2-1。

表 2-1 产品配方及有关价格

(kg)

产 品	WH-2	SB	GR	MY-1	BR	GY-1	OR	原 料 价 格
原 料	100	100	100	100	100	100	100	(元/kg)
A	47.1	44.4	47.0	47.1	44.4	47.1	41.7	5.71 (元/t)
B	19.2	19.7	20.3	19.7	19.2	18.4	19.9	0.15
C	9.4	5.4	4.5	1.7	8.6	7.7	2.4	0.215
D	5.5	18.7	20.7	1.9	19.7	18.0	1.9	0.80
E	4.0	7.0	6.2	6.1	7.0	7.4	5.1	0.165
F		0.22	0.6	13.9		1.9	13.9	4.50
G							0.3	136.80
H	12.0							1.45
I	0.7							0.45
J				5.8			6.0	1.50
K				2.5			1.84	52.49
L				0.28			0.28	1.20
M					1.1			3.25